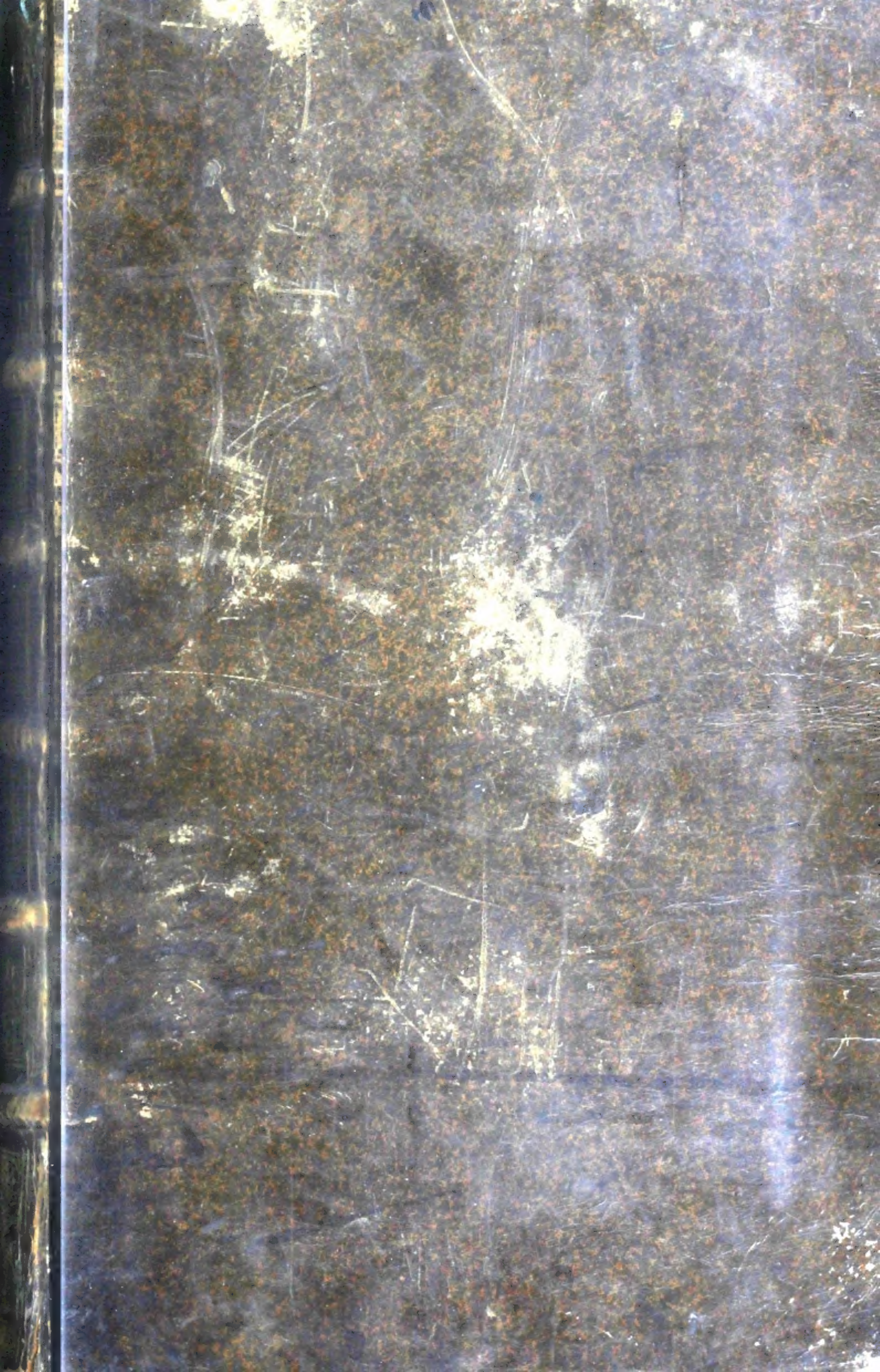



REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO
7-E. II. 1.



Les six Liures de l'Arithmetique de Diophante d'Alexandrie augmentez & reduits a la Specieuse.

Par Mr. Ozanam Professeur en Mathematique.

Je vous donne enfin, Mon cher Lecteur, ce que je vous ay promis depuis long tems, sauoir les six Liures de Diophante, non pas simplement reduits à la Specieuse, mais encore augmentez, & resolus non seulement en Nombres indefiniment, mais de plus par la Geometrie, en substituant des quantitez continues à la place des Nombres donnez, & des lettres indeterminées, qui demeurent dans la solution indefinie de la Question. On en void dans les deux premiers Liures, plusieurs exemples touchant les Questions determinées & indeterminées, qui seruiront de modelles pour resoudre à leur imitation toutes les autres Questions, qui se peuuent rencontrer de la même Nature.

J'ay tâché autant qu'il m'a été possible, de resoudre toutes les Questions par vn même principe, & si quelquefois je m'en suis éloigné, ç'a été pour rendre la solution plus simple & moins embarassée. Que si je n'ay pas expliqué en quelques endroits la metode de Diophante, c'est parceque je l'ay crûe facile à conceuoir, ou trop longue à pratiquer par la Specieuse; & dans les endroits les plus difficiles, j'ay fait voir l'origine des positions qu'il a faites au commencement, pour satisfaire tout d'vn coup à vne, ou à plusieurs conditions de la Question. On y verra que ses positions ont été faites plutôt par hazard, & par vne connoissance qu'il s'étoit acquise par vn long vsage de la proprieté des Nombres, que par vne certaine Science, & par vne veritable Specieuse, puisque les Theoremes sur lesquels il se fonde pour faire ses positions, se trouuent enoncez par la Specieuse beaucoup plus generalement qu'il ne les a proposez.

Je n'ay pas toujours resolu vne Question de la même maniere que sa prochaine, ou que son inuerse, & cela pour être plus court, & aussy quelquefois par necessité, à cause que la Question prochaine se rencontrant differente, c'est à dire de differente Nature, il a falu necessairement changer de metode pour la resoudre; mais j'ay presque toujours fait au commencement des positions conformes à la Nature du Probleme, pour auoir vne analyse plus aisée, & vne solution plus generale.

J'ay mis presque par tout des lettres à la place des Nombres, pour rendre la solution autant generale qu'il a été possible, & pour ne point faire de cas particulier: & si je me suis seruy quelquefois des Nombres, ç'a été pour auoir vn calcul plus aisé, & vne solution plus simple.

En Vn mot, je ne me suis éloigné des regles generales, que pour aplanir le chemin que l'on doit suiure dans la resolution d'Vne Question: & comme les Questions sont differentes, on a besoin aussy de differens detours pour les resoudre, car il est absolument impossible de les pouuoir toutes resoudre par Vn principe Vnique & general.

Cela m'a obligé d'ajouter à ces six Liures Vn Traité des Simples, des Doubles, & des Triples Egalitez, afin d'expliquer les metodes differentes, dont je me suis seruy pour resoudre les Questions de Diophante, & celles que j'y ay ajoutées dans les endroits où elles manquoient, & de faciliter à chacun le moyen de les resoudre en plusieurs autres manieres.

J'ay ajouté au commencement de chaque Question Vn canon general pour la resoudre, & je l'ay tirée de la solution la plus simple, entre plusieurs que je donne presque par tout, pour auoir Vn canon aussy plus simple, mais moins general. J'ay crû que j'en deuois Vser de la sorte, parcequ'Vn canon plus general étant plus long perd sa beauté & son Vtilité, parcequ'il est plus difficile à pratiquer, & c'est pour cela que [redacted] je l'ay omis dans les endroits, où il m'a parû trop embarassé.

J'ay mis ce canon plutôt au commencement qu'à la fin de la Question, pour donner l'enuie au Lecteur d'en sauoir l'origine, & l'obliger à étudier les solutions differentes, qui suiuent le canon, & qui donnent le même canon, lorsqu'elles donnent toutes Vne solution semblable indefinie, étant certain que chaque solution differente indefinie donne Vn canon different.

J'ay donné sur la fin de la solution de plusieurs Questions, leur determination, c'est à dire la Valeur que l'on peut donner aux lettres indeterminées, qui demeurent dans la solution indefinie, ou aux nombres donnez dans la Question, pour la rendre possible, c'est à dire pour ne la pas resoudre en nombres irrationnels, quand cela est possible, n'y en nombres niez, parceque dans les Questions de nombres on n'admet point de solutions negatiues, & aussy pour auoir Vn nombre plus grand que l'autre, quand il doit être tel.

Je n'ay pas fait cette determination dans les derniers Liures, excepté en quelques endroits, où elle m'a parue belle, afin d'être plus court, & parceque je Vous ay crû assez sauant, pour la faire de Vous même, à l'imitation de celles, qui ont été faites dans les Liures precedens.

Nous auons pris les lettres x, y, z, ω, pour les quantitez inconnues, & les autres lettres indifferemment pour les connues, & pour les indeterminées, excepté la lettre l, qui sera toujours prise pour l'Vnité, lorsqu'il s'agira de comparer ensemble par addition, ou par soutraction, deux grandeurs de diuers genre, comme il arriue dans plusieurs Questions de Diophante. Dans ce cas il est Necessaire de multiplier la plus basse de ces deux quantitez par l'Vnité autant de fois qu'il en sera besoin pour la rendre aussy éleuée que la plus haute, ou bien de diuiser la plus haute par l'Vnité autant de fois qu'il sera Necessaire pour la rendre homogene à la plus basse, ce qui se peut toujours faire sans changer la Question, parceque l'Vnité en multipliant ou en diuisant n'aporte aucun changement.

Cela se pratique pour conseruer la loy des Homogenes, c'est à dire pour ne point s'éloigner des regles de la Geometrie, qui nous apprend qu'il n'y a aucune raison entre Vne Ligne & Vn Plan, ny entre Vn Plan & Vn Solide, &c. parceque ces grandeurs sont heterogenes, c'est à dire de different genre; car ainsy on peut resoudre tout Probleme d'Aritmetique par Geometrie, comme Vous verrez dans les deux premiers Liures.

Nous nous sommes seruy du mot Equation, plutôt que du mot Egalité, parcequ'Vne Equation c'est la comparaison que l'on fait entre deux grandeurs inégales pour les rendre égales, & qu'Vne Egalité est la comparaison de deux grandeurs Veritablement égales. Ainsy lorsque par la réduction de l'Equation on a rendu égales les deux quantitez inégales, cette Equation se change en Egalité.

Le caractere ∾ signifie égal, le Caractere ⊕ signifie plus grand, & le caractere ⊖ signifie plus petit. Pour le caractere ⋯ entre deux quantitez, il signifie Moins douteux, parcequ'on ne sait pas à laquelle de ces deux quantitez il doit être attribué, quand elles sont inconnues, ou indeterminées, ou bien parcequ'il est indifferent de l'attribuer à laquelle on Voudra des deux mêmes quantitez, soit qu'elles soient connues, ou inconnues.

De
L'Arithmetique de Diophante d'Alexandrie.

Question 1.

Trouuer deux Nombres, dont la somme & la difference soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x,$$
$$y,$$

dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $100 \backsim a$, & dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $40 \backsim b$.

La Moitié de la somme des deux Nombres donnez est le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, & la Moitié de leur difference est le plus petit. Canon.

Selon les conditions de la Question, on a ces deux Equations,

$$x+y \backsim a.$$
$$x-y \backsim b.$$

Dans la premiere $x+y \backsim a$, on trouuera $y \backsim a-x$, & dans la seconde $x-y \backsim b$, on trouuera le Même $y \backsim x-b$, c'est pourquoy on aura cette Equation, $a-x \backsim x-b$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, & au lieu de $y \backsim a-x$, ou de $y \backsim x-b$, on aura $y \backsim \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b.$$
$$\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 100.$$
$$b \backsim 40$$

les deux Nombres seront de cette grandeur;

70.

30.

On trouuera la même solution, en ajoutant & en ôtant la seconde Equation $x-y \backsim b$, de la premiere $x+y \backsim a$, pour auoir en leur place ces deux autres Equations,

$$2x \backsim a+b.$$
$$2y \backsim a-b.$$

dans lesquelles on trouuera $x \backsim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, & $y \backsim \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, comme auparauant.

Si Vous Voulez resoudre cette Question par la Metode de Diophante, commencez par la deuxieme Equation $x-y \backsim b$, dans laquelle Metode de Diophante.

Vous trouuerez $x \sim y+b$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront

$$y+b.$$
$$y.$$

comme dans Diophante, en prenant y pour 1N, & b pour 40. & la premiere Equation $x+y \sim a$, se changera en celle-cy, $2y+b \sim a$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, comme auparauant, & au lieu de $x \sim y+b$, on aura $x \sim \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, comme auparauant.

Comme il peut arriuer en d'autres Questions, que le Nombre qui aura été supposé le plus grand dans l'analyse, tel qu'est icy x, ne le sera pas toujours: pour ne pas tomber dans cet inconuenient, il faut faire les positions des deux Nombres qu'on cherche, auec vne telle circonspection, que le plus grand Nombre soit essentiellement celuy qu'on voudra, pour ne pas trauailler au hazard. Comme icy on peut mettre

$$x+y.$$
$$y.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, dont le premier $x+y$ est essentiellement plus grand, & alors on aura selon les conditions de la Question, ces deux Equations,

$$x+2y \sim a.$$
$$x \sim b.$$

Si de la premiere $x+2y \sim a$, on ôte la seconde $x \sim b$, on aura cette troisieme Equation $2y \sim a-b$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, pour le second Nombre, comme auparauant: & si on met b à la place de x, à cause de la seconde Equation $x \sim b$, & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ à la place de y, à cause de $y \sim \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, au lieu du premier Nombre $x+y$, on aura $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, comme auparauant.

Ou bien encore on peut mettre

$$x+y.$$
$$x-y$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, dont le premier $x+y$ est essentiellement plus grand, & selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$2x \sim a.$$
$$2y \sim b.$$

dans lesquelles on trouuera $x \sim \frac{1}{2}a$, & $y \sim \frac{1}{2}b$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant, & quelques positions que l'on fasse, ils se trouueront toujours les mêmes, ce qui n'arriue pas dans toutes les Questions, comme vous verrez dans la suite.

Question

Question 11.

Trouver deux Nombres, dont la somme soit égale à un Nombre donné, & dont la raison soit égale à celle de deux Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x,$$
$$y,$$

dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $60 \backsim a$, & dont la raison $\frac{x}{y}$ soit égale à la raison $\frac{1}{3} \backsim \frac{b}{c}$, des deux Nombres donnez $1 \backsim b$, $c \backsim 3$.

Si on multiplie separement chaque terme de la raison donnée par la somme donnée, & qu'on divise chaque produit par la somme des mêmes termes, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \backsim a.$$
$$\frac{x}{y} \backsim \frac{b}{c}.$$

Dans la premiere $x+y \backsim a$, on trouvera $y \backsim a-x$, & dans la seconde $\frac{x}{y} \backsim \frac{b}{c}$, on trouvera le même $y \backsim \frac{cx}{b}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $a-x \backsim \frac{cx}{b}$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{ab}{b+c}$, & au lieu de $y \backsim a-x$, ou de $y \backsim \frac{cx}{b}$, on aura $y \backsim \frac{ac}{b+c}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ab,\ ac.}{b+c}$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \backsim 60.$$
$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 3.$$

les deux Nombres seront de cette grandeur,

15.
45.

Si Vous voulez resoudre cette Question par la metode de Diophante, commencez par la seconde Equation, $\frac{x}{y} \backsim \frac{b}{c}$, dans laquelle Vous trouverez $x \backsim \frac{by}{c}$, & les deux Nombres seront Metode de Diophante.

$$\frac{by}{c}.$$
$$y.$$

qui sont entre eux dans la raison donnée $\frac{b}{c}$, & ils seront encore dans la même raison, par quelque Nombre qu'on les multiplie, pourvûque ce soit par un même Nombre. C'est pourquoy pour éviter les fractions, on les multipliera chacun par le même Nombre c, qui est le denominateur du premier Nombre $\frac{by}{c}$, & alors on aura ces deux autres Nombres,

$by.$

$cy.$

qui sont conformes à ceux de Diophante, en supposant

$y \sim 1N.$

$b \sim 1.$

$c \sim 3.$

& il ne reste plus qu'à égaler leur somme $by + cy$ au nombre donné a, par cette Equation, $by + cy \sim la$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{la}{b+c}$, & au lieu des deux nombres by, cy, on aura $\frac{lab, lac}{b+c}$, ou $\frac{ab, ac}{b+c}$, comme auparavant.

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'Unité l, mettez

$\frac{ab}{x}.$

$\frac{ac}{x}.$

pour les deux Nombres qu'on cherche, car ainsy ils seront dans la raison donnée $\frac{b}{c}$, & il ne restera plus qu'à égaler leur somme $\frac{ab+ac}{x}$, au nombre donné a, par cette Equation $\frac{ab+ac}{x} \sim a$, dans laquelle on trouvera $x \sim b+c$, & les deux nombres qu'on cherche, se trouveront les mêmes qu'auparavant.

Solution en entiers.

Diophante ayant pris 1, & 3, pour les deux termes de la raison donnée, il a pris 60 pour la somme des deux nombres qu'on cherche, afinque ces deux Nombres se trouvent entiers, ce qui arrivera toujours, pourvûque la somme donnée a soit divisible par la somme $b+c$ des deux termes de la raison donnée, comme il est évident par les deux nombres trouvez $\frac{ab, ac}{b+c}$, qui sont multiples de a, & divisez par $b+c$, ce qui fait connoitre que le denominateur commun $b+c$, s'évanouïroit, si la quantité donnée a, étoit divisible par ce denominateur commun $b+c$. C'est pourquoy si au lieu de supposer $a \sim 60$, on suppose $a \sim 8$, qui est divisible par $b+c \sim 4$, on aura 2, 6, pour les deux nombres qu'on cherche.

La raison pourquoy nous avons mis $\frac{ab, ac}{x}$, pour les deux Nombres qu'on cherche, plutot que $\frac{bd, cd}{x}$, la lettre d étant indeterminée, est qu'en égalant leur somme $\frac{bd+cd}{x}$ à la somme donnée a, on trouveroit en entiers $d \sim a$, & $x \sim b+c$, ce qui fait connoitre qu'au lieu de $\frac{bd, cd}{x}$, on peut mettre $\frac{ab, ac}{x}$, pour les deux nombres qu'on cherche : & comme l'on a trouvé $x \sim b+c$, si à la place de x, on met sa valeur trouvée $b+c$, au lieu de $\frac{ab, ac}{x}$, on aura $\frac{ab, ac}{b+c}$, pour les deux nombres qu'on cherche, comme auparavant.

Trouver deux Nombres, dont la somme soit égale à Un Nombre donné, en sorte que la raison du premier au second diminué d'Un Nombre donné, soit égale à celle de deux Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $80 \backsim a$, en sorte que le premier x soit au second diminué du nombre donné $4 \backsim b$, savoir à $y-b$, comme le Nombre donné $1 \backsim c$, au Nombre donné $3 \backsim d$.

Si on multiplie l'excez du premier Nombre donné sur le second, par le premier des deux termes de la raison donnée, & qu'on divise le produit par la somme des deux mêmes termes, on aura le premier des deux Nombres qu'on cherche Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \backsim a.$$

$$\frac{x}{y-b} \backsim \frac{c}{d}.$$

Dans la premiere $x+y \backsim a$, on trouvera $y \backsim a-x$, & dans la seconde $\frac{x}{y-b} \backsim \frac{c}{d}$, on trouvera le Même $y \backsim \frac{dx}{c}+b$. C'est pourquoy on aura cette Equation, $a-x \backsim \frac{dx}{c}+b$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{ac-bc}{c+d}$, & au lieu de $y \backsim a-x$, ou de $y \backsim \frac{dx}{c}+b$, on aura $y \backsim \frac{ad+bc}{c+d}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ac-bc,\ ad+bc}{c+d}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \backsim 80.$$

$$b \backsim 4.$$

$$c \backsim 1.$$

$$d \backsim 3.$$

les deux Nombres seront de cette grandeur;

19.

61.

Si vous voulez resoudre cette Question par la metode de Diophante, commencez par la seconde Equation, $\frac{x}{y-b} \backsim \frac{c}{d}$, dans laquelle Vous trouverez $y \backsim \frac{dx}{c}+b$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront Metode de Diophante.

$$x.$$

$$\frac{dx}{c}+b.$$

qui sont conformes à ceux de Diophante,

1N.

1N+4.

en supposant

$x \sim 1N.$

$b \sim 3.$

$c \sim 1.$

& il n'y aura plus qu'à égaler leur somme $x+\frac{dx}{c}+b$, au Nombre donné a, par cette Equation, $x+\frac{dx}{c}+b \sim a$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{ac-bc}{c+d}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouveront les mêmes qu'auparavant.

Determination. La determination que l'on doit faire dans cette Question, afin que les deux Nombres trouvez soient reels & affirmez, est que des quatre Nombres donnez a, b, c, d, le premier a doit être plus grand que le second b.

Demonstration. Car dans le Numerateur $ac-bc$, du premier Nombre trouvé, on a cette inégalité, $ac-bc \oplus 0$, c'est pourquoy en divisant par c, on aura celle-cy, $a-b \oplus 0$, & par consequent $a \oplus b$. Outre que puisque le premier Nombre donné a, est la somme des deux Nombres trouvez, il doit être plus grand que chacun de ces deux mêmes Nombres, & puisque le premier de ces deux Nombres doit être plus grand que le second Nombre donné b, par la Nature de la Question, il s'ensuit à plus forte raison que $a \oplus b$. Ce qu'il faloit demontrer.

Nous avons omis la determination de la Quest. 1. parcequ'elle est évidente d'elle-même, car il n'y a personne qui ne sache bien que la somme de deux grandeurs reelles doit être plus grande que leur difference.

Solution en entiers. Pour faire que les deux Nombres qu'on cherche, soient des Nombres entiers, il suffit que l'un des deux soit un Nombre entier, parceque leur somme donnée est un Nombre entier. Or ayant pris 1, & 3, pour les deux termes de la raison donnée, si on prend pour les deux premiers Nombres donnez a, b, deux Nombres tels que leur difference $a-b$ soit divisible par la somme 4 des deux termes de la raison donnée, à cause du denominateur commun $c+d$, des deux Nombres trouvez, le premier de ces deux Nombres deviendra entier, & par consequent le second. C'est pourquoy si on prend pour le premier Nombre donné a, un Nombre divisible par 4, on doit prendre pour le second Nombre donné b, un Nombre aussy divisible par 4, comme a fait Diophante. Ainsy supposant comme auparavant, $a \sim 80$, si on suppose $b \sim 20$, les deux Nombres qu'on cherche, seront 15, 65.

Question IV.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit égale à Vn Nombre donné, & dont la raison soit égale à celle de deux Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x,$$
$$y.$$

dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $20 \sim a$, & dont la raison $\frac{x}{y}$ soit égale à la raison $\frac{5}{1} \sim \frac{b}{c}$, das deux Nombres donnez $5 \sim b$, $1 \sim c$.

Si on Multiplie separément chaque terme de la raison donnée par le Nombre donné, & qu'on divise chaque produit par la difference des Mêmes termes, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \sim a.$$
$$\frac{x}{y} \sim \frac{b}{c}.$$

Dans la premiere $x-y \sim a$, on trouvera $y \sim x-a$, & dans la seconde $\frac{x}{y} \sim \frac{b}{c}$, on trouvera le même $y \sim \frac{cx}{b}$. C'est pourquoy on aura cette Equation, $x-a \sim \frac{cx}{b}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{ab}{b-c}$, & au lieu de $y \sim x-a$, ou de $y \sim \frac{cx}{b}$, on aura $y \sim \frac{ac}{b-c}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ab,\ ac}{b-c}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 20.$$
$$b \sim 5.$$
$$c \sim 1.$$

les deux Nombres seront de cette grandeur,

$$25.$$
$$5.$$

Si Vous voulez suivre la Metode de Diophante, commencez par la seconde Equation $\frac{x}{y} \sim \frac{b}{c}$, dans laquelle Vous trouverez $x \sim \frac{by}{c}$; & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Metode de Diophante.

$$\frac{by}{c}.$$
$$y.$$

qui sont entre eux dans la raison donnée $\frac{b}{c}$, & ils seront encore dans cette même raison par quelque Nombre qu'on les Multiplie, pourvûque ce soit par Vn même Nombre. C'est pourquoy pour éviter les fractions, on les Multipliera chacun par le denominateur c, & alors on aura ces deux autres Nombres,

$by.$

$cy.$

qui sont conformes à ceux de Diophante,

5N.

1N.

en supposant

$y \sim 1N.$

$b \sim 5.$

$c \sim 1.$

& il n'y aura plus qu'à égaler leur difference $by - cy$ au Nombre donné a, par cette Equation $by - cy \sim 1a$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1a}{b-c}$, ou $y \sim \frac{a}{b-c}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les Mêmes qu'auparauant.

Les remarques que Nous auons faites dans la Quest. II. seruiront pour celle-cy.

Question V.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit égale à Vn Nombre donné, en sorte que la somme de leurs parties données soit aussy égale à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux nombres

$x.$

$y.$

dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $100 \sim a$, en sorte que la partie donnée $\frac{1}{3} \sim \frac{r}{s}$, du premier x, sauoir $\frac{rx}{s}$, auec la partie donnée $\frac{1}{5} \sim \frac{c}{d}$, du second y, sauoir $\frac{cy}{d}$, fasse Vne somme $\frac{rx}{s} + \frac{cy}{d}$, égale au Nombre donné $30 \sim b$.

Canon. Si on Multiplie la difference entre le Plan sous le second Nombre donné & le denominateur de la seconde partie donnée, & entre le Plan sous le premier Nombre donné & le Numerateur de la même seconde partie donnée, par le denominateur de la premiere, & qu'on diuise le produit par la difference entre le Plan sous le Numerateur de la premiere partie donnée, & le denominateur de la seconde, & entre le Plan sous le Numerateur de la seconde & le denominateur de la premiere; on aura l'Vn des deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \sim a.$$

$$\frac{rx}{s} + \frac{cy}{d} \sim b.$$

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouuera $y \sim a-x$, & la deuxieme

$\frac{rx}{s}+\frac{cy}{d}\sim b$, se changera en celle-cy, $\frac{rx}{s}+\frac{ac-cx}{d}\sim b$, dans laquelle on trouvera $x\sim\frac{sdb-sac}{rd-sc}$, & au lieu de $y\sim a-x$, on aura $y\sim\frac{rad-sdb}{rd-sc}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{sdb-sac,\ rad-sdb}{rd-sc}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a\sim 100.$$
$$r\sim 1.$$
$$s\sim 3.$$
$$c\sim 1.$$
$$d\sim 5.$$
$$b\sim 30.$$

les deux Nombres seront de cette grandeur;

$$75.$$
$$25.$$

Si Vous voulez resoudre cette Question comme Diophante, égalez la partie donnée du second Nombre y, savoir $\frac{cy}{d}$, au Nombre indeterminé z, par cette Equation, $\frac{cy}{d}\sim z$, dans laquelle on trouvera $y\sim\frac{dz}{c}$, & la seconde Equation precedente $\frac{rx}{s}+\frac{cy}{d}\sim b$, se changera en celle-cy, $\frac{rx}{s}+z\sim b$, dans laquelle on trouvera $x\sim\frac{sb-sz}{r}$, Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Metode de Diophante.

$$\frac{sb-sz}{r}.$$
$$\frac{dz}{c}.$$

qui sont conformes à ceux de Diophante,

$$90-3N.$$
$$5N.$$

en supposant

$$z\sim 1N.$$
$$r\sim 1.$$
$$s\sim 3.$$
$$c\sim 1.$$
$$d\sim 5.$$
$$b\sim 30.$$

Il ne reste donc plus qu'à égaler leur somme $\frac{sb-sz}{r}+\frac{dz}{c}$, au Nombre donné a, par cette Equation, $\frac{sb-sz}{r}+\frac{dz}{c}\sim a$, dans laquelle on trouvera $z\sim\frac{cra-csb}{rd-sc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouveront les Mêmes qu'auparavant.

La determination que Diophante ajoute à cette Question, touchant les quantitez données a, b, c, d, r, s, pour faire que les deux Nombres qu'on cherche, soient positifs & affirmez, est Determination.

que les deux parties données $\frac{r}{s}$, $\frac{c}{d}$, ne doivent pas être égales entre elles, & que le second Nombre donné b, doit être entre $\frac{ac}{d}$, & $\frac{ar}{s}$. Comme cette determination n'est évidente d'elle-même, nous en donnerons icy la demonstration.

Demonstration. Pour demontrer la premiere partie de cette determination, sauoir que les deux parties données $\frac{r}{s}$, $\frac{c}{d}$, ne doivent pas être égales entre elles, on considerera que puisque les deux termes rd, sc, du denominateur commun $rd-sc$, aux deux Nombres trouvez $\frac{sdb-sac,\ rad-sdb}{rd-sc}$, sont de differente affection, ils ne doivent pas être égaux entre eux, parceque ce denominateur $rd-sc$, & parconsequent chacun des deux Nombres trouvez, deviendroit égal à zero, ou à rien. C'est pourquoy, en divisant chacun des deux termes rd, sc, par $\frac{s}{d}$, on connoitra que la partie $\frac{r}{s}$, ne peut pas être égale à la partie $\frac{c}{d}$. Ce qu'il faloit premierement demontrer.

Pour demontrer la seconde partie de la determination, sauoir que le second Nombre donné b, doit être entre $\frac{ac}{d}$, & $\frac{ar}{s}$, on considerera que puisque les termes sdb, sac, rad, rd, sc, qui composent les Numerateurs $sdb-sac$, $rad-sdb$, & le denominateur commun $rd-sc$, aux deux Nombres trouvez $\frac{sdb-sac,\ rad-sdb}{rd-sd}$, sont de differente affection, ils doivent être inégaux : & comme chaque Numerateur $sdb-sac$, $rad-sdb$, doit être de même affection que le denominateur commun $rd-sc$, afinque les deux Nombres trouvez soient affirmez, il est de necessité que si le Plan rd est plus grand que le Plan sc, aussy le Solide sdb soit plus grand que le Solide sac, & moindre que le Solide rad. C'est pourquoy en divisant par sd, on aura $b \oplus \frac{ac}{d}$, & $b \ominus \frac{ar}{s}$.

Pareillement si le Plan rd est moindre que le Plan sc, aussy le Solide sdb sera moindre que le Solide sac, & plus grand que le Solide rad : c'est pourquoy en divisant par sd, on aura $b \ominus \frac{ac}{d}$, & $b \oplus \frac{ar}{s}$. Ainsy on void que b doit être entre $\frac{ac}{d}$, & $\frac{ar}{s}$. Ce qui restoit à demontrer.

On peut par le même artifice, comme dit Bachet, trouver plus que de deux Nombres, tels que leur somme soit égale à un Nombre donné, & que la somme de leurs parties données soit aussy égale à un Nombre donné : & pour le faire voir, nous ajouterons icy la Question suivante.

Trouver

Trouuer quatre Nombres, dont la somme soit égale à vn Nombre donné, en sorte que la somme de leurs parties données soit aussy égale à vn Nombre donné.

On propose de trouuer quatre Nombres,

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$
$$\omega.$$

dont la somme $x+y+z+\omega$ soit égale au Nombre donné $100 \sim a$, en sorte que la partie donnée $\frac{1}{2} \sim \frac{r}{s}$, du premier x, sauoir $\frac{rx}{s}$, auec la partie donnée $\frac{1}{3} \sim \frac{c}{d}$ du second y, sauoir $\frac{cy}{d}$, & la partie donnée $\frac{1}{4} \sim \frac{m}{n}$ du troisieme z, sauoir $\frac{mz}{n}$, & encore auec la partie donnée $\frac{1}{5} \sim \frac{p}{q}$ du quatrieme ω, sauoir $\frac{p\omega}{q}$, fasse vne somme $\frac{rx}{s}+\frac{cy}{d}+\frac{mz}{n}+\frac{p\omega}{q}$ égale au Nombre donné $27 \sim b$.

Selon les conditions de la Question, on a ces deux Equations,

$$x+y+z+\omega \sim a.$$
$$\frac{rx}{s}+\frac{cy}{d}+\frac{mz}{n}+\frac{p\omega}{q} \sim b.$$

Dans la premiere $x+y+z+\omega \sim a$, on trouuera $\omega \sim a-x-y-z$, & la seconde $\frac{rx}{s}+\frac{cy}{d}+\frac{mz}{n}+\frac{p\omega}{q} \sim b$, se changera en celle-cy, $\frac{rx}{s}+\frac{cy}{d}+\frac{mz}{n}+\frac{ap-px-py-pz}{q} \sim b$, dans laquelle on trouuera le troisieme Nombre $z \sim \frac{bdnqs-adnps+dnpsx-dnqrx+dnpsy-cnqsy}{dmqs-dnps}$, & au lieu de $\omega \sim a-x-y-z$, on aura $\omega \sim \frac{admqs-bdnqs+dnqrx-dmqsx+cnqsy-dmqsy}{dmqs-dnps}$. Ainsy les quatre Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$
$$y.$$
$$\frac{bdnqs-adnps+dnpsx-dnqrx+dnpsy-cnqsy}{dmqs-dnps}.$$
$$\frac{admq-bdnqs+dnqrx-dmqsx+cnqsy-dmqsy}{dmqs-dnps}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \sim 100.$$
$$b \sim 27.$$
$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 3.$$
$$m \sim 1.$$
$$n \sim 4.$$
$$p \sim 1.$$
$$q \sim 5.$$

Si on suppose

$x \backsim 10.$

$y \backsim 24$

Les quatre Nombres seront de cette grandeur;

10.

24.

16.

50.

On void aisément qu'à cause des deux lettres indeterminées x, y, qui demeurent dans la solution, la Question proposée peut receuoir Une infinité de solutions differentes, parceque l'on peut donner aux deux quantitez indeterminées x, y, telle Valeur que l'on Voudra, pouruûque Neanmoins cette Valeur ne soit pas hors des limites que l'on trouue par la determination. Ainsy supposant

$x \backsim 12.$

$y \backsim 18.$

les quatre Nombres seront de cette grandeur,

12.

18.

20.

50.

& en supposant

$x \backsim 10.$

$y \backsim 15.$

les quatre Nombres seront de cette grandeur;

10.

15.

40.

35.

Mais si l'on suppose

$x \backsim 8.$

$y \backsim 27.$

les quatre Nombres seront de cette grandeur;

8.

27.

20.

45.

Que si l'on suppose

$x \backsim 4.$

$y \backsim 36.$

les quatre Nombres seront de cette grandeur

4.

36.

20.

40.

Ainsy des autres.

Il est évident que cette Question n'ayant pas assez de conditions, pour determiner les deux quantitez x, y, qui demeurent dans la Solution, on luy peut ajouter encore quelques conditions, qui determineront ces deux quantitez. Comme si outre les conditions de la Question proposée, on veut que la somme $y+x$ des deux premiers des quatre Nombres qu'on cherche, soit égale au Nombre donné $25 \sim f$, & que leur difference $y-x$ soit égale au Nombre donné $17 \sim g$, on aura ces deux Equations à resoudre,

$$y+x \sim f.$$

$$y-x \sim g.$$

dont la somme & la difference donneront ces deux autres Equations,

$$2y \sim f+g.$$

$$2x \sim f-g.$$

dans lesquelles on trouvera

$$x \sim \tfrac{1}{2}f - \tfrac{1}{2}g.$$

$$y \sim \tfrac{1}{2}f + \tfrac{1}{2}g.$$

ou bien

$$x \sim 4.$$

$$y \sim 21.$$

à cause de

$$f \sim 25.$$

$$g \sim 17.$$

& les quatre Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.

21.

60.

15.

Puisque les deux quantitez x, y, ont été determinées par les deux conditions, qui ont été ajoutées à la Question, il est évident qu'on ne peut plus luy ajouter d'autres conditions, se trouuant toutafait determinées par les quatre conditions qu'elle contient.

Question VI.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit égale à Vn Nombre donné, en sorte que la difference de leurs parties données soit aussy égale à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $100 \sim a$, en sorte que la partie $\frac{1}{4} \sim \frac{r}{s}$, du premier x, sauoir $\frac{rx}{s}$, surpasse la partie donnée $\frac{1}{6} \sim \frac{c}{d}$, du second y, sauoir $\frac{cy}{d}$, d'Vn excez $\frac{rx}{s} - \frac{cy}{d}$, qui soit égal au Nombre donné $20 \sim b$.

Canon. Si on multiplie la somme du Plan sous le second Nombre donné & le denominateur de la seconde partie donnée, & du Plan sous le premier Nombre donné & le Numerateur de la même seconde partie donnée, par le denominateur de la premiere, & qu'on diuise le produit par la somme du Plan sous le Numerateur de la premiere partie donnée & le denominateur de la seconde, & du Plan sous le Numerateur de la seconde partie donnee & le denominateur de la premiere; on aura l'Vn des deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \sim a.$$

$$\frac{rx}{s} - \frac{cy}{d} \sim b.$$

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouuera $y \sim a-x$, & la seconde $\frac{rx}{s} - \frac{cy}{d} \sim b$, se changera en celle-cy, $\frac{rx}{s} - \frac{ca+cx}{d} \sim b$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{acs+bds}{cs+dr}$, & au lieu de $y \sim a-x$, on aura $y \sim \frac{adr-bds}{cs+dr}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{acs+bds,\ adr-bds}{cs+dr}.$$

Parceque Nous auons supposé

$a \sim 100$.

$b \sim 20$.

$c \sim 1$.

$d \sim 6$.

$r \sim 1$.

$s \sim 4$.

les deux Nombres seront de cette grandeur,

88.

12.

Pour resoudre cette Question à la Maniere de Diophante, égalez

la partie donnée $\frac{c}{d}$, du Second Nombre y, sauoir $\frac{cy}{d}$, au Nombre indeterminé z; par cette Equation, $\frac{cy}{d} \sim z$; dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{dz}{c}$, & la seconde Equation precedente $\frac{rx}{s} - \frac{cy}{d} \sim b$, se changera en celle-cy, $\frac{rx}{s} - z \sim b$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{sz+sb}{r}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, *Metode de Diophante.*

$$\frac{sz+sb}{r}.$$
$$\frac{dz}{c}.$$

qui sont conformes à ceux de Diophante,

$$4N+80.$$
$$6N.$$

en supposant

$$z \sim 1N.$$
$$r \sim 1.$$
$$s \sim 4.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 6.$$
$$b \sim 20.$$

& il ne reste plus qu'à égaler leur somme $\frac{sz+sb}{r} + \frac{dz}{c}$, au Nombre donné a, par cette Equation, $\frac{sz+sb}{r} + \frac{dz}{c} \sim a$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{acr-bcs}{cs+dr}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Cette Question soufre aussy une determination, à l'égard des quatre Nombres donnez a, b, r, s, qui est que le second b, doit être moindre que $\frac{ar}{s}$. *Determination.*

Car dans le Numerateur $adr-bds$, du second Nombre trouué $\frac{adr-bds}{cs+dr}$, on connoit que le Solide bds doit être moindre que le Solide adr, c'est pourquoy en diuisant par ds, on aura $b \ominus \frac{ar}{s}$. Ce qu'il faloit demontrer. *Demonstration.*

Nous ajouterons icy les deux Questions suiuantes.

1.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à un Nombre donné, en sorte que la somme de leurs parties données soit aussy égale à un Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $5 \sim a$, en sorte que la partie donnée $\frac{1}{2} \sim \frac{r}{s}$ du premier x, sauoir $\frac{rx}{s}$, auec la partie donnée $\frac{1}{3} \sim \frac{c}{d}$, du second y, sauoir $\frac{cy}{d}$, fasse une somme $\frac{rx}{s} + \frac{cy}{d}$, qui soit égale au Nombre donné $10 \sim b$.

Canon. Si on multiplie la somme du Plan sous le second nombre donné & le denominateur de la seconde partie donnée, & du Plan sous le premier nombre donné & le numerateur sous la même seconde partie donnée, par le denominateur de la premiere, & qu'on divise le produit par la somme du Plan sous le numerateur de la premiere partie donnée & le denominateur de la seconde, & du Plan sous le numerateur de la seconde partie donnée & le denominateur de la premiere; on aura le plus grand des deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \backsim a.$$

$$\frac{rx}{s}+\frac{cy}{d} \backsim b.$$

Dans la premiere $x-y \backsim a$, on trouvera $y \backsim x-a$, & dans la seconde $\frac{rx}{s}+\frac{cy}{d} \backsim b$, on trouvera le même $y \backsim \frac{bds-drx}{cs}$. c'est pourquoy on aura cette Equation, $x-a \backsim \frac{bds-drx}{cs}$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{acs+bds}{cs+dr}$, & au lieu de $y \backsim x-a$, ou de $y \backsim \frac{bds-drx}{cs}$, on aura $y \backsim \frac{bds-adr}{cs+dr}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bds+acs,\ bds-adr}{cs+dr}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \backsim 5.$$
$$b \backsim 10.$$
$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 3.$$
$$r \backsim 1.$$
$$s \backsim 2.$$

les deux nombres seront de cette grandeur,

14.

9.

Determination. La determination de cette Question, est que le second nombre donné b, doit être plus grand que $\frac{ar}{s}$.

Car dans le numerateur $bds-adr$, du second nombre trouvé $\frac{bds-adr}{cs+dr}$, on connoit que le solide bds, doit être plus grand que le solide adr, c'est pourquoy en divisant par ds, on aura $b \oplus \frac{ar}{s}$. Ce qu'il faloit demontrer.

Au lieu de limiter le second nombre donné b, on peut limiter le premier a, en disant qu'il doit être moindre que $\frac{bs}{r}$. Car à cause de $adr \ominus bds$, en divisant par dr, on aura $a \ominus \frac{bs}{r}$.

II.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à Vn Nombre donné, en sorte que la difference de leurs parties données soit aussy égale à Vn Nombre donné.

On demande deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$, soit égale au Nombre donné $5 \backsim a$, en sorte que la difference $\frac{rx}{s} - \frac{cy}{d}$ de leurs parties données $\frac{1}{2} \backsim \frac{r}{s}$, $\frac{1}{3} \backsim \frac{c}{d}$, soit égale au Nombre donné $10 \backsim a$.

Si on multiplie la difference entre le Plan sous le second Nombre donné & le denominateur de la seconde partie donnée, & entre le Plan sous le premier Nombre donné & le Numerateur de la même seconde partie donnée, par le denominateur de la premiere, & qu'on diuise le produit par la difference entre le Plan sous le Numerateur de la premiere partie donnée & le denominateur de la seconde, & entre le Plan sous le Numerateur de la seconde & le denominateur de la premiere; on aura le plus grand des deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \backsim a.$$

$$\frac{rx}{s} - \frac{cy}{d} \backsim b.$$

Dans la premiere $x-y \backsim a$, on trouuera $y \backsim x-a$, & la deuxieme $\frac{rx}{s} - \frac{cy}{d} \backsim b$, se changera en celle-cy, $\frac{rx}{s} - \frac{cx+ca}{d} \backsim b$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{acs-bds}{cs-dr}$, & au lieu de $y \backsim a-x$, on aura $y \backsim \frac{adr-bds}{cs-dr}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{acs-bds, \; adr-bds}{cs-dr}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 5.$$

$$b \backsim 10.$$

$$c \backsim 1.$$

$$d \backsim 3.$$

$$r \backsim 1.$$

$$s \backsim 2.$$

les deux Nombres seront de cette grandeur;

$$50.$$

$$45.$$

La determination de cette Question est la même que celle de la Quest. V. c'est pourquoy Nous n'en parlerons pas dauantage. Determination.

Question VII.

Trouuer un nombre, duquel ôtant separément deux nombres donnez, la raison de deux restes soit égale à celle de deux nombres donnez.

On propose de trouuer un nombre

$$x,$$

duquel ôtant separément le nombre donné $100 \sim a$, & le nombre donné $20 \sim b$, le premier reste $x-a$, soit au second $x-b$, comme le nombre donné $1 \sim c$, au nombre donné $3 \sim d$.

Canon. Si on diuise la difference du Plan sous le premier nombre donné & le second terme de la raison donnée, & du Plan sous le second nombre donné & le premier terme de la raison donnée, par la difference des mêmes termes, on aura le nombre qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$x-a, x-b :: c, d,$$

d'où l'on tire cette Equation, $dx-da \sim cx-cb$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{ad-bc}{d-c}$. Ainsy le nombre qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{ad-bc}{d-c}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \sim 100.$$
$$b \sim 20.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 3.$$

le nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$140.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des quatre nombres donnez a, b, c, d, est que le second nombre donné b, doit être plus grand que $\frac{ad}{c}$, ou moindre que la même fraction $\frac{ad}{c}$.

Demonstration. Car afinque le nombre trouué $\frac{ad-bc}{d-c}$, soit affirmé, il faut que Numerateur $ad-bc$ soit de même affection que le denominateur $d-c$; c'est pourquoy si d est plus grand ou moindre que c, aussy le Plan ad doit être plus grand ou moindre que le Plan bc, & en diuisant par c, on aura $\frac{ad}{c} \oplus b$, ou $\frac{ad}{c} \ominus b$. Ce qu'il faloit demontrer.

On peut dire plus facilement que le nombre donné b peut être tel que l'on voudra, pourueûqu'il ne soit pas égal à la fraction $\frac{ad}{c}$, & qu'il soit moindre que cette fraction, si d est plus grand que c, ou plus grand, si d est moindre que c.

Question

Question VIII.

Trouuer Vn Nombre, auquel ajoutant separément deux Nombres donnez, la raison des deux sommes soit égale à celle de deux Nombres donnez.

On propose de trouuer Vn Nombre

$$x.$$

auquel ajoutant separément le Nombre donné $20 \backsim a$, & le Nombre donné $100 \backsim b$, la premiere somme $x+a$ soit à la seconde $x+b$, comme le Nombre donné $1 \backsim c$, au Nombre donné $3 \backsim d$.

Le Canon & la determination de cette Question sont les mêmes que ceux de la Question precedente.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$x+a,\ x+b :: c,\ d.$$

d'où l'on tire cette Equation $dx+da \backsim cx+cb$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{ad-bc}{d-c}$. Ainsy le Nombre qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{ad-bc}{d-c}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 20.$$
$$b \backsim 100.$$
$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 3.$$

le Nombre qu'on cherche sera de cette grandeur;

$$20.$$

Question IX.

Trouuer Vn Nombre, lequel étant ôté separément de deux Nombres donnez la raison des deux restes soit égale à celle de deux Nombres donnez.

On propose de trouuer Vn Nombre

$$x.$$

lequel étant ôté du Nombre donné $20 \backsim a$, & du Nombre donné $100 \backsim b$, le premier reste $a-x$, soit au second $b-x$, comme le Nombre donné $1 \backsim c$, au Nombre donné $6 \backsim d$.

Le Canon & la determination de cette Question sont les Mêmes que ceux de la Question VII.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$a-x,\ b-x :: c,\ d.$$

d'où l'on tire cette Equation, $da-dx \backsim cb-cx$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{ad-bc}{d-c}$. Ainsy le Nombre qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{ad-bc}{d-c}.$$

Parceque Nous avons supposé

$a \sim 20.$

$b \sim 100.$

$c \sim 1.$

$d \sim 6.$

le Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

4.

Question X.

Trouver un nombre, lequel étant ajouté à un nombre donné, & étant ôté d'un autre Nombre donné, la raison de la somme au reste soit égale à celle de deux Nombres donnez.

On propose de trouver un Nombre

$x.$

lequel étant ajouté au nombre donné $20 \sim a$, & étant ôté du Nombre donné $100 \sim b$, la somme $a+x$ soit au reste $b-x$, comme le Nombre donné $4 \sim c$, au Nombre donné $1 \sim d$.

Canon. Si du Plan sous le second Nombre donné & le premier terme de la raison donnée, on ôte le Plan sous le premier Nombre donné & le second terme de la raison donnée, & qu'on divise le reste par la somme des mêmes termes; on aura le Nombre qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$a+x, \; b-x :: c, \; d.$

d'où l'on tire cette Equation, $da+dx \sim cb-cx$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{bc-ad}{c+d}$. Ainsy le Nombre qu'on cherche, sera tel,

$\frac{bc-ad}{c+d}.$

Parceque Nous avons supposé

$a \sim 20.$

$b \sim 100.$

$c \sim 4.$

$d \sim 1.$

le nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur.

76.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des quatre Nombres donnez a, b, c, d, est que le second b, doit être plus grand que $\frac{ad}{c}$.

Demonstration. Car dans le Numerateur $bc-ad$ du nombre trouvé $\frac{bc-ad}{c+d}$, on a $bc \oplus ad$; c'est pourquoy en divisant par c, on aura $b \oplus \frac{ad}{c}$. Ce qu'il faloit demontrer.

Question XI.

Trouuer vn Nombre, lequel étant augmenté d'vn Nombre donné; & étant diminué d'vn autre Nombre donné, la raison de la somme au reste soit égale à celle de deux Nombres donnez.

On propose de trouuer vn Nombre

x.

lequel étant augmenté du Nombre donné $20 \sim a$, & étant diminué du Nombre donné $100 \sim b$, la somme $x+a$ soit à la difference $x-b$, comme le Nombre donné $3 \sim c$, au Nombre donné $1 \sim d$.

Si on diuise la somme du Plan sous le premier Nombre donné & le second terme de la raison donnée, & du Plan sous le second Nombre donné & le premier terme de la raison donnée, par l'excez du premier terme sur le second, on aura le Nombre qu'on cherche. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$x+a,\ x-b :: c,\ d.$$

d'où l'on tire cette Equation, $dx+da \sim cx-cb$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{ad+bc}{c-d}$. Ainsy le Nombre qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{ad+bc}{c-d}.$$

Parceque nous auons supposé

$a \sim 20.$

$b \sim 100.$

$c \sim 3.$

$d \sim 1.$

le Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur;

160.

Il manque icy la Question suiuante.

Trouuer vn nombre, lequel étant diminué d'vn Nombre donné, & étant ôté d'vn autre Nombre donné, la raison des deux restes soit égale à celle des deux Nombres donnez.

On propose de trouuer vn nombre

x,

lequel étant diminué du Nombre donné $40 \sim a$, & étant ôté du Nombre donné $70 \sim b$, le premier reste $x-a$, soit au second $b-x$, comme le Nombre donné $c \sim 2$, au Nombre donné $d \sim 1$.

Si on diuise la somme du Plan sous le premier Nombre donné & le second terme de la raison donnée, & du Plan sous le second Nombre Canon.

donné & le premier terme de la raison donnée; par la somme des mêmes termes; on aura le Nombre qu'on cherche.

Selon la Condition de la Question, on aura cette analogie,

$$x-a, b-x :: c, d.$$

d'où l'on tire cette Equation, $dx-da \sim cb-cx$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{ad+bc}{c+d}$. Ainsy le Nombre qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{ad+bc}{c+d}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 40.$$
$$b \sim 70.$$
$$c \sim 2.$$
$$d \sim 1.$$

le Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur;

$$60.$$

Question XII.

Trouuer deux paires de Nombres, en sorte que chaque paire soit égal à Vn même Nombre donné, & que chaque Nombre d'Vn paire soit à chaque Nombre de l'autre paire, en raison donnée.

On propose de trouuer deux paires de Nombres,

$$x+y.$$
$$z+\omega.$$

dont chacun soit égal au Nombre donné $100 \sim a$, en sorte que le premier Nombre x du premier paire $x+y$, soit au premier Nombre z du second paire $z+\omega$, comme $2 \sim r$, à $1 \sim s$, & que le second Nombre y du premier paire $x+y$, soit au second Nombre ω du second paire $z+\omega$, comme $1 \sim c$, à $3 \sim d$.

Canon. Si des quatre Plans sous le Nombre donné & chaque terme des deux raisons données, on multiplie les deux premiers par la difference des deux derniers termes, & les deux derniers par la difference des deux premiers, & qu'on diuise chaque Solide par la difference du Plan sous les termes Moyens & du Plan sous les deux autres termes; on aura les deux Nombres de chaque paire, dont le premier sera le premier du premier paire, & le second sera le premier du second paire.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \sim a.$$
$$z+\omega \sim b.$$

& ces deux analogies,

$x, z :: r, s.$

$y, \omega :: c, d.$

Dans la premiere Equation $x+y \sim a$, on trouvera $y \sim a-x$, & dans la seconde $z+\omega \sim a$, on trouvera $\omega \sim a-z$, & les deux analogiès precedentes se changeront en ces deux autres,

$x, z :: r, s.$

$a-x, a-z :: c, d.$

d'où l'on tire ces deux Equations,

$sx \sim rz.$

$da-dx \sim ca-cz.$

Dans la premiere $sx \sim rz$, on trouvera $z \sim \frac{sx}{r}$, & au lieu de $\omega \sim a-z$, on aura $\omega \sim a-\frac{sx}{r}$, & la seconde Equation $da-dx \sim ca-cz$, se changera en celle-cy, $da-dx \sim ca-\frac{csx}{r}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{adr-acr}{dr-cs}$, & au lieu de $y \sim a-x$, on aura $y \sim \frac{acr-acs}{dr-cs}$, & au lieu de $z \sim \frac{sx}{r}$, on aura $z \sim \frac{ads-acs}{dr-cs}$, & enfin au lieu de $\omega \sim a-\frac{sx}{r}$, on aura $\omega \sim \frac{adr-ads}{dr-cs}$. Ainsy les deux paires qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{adr-acr,\ acr-acs}{dr-cs}.$$

$$\frac{ads-acs,\ adr-ads}{dr-cs}.$$

Parceque Nous avons supposé

$a \sim 100.$

$r \sim 2.$

$s \sim 1.$

$c \sim 1.$

$d \sim 3.$

les deux paires qu'on cherche, seront de cette grandeur,

80, 20.

40, 60.

La determination de cette Question à l'égard des deux raisons données, est qu'elles Ne peuvent pas être égales entre elles, & que l'une des deux mêmes raisons Ne peut pas être Une raison d'égalité. c'est à dire que la fraction $\frac{r}{s}$ Ne peut pas être égale à la fraction $\frac{c}{d}$, Ny r à s. *Determination.*

Pour demontrer la premiere partie, sauoir que les deux raisons données $\frac{r}{s}$, $\frac{c}{d}$, Ne peuuent pas être égales entre elles, on considerera que dans le denominateur commun $dr-cs$, on a $dr \oplus cs$. c'est pourquoy en diuisant par ds, on aura $\frac{r}{s} \oplus \frac{c}{d}$. D'où il est aisé de conclurre que la raison $\frac{r}{s}$ Ne peut pas être égale à la raison $\frac{c}{d}$. Ce qu'il faloit demontrer. *Demonstration.*

Pour demontrer la seconde partie, savoir que l'une des deux raisons données, comme par exemple $\frac{r}{s}$, ne peut pas être une raison d'égalité, c'est à dire que le nombre r ne peut pas être égal au nombre s, on considerera que dans le numerateur $acr-acs$, du second nombre du premier paire, on a $acr \oplus acs$: c'est pourquoy en divisant par ac, on aura $r \oplus s$. D'où l'on conclud aisément que r, ne peut pas être égal à s. Ce qui restoit à demontrer.

Question XIII.

Trouver trois paires de nombres, dont chacun soit égal à un même nombre donné, en sorte que la raison de l'un des deux nombres du premier paire à l'un des deux du second, & la raison de l'autre nombre du second paire à l'un du troisieme, & encore la raison de l'autre nombre du premier paire à l'autre du troisieme, soient données.

On propose de trouver trois paires de nombres,

$$x+y.$$
$$z+\omega.$$
$$t+u.$$

dont chacun soit égal au nombre donné $100 \sim a$, en sorte que le premier nombre x du premier paire $x+y$, soit au premier z du second paire $z+\omega$, comme $3 \sim r$, à $1 \sim s$, & que le deuxieme nombre ω du second paire $z+\omega$, soit au premier t, du troisieme paire $t+u$, comme $2 \sim c$, à $1 \sim d$, & qu'enfin le second nombre y du premier paire $x+y$, soit au second u du troisieme paire $t+u$, comme $1 \sim m$, à $4 \sim n$.

Canon. Si des six plans sous le nombre donné & chaque terme des trois raisons données, on multiplie les deux premiers par la somme du plan sous le quatrieme & le cinquieme terme & du plan sous le troisieme & le sixieme, diminuée du plan sous le troisieme & le cinquieme, & les deux suivans par la somme du plan sous le second & le cinquieme terme, & du plan sous le premier & le sixieme, diminuée du plan sous le second & le sixieme, & encore les deux suivans par la somme du plan sous le second & le quatrieme terme, & du plan sous le premier & le troisieme, diminuée du plan sous le premier & le quatrieme : & qu'on divise chaque plan-plan par la somme du solide sous le premier le troisieme & le sixieme terme, & du solide sous le second le quatrieme & le cinquieme terme, on aura les deux nombres de chaque paire,

dont le premier sera le premier Nombre du premier paire, le second sera le premier du second paire, & le quatrieme sera le premier du troisieme paire.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$$x+y \backsim a.$$
$$z+\omega \backsim a.$$
$$t+u \backsim a.$$

& ces trois analogies,

$$x, z :: r, s.$$
$$\omega, t :: c, d.$$
$$y, u :: m, n.$$

Dans la premiere Equation $x+y \backsim a$, on trouvera $y \backsim a-x$: & dans la seconde $z+\omega \backsim a$, on trouvera $\omega \backsim a-z$; & enfin dans la troisieme $t+u \backsim a$, on trouvera $u \backsim a-t$, & les trois analogies precedentes se changeront en ces trois autres,

$$x, z :: r, s.$$
$$a-z, t :: c, d.$$
$$a-x, a-t :: m, n.$$

desquelles on tire ces trois Equations,

$$sx \backsim rz.$$
$$da-dz \backsim ct.$$
$$na-nx \backsim ma-mt.$$

Dans la premiere $sx \backsim rz$, on trouvera $z \backsim \frac{sx}{r}$, & dans la troisieme $na-nx \backsim ma-mt$, on trouvera $t \backsim \frac{am-an+nx}{m}$, & la seconde $da-dz \backsim ct$, se changera en celle-cy, $da-\frac{dsx}{r} \backsim \frac{acm-acn+cnx}{m}$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{admr+acnr-acmr}{cnr+dms}$, & au lieu de $z \backsim \frac{sx}{r}$, on aura $z \backsim \frac{adms+acns-acms}{cnr+dms}$, & au lieu de $\omega \backsim a-z$, on aura $\omega \backsim \frac{acnr+acms-acns}{cnr+dms}$, & au lieu de $y \backsim a-x$, on aura $y \backsim \frac{adms+acmr-admr}{cnr+dms}$, & au lieu de $t \backsim \frac{am-an+nx}{m}$, on aura $t \backsim \frac{adms+adnr-adns}{cnr+dms}$, & enfin au lieu de $u \backsim a-t$, on aura $u \backsim \frac{acnr+adns-adnr}{cnr+dms}$. Ainsy les quatre paires qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{admr+acnr-acmr, \; adms+acmr-admr}{cnr+dms}.$$
$$\frac{adms+acns-acms, \; acnr+acms-acns}{cnr+dms}.$$
$$\frac{adms+adnr-adns, \; acnr+adns-adnr}{cnr+dms}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \backsim 100.$$
$$r \backsim 3.$$
$$s \backsim 1.$$
$$c \backsim 2.$$

d ∽ 1.

m ∽ 1.

n ∽ 4.

les trois paires qu'on cherche, seront de cette grandeur;

84, 16.

28. 72.

36. 64.

Determination. La determination de cette Question à l'égard des six nombres donnez r, s, c, d, m, n, est que les trois sommes $\frac{d}{c}+\frac{n}{m}$, $\frac{s}{r}+\frac{c}{d}$, $\frac{r}{s}+\frac{m}{n}$, doivent être chacune plus grande que l'Unité.

Demonstration. Car dans le Numerateur admr+acnr−acmr du premier Nombre trouvé, on a admr+acnr ⊕ acmr: c'est pourquoy en divisant par acmr, on aura $\frac{d}{c}+\frac{m}{n}$ ⊕ 1. On conclura la même chose dans le Numerateur adms+acns−acms, du troisieme Nombre trouvé. Ce qu'il faloit premierement demontrer.

Deplus dans le Numerateur adms+acmr−admr, du second Nombre trouvé, on a adms+acmr ⊕ admr; c'est pourquoy en divisant par admr, on aura $\frac{s}{r}+\frac{c}{d}$ ⊕ 1. On conclura la même chose dans le Numerateur acnr+adns−adnr du sixieme Nombre trouvé. Ce qu'il faloit encore demontrer.

Enfin dans le Numerateur acnr+acms−acns du quatrieme Nombre trouvé, on a acnr+acms ⊕ acns: c'est pourquoy en divisant par acns, on aura $\frac{r}{s}+\frac{m}{n}$ ⊕ 1. On conclura la même chose dans le Numerateur adms+adnr−adns. Ce qui restoit à demontrer.

Question XIV.

Trouver deux nombres, dont la somme soit à leur produit en raison donnée.

Parcequ'il s'agit icy de comparer un nombre simple avec un nombre plan, ce qui est contre la loy des Homogenes, nous concevrons ce Nombre simple comme plan, en le multipliant par l'Unité l, qui ne le changera point, pour observer la loy des Homogenes, ce que nous ferons toujours, quand il faudra comparer ensemble deux grandeurs heterogenes, pour tirer de la solution indefinie de la Question une construction geometrique, quand on voudra, en substituant des lignes à la place des Nombres donnez, comme vous alez voir, aprez avoir resolu en Nombres la Question: en cette sorte.

Qu'il faille donc trouver deux Nombres

x.

y.

dont la somme $lx+ly$ soit à leur produit xy, comme $1 \sim a$, à $3 \sim b$.

Le premier des deux Nombres qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, moyenant la determination que nous luy donnerons sur la fin de la solution ; & pour trouuer le second, diuisez le solide sous ce premier Nombre le second terme de la raison donnée & l'Vnité, par le Plan sous le même premier Nombre & le premier terme de la raison donnée, moins le Plan sous le second terme & l'Vnité. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx+ly,\ xy :: a,\ b.$$

d'où l'on tire cette Equation $lbx+lby \sim axy$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{lbx}{ax-lb}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$

$$\frac{lbx}{ax-lb}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \sim 1.$$

$$b \sim 3.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 12.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

12.

4.

La determination de cette Question ainsy resolue, à l'égard du premier Nombre indeterminé x, & des deux Nombres donnez a, b, est que ce premier Nombre x doit être plus grand que $\frac{lb}{a}$, ou $\frac{b}{a}$. Determination.

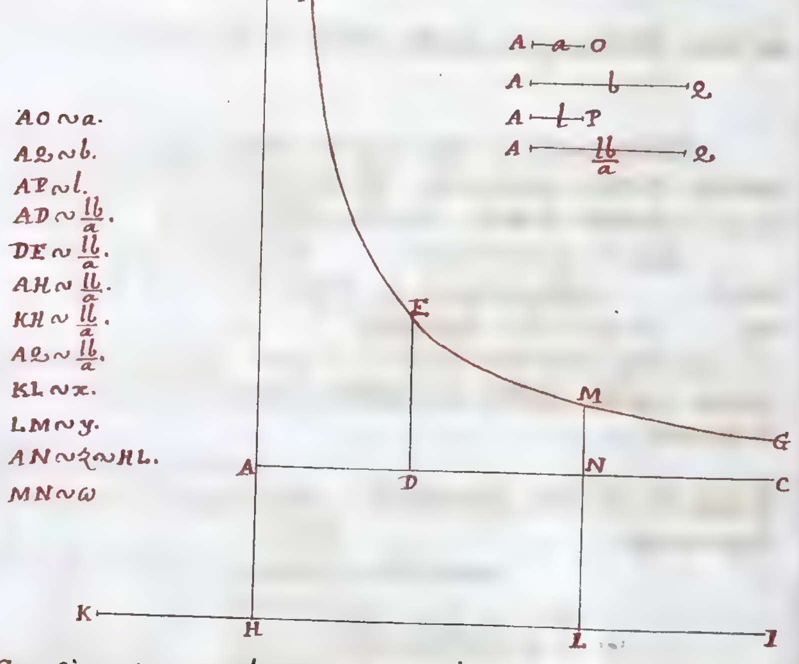
Car dans le denominateur $ax-lb$ du second Nombre trouué $\frac{lbx}{ax-lb}$, on a $ax \oplus lb$: c'est pourquoy en diuisant par a, on aura $x \oplus \frac{lb}{a}$, ou $x \oplus \frac{b}{a}$. Ce qu'il faloit demontrer. Demonstration.

Si au lieu d'attribuer l'Vnité à la lettre l, on luy attribue tel autre Nombre que l'on voudra, la Question sera resolue plus generalement, & on aura trouué deux Nombres, dont le produit sera au produit sous leur somme & vn Nombre donné, en raison donnée : & comme il reste icy vne lettre indeterminée x, cela fait connoitre que cette Question est vn Lieu, geometrique, sauoir vn Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes, comme l'on connoitra par l'Equation precedente $lbx+lby \sim axy$, ou $\frac{lbx}{a} \sim xy - \frac{lby}{a}$, qui apartient à l'Hyperbole entre ses asymptotes, où le Rectangle commun est $\frac{llbb}{aa}$, comme l'on connoit en supposant $x - \frac{lb}{a} \sim z$, ou $x \sim z + \frac{lb}{a}$, pour auoir cet autre Lieu, $\frac{lbz}{a} + \frac{llbb}{aa} \sim yz$, ou $\frac{llbb}{aa} \sim yz - \frac{lbz}{a}$, & en supposant encore $y - \frac{lb}{a} \sim \omega$, pour auoir ce derniere Lieu reduit $\frac{llbb}{aa} \sim z\omega$, dont la construction sera telle.

Construction geometrique.

Pour decrire l'Hyperbole conuenable au Lieu reduit $\frac{llbb}{aa} \backsim z\omega$, mettez au lieu des Nombres donnez a, b, l, ou 1, 3, 1, les lignes AO, AQ, AP, qui soient dans la même proportion, en prenant l'Vnité AP, de telle grandeur qu'il Vous plaira, étant libre de prendre pour l'Vnité telle ligne que l'on Voudra: mais alors la ligne AQ, qui represente le Nombre donné 3, doit comprendre trois semblables Vnitez, & la ligne AO, qui represente l'autre Nombre donné 1, ne doit comprendre qu'vne Vnité, c'est à dire doit être égale à l'Vnité AP.

Cette preparation étant faite, faites à Volonté l'angle BAC, par les lignes indefinies AB, AC, qui seront les asymptotes de l'Hyperbole qu'on Veut decrire: & prenez sur l'Vne de ces asymptotes AB, AC, comme sur AC, la ligne AD $\backsim \frac{lb}{a}$, ou quatrieme proportionnelle aux trois lignes AO, AQ, AP, Tirez par le point D, la droite DE, égale à la droite AD, & parallele à l'autre asymptote AB, & decriuez du centre A, par le point E, entre les asymptotes AB, AC, l'Hyperbole FEG, qui sera celle qu'on cherche, sauoir celle qui conuient au Lieu reduit $\frac{llbb}{aa} \backsim z\omega$, & par consequent à la premiere Equation, $lbx + lby \backsim axy$.



Car si on tire par le point N, pris à discretion au dela du point A, vers C, sur l'asymptote AC, la droite MN, parallele à l'autre asymptote AB, & terminée en M, par l'Hyperbole FEG, & que l'on suppose AN $\backsim$ z,

& $MN \sim \omega$; parceque les deux lignes AD, DE, valent chacune $\frac{ll}{a}$, par la construction, & que leur Rectangle ADE, ou $\frac{llbb}{aa}$, est égal au Rectangle ANM, ou $z\omega$, par la Nature de l'Hyperbole, on aura cette Equation, $\frac{llbb}{aa} \sim z\omega$, qui est la même que le dernier lieu reduit.

Mais pour trouver en lignes les deux Nombres x, y, & premierement le Nombre y, il faut ajouter à la ligne $MN \sim \omega$, la ligne $AD \sim \frac{lb}{a}$, à cause de $y - \frac{lb}{a} \sim \omega$, ou de $y \sim \frac{lb}{a} + \omega$. Pour cette fin, on prolongera l'asymptote AB, en H, en faisant $AH \sim \frac{lb}{a}$, & par le point on tirera à l'autre asymptote AC la parallele indefinie HI, qui rencontrera la ligne MN, prolongée au point L, & donnera $ML \sim y$.

Pour trouver l'autre Nombre x, on doit ajouter à la ligne AN, ou $HL \sim z$, la ligne $AD \sim \frac{lb}{a}$, à cause de $x \sim z + \frac{lb}{a}$, ce qui se fera en prolongeant la ligne HL, en K, & en faisant $HK \sim \frac{lb}{a}$, pour avoir $KL \sim x$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront representez par les deux lignes KL, LM, que l'on peut trouver en une infinité de manieres differentes, en prenant le point L, indefiniment depuis H, vers I; car si le point L, se rencontroit entre K, & H, la ligne $KL \sim x$, se trouveroit moindre que $KH \sim \frac{lb}{a}$, contre sa determination, outre que la droite LM ne rencontreroit pas l'Hyperbole FEG, ce qui empêcheroit d'avoir l'autre Nombre y, qui doit être representé par la ligne LM.

Pour demontrer que les deux Nombres representez par les deux lignes KL, LM, satisfont à la Question, c'est à dire que leur somme $KL + LM$, multipliée par l'Unité AP, sauoir le Rectangle $KLAP + LMAP$, est à leur Rectangle KLM, comme a, est à b, ou comme AO, à AQ, on considerera que par la proprieté de l'Hyperbole, on a cette analogie, AN, AD :: DE, MN, ou AN, AD :: AD, MN; c'est pourquoy en composant on aura celle-cy, $AN + AD$, AD :: $AD + MN$, MN, ou KL, AD :: LM, MN, & en permutant on aura celle-cy, KL, LM :: AD, MN, & en composant on aura celle-cy, KL, $KL + LM$ :: AD, LM, & par consequent cette Egalité, $KLM \sim KLAD + LMAD$. C'est pourquoy on pourra faire cette analogie, $KLAD + LMAD$, ADq :: KLM, ADq, & à cause de la hauteur AD, qui est commune aux deux premiers termes, en la retranchant de chacun, on aura par. 1. 6. cette autre analogie, $KL + LM$, AD :: KLM, ADq, & si on donne aux deux premiers termes la hauteur commune AP, on aura cette autre analogie, $KLAP + LMAP$, ADAP :: KLM, ADq, & en permutant on aura celle-cy, $KLAP + LMAP$, KLM :: ADAP, ADq, & en retranchant des deux derniers termes la hauteur commune AD, on aura celle-cy, $KLAP + LMAP$, KLM :: AP, AD,

Demonstration.

& si à la place des deux derniers termes AP, AD, on met les deux AO, AQ, qui sont en même raison, par la construction, on aura cette derniere analogie, KL, AP + LM, AP, KLM :: AO, AQ. Ce qu'il faloit demontrer.

Autre Solution.

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'Vnité, & pour avoir une solution toutafait indefinie, c'est à dire sans aucune determination, mettez

$$\frac{x,\ y}{z},$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$\frac{x+y}{z},\ \frac{xy}{zz} :: a,\ b.$$

d'où l'on tire cette Equation $\frac{bx+by}{z} \sim \frac{axy}{zz}$, dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{axy}{bx+by}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bxx+bxy,\ byy+bxy}{axy}.$$

Parceque Nous avons supposé

$a \sim 1.$

$b \sim 1.$

si on suppose

$x \sim 1.$

$y \sim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$4\frac{1}{2}.$

$9.$

On tire de cette seconde Solution, le Canon suivant.

Canon.

Si on multiplie separément deux Nombres quelconques par le Plan sous leur somme & le second terme de la raison donnée, & qu'on divise chaque produit par le solide sous les deux mêmes Nombres & le premier terme de la raison donnée; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

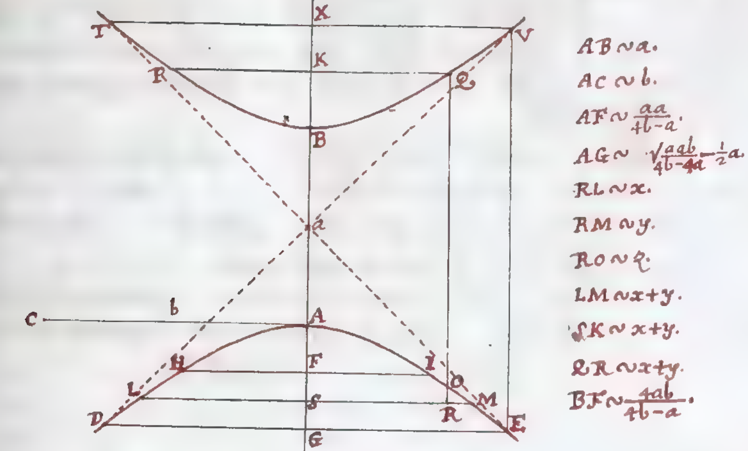
Parcequ'il reste icy les deux quantitez indeterminées x, y, on void que cette seconde Solution est plus generale que la premiere, & que la Question ainsy resolue est un Lieu à la Surface plane, savoir une partie d'une Hyperbole donnée, dont l'axe est égal au premier Nombre donné a, & son Parametre au second Nombre donné b. Cette partie se trouvera en cette sorte.

Construction geometrique.

Ayant decrit l'Hyperbole DAE, dont l'axe AB soit égal au premier Nombre donné a, & le Parametre BC, au second Nombre donné b, prenez sur l'axe AB, prolongé vers A, la ligne AF $\sim \frac{aa}{4b-a}$, & la ligne AG $\sim \sqrt{\frac{aab}{4b-4a}} - \frac{1}{2}a$, & tirez par les poins F, G, à l'axe AB, les ordonnées HFI, DGE, qui termineront la Surface locale DEIH, dans laquelle

on determinera en une infinité de manieres differentes, les trois Nombres indeterminez x, y, z en cette sorte.

Ayant tiré par le point S, pris à discretion entre les deux F, G,



la droite LSM, parallele aux deux DE, HI, & ayant pris sur l'axe AB, prolongé vers B, la ligne SK, égale à l'ordonnée LM, tirez par le point K, à l'axe AB, l'ordonnée PKQ, qui sera terminée aux poins P, Q, par l'Hyperbole opposée TBV; Enfin tirez par le point Q, à l'axe AB, la parallele QOR, qui rencontrera l'Hyperbole DAE, au point O, & l'ordonnée LM, au dedans de l'Hyperbole au point R, & alors les trois Nombres x, y, z seront representez par les trois lignes RL, RM, RO.

Car si l'on suppose Demonstration.

RL ∾ x.

RM ∾ y.

RO ∾ z.

on aura

LM ∾ x+y.

SK ∾ x+y.

QR ∾ x+y.

▭ QRO ∾ xz+yz

▭ LRM ∾ xy.

& parceque le Rectangle QRO ∾ xz+yz est au Rectangle LRM ∾ xy, comme l'axe AB ∾ a, à son Parametre BC ∾ b, par Prop. XIII. de l'Hyperbole de nos Sections Coniques, on aura cette analogie, $xz+yz$, xy :: a, b, & par-consequent cette Equation, $bxz+byz \sim axy$, laquelle étant divisée par zz, on aura celle-cy, $\frac{bx+by}{z} \sim \frac{axy}{zz}$, qui est la même que l'Equation constitutive du Probleme. Ce qu'il faloit demontrer.

La ligne AF, ayant été faite égale à $\frac{aa}{4b-a}$, l'ordonnée HI, devient égale à la ligne FB, ce qui fait que cette ligne HI, ne peut pas servir pour la solution du Probleme, parceque sa longueur étant portée sur l'axe AB, prolongé doit donner un point au dedans de l'Hyperbole opposée TBV, pour y avoir une ordonnée, comme nous avons eu l'ordonnée PQ, qui nous a servy pour trouver le point R, au dedans de l'Hyperbole DAE.

Mais pour demontrer que l'ordonnée HI, est égale à la ligne AF, vaut $\frac{aa}{4b-a}$, & par consequent la ligne BF, $a+\frac{aa}{4b-a}$, ou $\frac{4ab}{4b-a}$, il faut demontre que la ligne HI, est aussy égale à $\frac{4ab}{4b-a}$, ou sa moitié FI à $\frac{2ab}{4b-a}$, ce que nous ferons en cette sorte.

Puisque l'axe AB, est à son Parametre BC, comme le Rectangle BFA, au quarré FI, par la proprieté de l'Hyperbole, & que le Rectangle BFA, vaut $\frac{4a^3b}{16bb-8ab+aa}$, à cause de

$$AF \sim \frac{aa}{4b-a}.$$
$$BF \sim \frac{4ab}{4b-a}.$$

si on suppose

$$FI \sim \omega.$$

on aura cette analogie,

$$a, b :: \frac{4a^3b}{16bb-8ab+aa}, \omega\omega.$$

& par consequent cette Equation,

$$a\omega\omega \sim \frac{4a^3bb}{16bb-8ab+aa}.$$

laquelle étant divisée par a, on aura celle-cy, $\omega\omega \sim \frac{4aabb}{16bb-8ab+aa}$, dont la Racine quarrée donnera $\omega \sim \frac{2ab}{4b-a}$, pour la ligne FI. Ce qu'il faloit demontrer.

La ligne AG, ayant été faite égale à $\sqrt{\frac{aab}{4b-4a}}-\frac{1}{2}a$, si on porte l'ordonnée correspondante DE, depuis G, sur l'axe AB, prolongé en X, & que par ce point X, on tire l'ordonnée TV, cette ordonnée TV, sera égale à l'ordonnée DE. C'est pourquoy la parallele que l'on tireroit du point V, ne pourroit pas donner le point R, au dedans de l'Hyperbole sur l'ordonnée correspondante DE, parrequ'elle rencontreroit cette ordonnée DE, au point E, de l'Hyperbole, ce qui rendroit le nombre z, que la ligne RO, represente, égal à 0. Ainsy on void que l'ordonnée DE, est trop éloignée du sommet A, comme l'ordonnée HI, en est trop proche, pour pouvoir servir à la solution du Probleme, & que par consequent le Lieu qui resoud ~~le Probleme~~ la Question, se trouve terminé dans l'espace DEIH.

Pour demontrer que les ordonnées DE, TV, sont égales, lorsque la ligne AG vaut $\sqrt{\frac{aab}{4b-4a}}-\frac{1}{2}a$, & que l'ordonnée DE, est égale à la ligne

GX, & considerera que puisque l'on a

$$AG \sim \sqrt{\frac{aab}{4b-4a}} - \frac{1}{2}a.$$

$$AB \sim a.$$

on aura

$$BG \sim \sqrt{\frac{aab}{4b-4a}} + \frac{1}{2}a.$$

$$\square\, BGA \sim \frac{a^3}{4b-4a}.$$

& parceque le diametre AB, est à son Parametre BG comme le Rectangle BGA, au quarré GE, par la Nature de l'Hyperbole, si on suppose

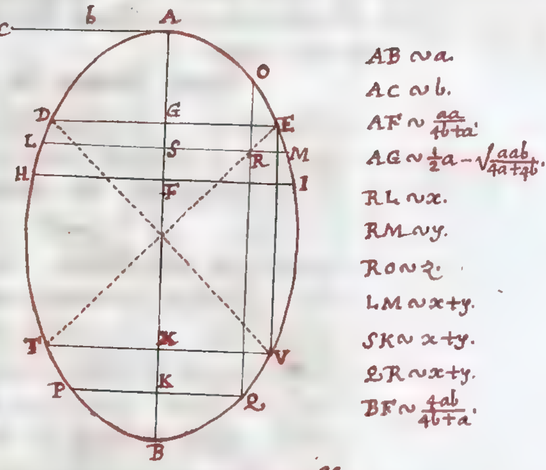
$$GE \sim \omega.$$

on aura cette analogie,

$$a, b :: \frac{a^3}{4b-4a}, \omega\omega.$$

& par consequent cette Equation, $a\omega\omega \sim \frac{a^3 b}{4b-4a}$, laquelle étant diuisée par a, on aura celle-cy, $\omega\omega \sim \frac{aab}{4b-4a}$, dont la Racine quarrée donne celle-cy, $\omega \sim \sqrt{\frac{aab}{4b-4a}}$, pour la demiordonnée GE, c'est pourquoy son double DE, ou GX, vaudra $\sqrt{\frac{aab}{b-a}}$, de laquelle ôtant $BG \sim \sqrt{\frac{aab}{4b-4a}} + \frac{1}{2}a$, il restera $BX \sim \sqrt{\frac{aab}{4b-4a}} - \frac{1}{2}a$: & comme AG vaut aussy $\sqrt{\frac{aab}{4b-4a}} - \frac{1}{2}a$, il s'ensuit que ces deux lignes AG, BX, sont égales, & par consequent les deux DE, TV. Ce quil faloit demontrer.

Au lieu d'vne partie d'Hyperbole, on peut aussy auoir vne partie d'vne Ellipse, que l'on trouuera comme auparauant, excepté qu'on doit faire



$AB \sim a.$

$AC \sim b.$

$AF \sim \frac{aa}{4b+a}.$

$AG \sim \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{aab}{4a+4b}}.$

$RL \sim x.$

$RM \sim y.$

$RO \sim z.$

$LM \sim x+y.$

$SK \sim x+y.$

$QR \sim x+y.$

$BF \sim \frac{4ab}{4b+a}.$

$$AF \sim \frac{aa}{4b+a}.$$

$$AG \sim \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{aab}{4b+4a}}.$$

Mais on trouuera aisément la ligne $AG \sim \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{aab}{4b+4a}}$, c'est à dire le point G, tant dans l'Hyperbole que dans l'Ellipse, en faisant au centre vn angle demidroit de part & d'autre, pour auoir les quatre poins D, E, T, V. &c

Au lieu d'vn axe, on peut auoir vn autre diametre tel que l'on voudra, tant dans l'Ellipse que dans l'Hyperbole, pourueque ses ordonnées soient paralleles à son diametre conjugué, & que ce diametre soit à son Parametre comme le premier Nombre donné a, au second Nombre donné b.

Si les deux termes de la raison donnée sont égaux, en sorte qu'on veuille trouuer deux Nombres, dont la somme soit égale à leur produit, l'analogie precedente, $\frac{x+y}{z}, \frac{xy}{zz} :: a, b$, se changera en cette Equation, $\frac{x+y}{z} \backsim \frac{xy}{zz}$, ou $xz+yz \backsim xy$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{xy}{x+y}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{xx+xy,\ yy+xy}{xy}.$$

que l'on auroit aussy trouuée en retranchant de la solution precedente indefinie, $\frac{bxx+bxy,\ byy+bxy}{axy}$, les deux quantitez égales a, b.

Si l'on suppose

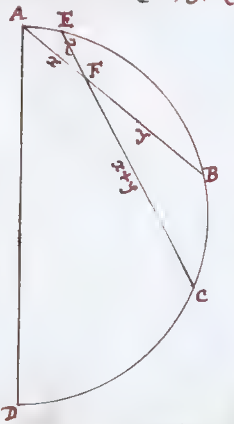
$$x \backsim 1.$$
$$y \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$1\tfrac{1}{2}.$$
$$3.$$

Dans ce cas, la surface Locale sera vn demicercle tel que l'on voudra, dans lequel on determinera en lignes les trois Nombres indeterminez x, y, z, en cette sorte.

Construction geometrique.



Ayant decrit alentour du diametre indeterminé AD, le demicercle ADCBE, apliquez à volonté dans ce demicercle depuis l'extremité A, du diametre AD, la droite AB, & du point F, pris à discretion sur cette droite AB, decriuez auec vne ouuerture du compas égale à cette même ligne AB, vn arc de cercle, qui donnera sur la circonference du demicercle le point C, par lequel & par le point F, vous menerez la droite CF, que vous prolongerez jusqu'à la circonference du demicercle en E, & les trois lignes FA, FB, FE, representeront les trois Nombres indeterminez x, y, z, de sorte que la somme $\frac{x+y}{z}$, des deux Nombres $\frac{x,\ y}{z}$, sera égale selon cette construction, à leur produit $\frac{xy}{zz}$.

Car si l'on suppose

AF $\backsim x$,

$AF \sim x.$ Demonstration.

$BF \sim y.$

$EF \sim z.$

on aura

$AB \sim x+y.$

$CF \sim x+y.$

$\square\, AFB \sim xy.$

$\square\, CFE \sim xz+yz.$

& parceque le Rectangle $CFE \sim xz+yz$ est égal au Rectangle $AFB \sim xy$, par la proprieté du cercle, on aura cette Equation, $xz+yz \sim xy$, laquelle étant diuisée par zz, on aura celle-cy, $\frac{x+y}{z} \sim \frac{xy}{zz}$. Ce qu'il faloit demontrer.

On tire de la Solution indefinie precedente, le Canon suiuant.

Si par le produit de deux Nombres quelconques on diuise separément le Plan sous leur somme & chacun des deux Nombres, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Les Questions qui manquent icy, se trouueront au Liure II.

Question XV.

Trouuer deux Nombres, tels que si chacun emprunte de l'autre un nombre donné, la somme soit au reste en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

en sorte que si le premier x, emprunte du second y, le Nombre donné $30 \sim a$, la somme $x+a$ soit au reste $y-a$, comme $2 \sim r$, à $1 \sim s$, & que si le second y, emprunte du premier x, le Nombre donné $50 \sim b$, la somme $y+b$ soit au reste $x-b$, comme $3 \sim c$, à $1 \sim d$.

Si on ajoute au Solide sous le premier Nombre donné, le dernier terme des deux raisons données, & la somme des deux premiers, le Solide sous le second Nombre donné, le premier terme des deux raisons données, & la somme des deux derniers: & que pareillement on ajoute au Solide sous le premier Nombre donné, le troisieme terme des deux raisons données, & la somme des deux premiers, le Solide sous le second Nombre donné, le second terme des deux raisons données, & la somme des deux derniers, & qu'on diuise chaque somme par le Plan des deux termes antecedens, moins le Plan des deux termes consequens des deux raisons données; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on a ces deux analogies,

$$x+a,\ y-a :: r,\ s.$$

$$y+b,\ x-b :: c,\ \partial.$$

d'où l'on tire ces deux Equations,

$$sx+sa \backsim ry-ra.$$

$$\partial y+\partial b \backsim cx-cb.$$

Dans la premiere $sx+sa \backsim ry-ra$, on trouuera $y \backsim \frac{sx+ar+as}{r}$, & dans la seconde $\partial y+\partial b \backsim cx-cb$, on trouuera le même $y \backsim \frac{cx-bc-b\partial}{\partial}$; c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{sx+ar+as}{r} \backsim \frac{cx-bc-b\partial}{\partial}$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{a\partial r+a\partial s+bcr+b\partial r}{cr-\partial s}$, & au lieu de $y \backsim \frac{sx+ar+as}{r}$, ou de $y \backsim \frac{cx-bc-b\partial}{\partial}$, on aura $y \backsim \frac{acr+acs+bcs+b\partial s}{cr-\partial s}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a\partial r+a\partial s+bcr+b\partial r,\ acr+acs+bcs+b\partial s}{cr-\partial s}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 30.$$

$$b \backsim 50.$$

$$r \backsim 2.$$

$$s \backsim 1.$$

$$c \backsim 3.$$

$$\partial \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

98.

94.

Determination. La determination de cette Question à l'egard des deux raisons données $\frac{r}{s}$, $\frac{c}{\partial}$, est que le Plan sous les antecedens, sauoir cr, doit être plus grand que le Plan ∂s, des deux consequens, à cause du denominateur commun $cr-\partial s$.

Il y a une autre determination considerable à faire touchant les deux mêmes raisons données $\frac{r}{s}$, $\frac{c}{\partial}$, qui est qu'elles ne peuuent pas être chacune une raison d'égalité, parceque dans ce cas, les deux analogies precedentes,

$$x+a,\ y-a :: r,\ s.$$

$$y+b,\ x-b :: c,\ \partial.$$

se changeroient en ces deux Equations,

$$x+a \backsim y-a.$$

$$y+b \backsim x-b.$$

& que dans la premiere $x+a \backsim y-a$, on trouueroit $y \backsim x-2a$, & qu'ainsy la seconde $y+b \backsim x-b$, se changeroit en celle-cy, $x-2a+b \backsim x-b$, qui est impossible.

Mais l'Une des deux raisons données $\frac{r}{s}$, $\frac{c}{d}$, comme par exemple la premiere $\frac{r}{s}$, peut bien être Une raison d'égalité, en sorte que les deux Nombres r, s, soient égaux, comme si on Veut trouuer deux Nombres, tels que si le premier emprunte Un Nombre donné du second, la somme soit égale au reste: & que si le second emprunte Un Nombre donné du premier, la somme soit au reste en raison donnée. Dans ce cas les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront tels,

$$\frac{2ad+bc+bd,\ 2ac+bc+bd}{c-d}.$$

Parceque Nous auons supposé

a ∾ 30.
b ∾ 50.
c ∾ 3.
d ∾ 1.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

130.
190.

On tire de cette solution indefinie le canon suiuant;

Si on Multiplie le double du second Nombre donné par chaque terme de la raison donnée, pour ajouter à chaque produit le Plan sous le second Nombre donné & la somme des termes de la raison donnée, & qu'on diuise chaque somme par la difference des Mêmes termes; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Les deux raisons données $\frac{r}{s}$, $\frac{c}{d}$, peuuent aussy être égales entre elles, en sorte qu'on ayt

r ∾ c.
s ∾ d.

comme si on Veut trouuer deux Nombres, tels que si le premier emprunte Un Nombre donné du second, la somme soit au reste en raison donnée, & que si le second emprunte Un Nombre donné du premier, la somme soit au reste dans la Même raison donnée. Dans ce cas les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ad+bc,\ ac+bd}{c-d}.$$

Parceque Nous auons supposé

a ∾ 30.
b ∾ 50.
c ∾ 3.
d ∾ 1.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

90.

70.

On tire de cette solution indefinie, le canon suivant.

Canon. Si au Plan sous le premier Nombre donné & le second terme de la raison donnée, on ajoute le Plan sous le second Nombre donné & le premier terme: & que pareillement au Plan sous le premier Nombre donné & le premier terme de la raison donnée, on ajoute le Plan sous le second Nombre donné & le second terme, & qu'on divise chaque somme par la difference des mêmes termes; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Enfin les deux Nombres donnez a, b, peuvent aussy égaux entre eux, comme si on veut trouver deux Nombres, tels que si chacun emprunte de l'autre un même nombre donné, la somme soit au reste en raison donnée. Dans ce cas les deux Nombres qu'on cherche, se trouveront tels,

$$\frac{2adr + acr + ads,\ 2acs + acr + ads}{cr - ds}.$$

Parceque nous avons supposé

$a \backsim 30.$

$r \backsim 2.$

$s \backsim 1.$

$c \backsim 3.$

$d \backsim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

66.

78.

On tire de cette solution indefinie, le canon suivant.

Canon. Si à chaque Solide sous le double du Nombre donné, l'antecedent d'une raison donnée, & le consequent de l'autre, on ajoute le Solide sous le Nombre donné & les deux consequens, & le Solide sous le même Nombre donné & les deux antecedens, & qu'on divise chaque somme par l'excez du Plan sous les deux antecedens sur le Plan des deux consequens; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Mais on ne peut pas faire qu'outre les deux Nombres donnez égaux, l'une des deux raisons données soit une raison d'égalité, parceque dans ce cas les deux Nombres qu'on cherche, deviendroient égaux entre eux. Il y a d'autres remarques à faire sur cette Question, que l'on connoitra aisément à l'imitation des precedentes. c'est pourquoy sans nous y arrêter davantage, nous ajouterons icy les Questions suivantes.

I.

Trouver deux Nombres en raison donnée, de sorte que si le premier emprunte un Nombre donné du second, la somme soit au reste en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que le premier x soit au second y, comme $2 \sim a$, à $3 \sim b$, & que si le premier x emprunte du second y, le Nombre donné $60 \sim c$, la somme $x+c$, soit au reste $y-c$, comme $16 \sim r$, à $9 \sim s$.

Si on multiplie le Plan sous le Nombre donné & chacun des deux termes de la premiere raison donnée, chacun par la somme des termes de la seconde raison donnée, & qu'on divise chaque produit par l'excez du Plan sous le consequent de la premiere raison donnée & l'antecedent de la seconde, sur le Plan sous l'antecedent de la premiere raison donnée & le consequent de la seconde; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$x, y :: a, b.$$

$$x+c, y-c :: r, s.$$

d'où l'on tire ces deux Equations,

$$bx \sim ay.$$

$$sx+sc \sim ry-rc.$$

Dans la premiere $bx \sim ay$, on trouvera $y \sim \frac{bx}{a}$, & la seconde $sx+sc \sim ry-rc$, se changera en celle-cy, $sx+sc \sim \frac{brx}{a} - cr$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{acr+acs}{br-as}$, & au lieu de $y \sim \frac{bx}{a}$, on aura $y \sim \frac{bcr+bcs}{br-as}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{acr+acs,\ bcr+bcs}{br-as}.$$

Parceque nous avons supposé

$a \sim 2$.

$b \sim 3$.

$c \sim 60$.

$r \sim 16$.

$s \sim 9$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

100.

150.

La determination de cette Question, à l'égard des deux raisons données $\frac{r}{s}$, $\frac{a}{b}$, est que le Plan br doit être plus grand que le Plan as, Determination.

à cause du denominateur commun $br-as$.

D'où il suit que les deux raisons données $\frac{a}{b}$, $\frac{r}{s}$, ne peuvent pas être égales entre elles, parceque dans ce cas le Plan br deviendroit égal au Plan as, ce qui arriveroit aussy, si chacune étoit une raison d'égalité. D'où l'on conclud aussy que les deux raisons données ne peuvent pas être chacune une raison d'égalité, ny même la premiere $\frac{a}{b}$, parceque dans ce cas les deux nombres qu'on cherche, seroient égaux, ce que l'on ne suppose jamais.

Mais la seconde raison donnée $\frac{r}{s}$ peut bien être une raison d'égalité, c'est à dire que les deux nombres r, s, peuvent bien être être égaux entre eux. Comme si on veut trouver deux nombres en raison donnée, en sorte que si le premier emprunte un nombre donné du second, la somme soit égale au reste: & alors les deux nombres qu'on cherche, se trouveront tels,

$$\frac{2ac,\ 2bc}{b-a}.$$

Parceque nous avons supposé

$a \sim 2.$

$b \sim 3.$

$c \sim 60.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

240.

360.

On tire de cette solution indefinie, le Canon suivant.

Si on multiplie chacun des deux termes de la raison donnée par le double du nombre donné, & qu'on divise chaque produit par la difference des mêmes termes; on aura les deux nombres qu'on cherche.

II.

Trouver deux nombres, dont la somme soit égale à un nombre donné, en sorte que si le premier emprunte du second un nombre donné, la raison de la somme au reste soit égale à celle de deux nombres donnez.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit égale au nombre donné $300 \sim a$, en sorte que si le premier x emprunte du second y, le nombre donné $60 \sim b$, la somme $x+b$, soit au reste $y-b$, comme $3 \sim c$, à $2 \sim b$.

Canon. Si on ôte le second nombre donné du quotient qui viendra en divisant le Plan sous le premier nombre donné & l'antecedent

de la raison donnée par la somme de l'antecedent & du consequent, & qu'on l'ajoute au quotient qui viendra en divisant le Plan sous le même premier Nombre donné & le consequent de la raison donnée par la même somme de l'antecedent & du consequent, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$$x + y \sim a.$$

& cette analogie,

$$x+b,\ y-b :: c,\ d.$$

Dans l'Equation precedente $x+y \sim a$, on trouvera $y \sim a-x$, & l'analogie precedente $x+b,\ y-b :: c,\ d$, se changera en celle-cy, $x+b,\ a-b-x :: c,\ d$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{ac-bc-bd}{c+d}$, & au lieu de $y \sim a-x$, on aura $y \sim \frac{ad+bc+bd}{c+d}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ac-bc-bd,\ ad+bc+bd}{c+d}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 300.$$
$$b \sim 60.$$
$$c \sim 3.$$
$$d \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

120.

180.

La determination de cette Question, à l'égard des quatre Nombres donnez a, b, c, d, est que le second b, doit être moindre que $\frac{ac}{c+d}$. Determination.

Car dans le Numerateur du premier Nombre trouvé, $ac-bc-bd$, on a $bc+bd \ominus ac$, c'est pourquoy en divisant par $c+d$, on aura $b \ominus \frac{ac}{c+d}$. Ce qu'il faloit demontrer. Demonstration.

Si la raison donnée $\frac{c}{d}$ est une raison d'égalité, en sorte qu'on ayt $c \sim d$: comme si on veut trouver deux Nombres, dont la somme soit donnée, & tels que si le premier emprunte du second un Nombre donné, la somme soit égale au reste. Dans ce cas les deux Nombres qu'on cherche, se trouveront de cette grandeur,

$$\tfrac{1}{2}a - b.$$
$$\tfrac{1}{2}a + b.$$

où l'on void que des deux Nombres donnez a, b, le second doit etre moindre que la moitié du premier, à cause du premier Nombre trouvé $\frac{1}{2}a - b$.

Parceque nous avons supposé

$$a \backsim 300$$

$$b \backsim 60.$$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$90.$$

$$210.$$

On tire de cette solution indefinie, le canon suivant.

Canon. Si on ôte, & qu'on ajoute le second Nombre donné de la Moitié du premier, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

III.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à Un Nombre donné, en sorte que si le plus grand emprunte du plus petit Un Nombre donné, la raison de la somme au reste soit égale à celle de deux Nombres donnez.

On propose de trouuer deux nombres.

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $30 \backsim a$, en sorte que si le plus grand x, emprunte du plus petit y, le Nombre donné $60 \backsim b$, la somme $x+b$, soit au reste $y-b$, comme $7 \backsim c$, à $2 \backsim d$.

Canon. Si à chaque Plan sous le premier Nombre donné & chaque terme de la raison donnée, on ajoute le Plan sous le second Nombre donné & la somme des termes de la raison donnée, & qu'on diuise chaque somme par la difference des Mêmes termes; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$$x-y \backsim a.$$

& cette analogie, $x+b,\ y-b :: c,\ d.$

Dans l'Equation precedente $x-y \backsim a$, on trouuera $x \backsim a+y$, & l'analogie precedente $x+b,\ y-b :: c,\ d$, se changera en celle-cy, $y+a+b,\ y-b :: c,\ d$, d'où l'on tirera cette Equation $dy+ad+bd \backsim cy-bc$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{ad+bc+bd}{c-d}$, & au lieu de $x \backsim a+y$, on aura $x \backsim \frac{ac+bc+bd}{c-d}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ac+bc+bd,\ ad+bc+bd}{c-d}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 30.$$

$$b \backsim 60.$$

$$c \backsim 7.$$

$$d \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

150

150.

120.

La determination de cette Question, à l'égard de la raison donnée $\frac{c}{d}$, est que l'antecedent c, doit être plus grand que le consequent d, à cause du denominateur commun $c-d$. D'où il suit que la raison donnée $\frac{c}{d}$, ne peut pas être une raison d'égalité. Determination.

Mais les deux Nombres donnez a, b, peuvent bien être égaux entre eux: comme si on veut trouver deux Nombres, dont la difference soit égale à un Nombre donné, & tels que si le plus grand emprunte du plus petit un Nombre égal à leur difference, la somme soit au reste en raison donnée. Dans ce cas les deux Nombres qu'on cherche, se trouveront tels,

$$\frac{ad+2ac,\ ac+2ad}{c-d}.$$

Parceque nous avons supposé

$a \sim 30.$

$c \sim 7.$

$d \sim 2.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

96.

66.

On tire de cette solution indefinie, le canon suivant;

Si par le Nombre donné on multiplie la somme du même Nombre donné & du double antecedent de la raison donnée, & la somme du même Nombre donné & du double consequent de la raison donnée, & qu'on divise chaque produit par la difference de l'antecedent & du consequent; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

IV.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit égale à un Nombre donné, en sorte que si le plus petit emprunte du plus grand un Nombre donné, la somme soit au reste en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $20 \sim a$, en sorte que si le plus petit y emprunte du plus grand x, le Nombre donné $60 \sim b$, la somme $y+b$, soit au reste $x-b$, comme $2 \sim c$, à $1 \sim d$.

Si du Plan sous le second Nombre donné & la somme des deux termes de la raison donnée, on ôte separément le Plan sous les Canon.

premier Nombre donné & chaque terme de la raison donnée, & qu'on divise chaque produit par la difference des mêmes termes; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$$x-y \sim a.$$

& cette analogie,

$$y+b,\ x-b :: c,\ d.$$

Dans l'Equation precedente, $x-y \sim a$, on trouvera $x \sim a+y$, & l'analogie precedente $y+b,\ x-b :: c,\ d$, se changera en celle-cy, $y+b,\ a-b+y :: c,\ d$, d'où l'on tirera cette Equation, $dy+bd \sim ac-bc+cy$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{bc+bd-ac}{c-d}$, & au lieu de $x \sim a+y$, on aura $x \sim \frac{bc+bd-ad}{c-d}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bc+bd-ad,\ bc+bd-ac}{c-d}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 20.$$
$$b \sim 60.$$
$$c \sim 2.$$
$$d \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

160.

140.

Determination. La determination de cette Question, touchant la raison donnée $\frac{c}{d}$, est qu'elle ne peut pas être une raison d'égalité, à cause du denominateur commun $c-d$, & que l'antecedent c, doit être plus grand que le consequent d, afinque le premier Nombre trouvé $\frac{bc+bd-ad}{c-d}$, soit le plus grand, tel qu'il a été supposé dans l'analyse: & dans ce cas on trouvera $b \oplus \frac{ac}{c+d}$, à cause du Numerateur $bc+bd-ac$, du second Nombre trouvé $\frac{bc+bd-ac}{c-d}$, où l'on a $bc+bd \oplus ac$, &c.

Mais les deux Nombres donnez a, b, peuvent bien être égaux entre eux: comme si on veut trouver deux Nombres, dont la difference soit donnée, & tels que si le plus petit emprunte du plus grand un Nombre égal à leur difference, la somme soit au reste en raison donnée. Dans ce cas les deux Nombres qu'on cherche seront tels,

$$\frac{ac,\ ad}{c-d}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 20.$$
$$c \sim 2.$$
$$d \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

40.

20.

dont la raison est toujours égale à la raison donnée $\frac{c}{d}$.

On tire de cette solution indefinie, le Canon suivant.

Si on multiplie les deux termes de la raison donnée, chacun par le Nombre donné, & qu'on divise chaque produit par la difference des termes; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

V.

Trouver deux Nombres, tels que si le premier emprunte du second un Nombre donné, & le second du premier une partie donnée du même premier; la somme soit au reste en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que si le premier x emprunte du second y, le Nombre donné $40 \sim a$, la somme $x+a$ soit au reste $y-a$, comme $3 \sim b$, à $2 \sim c$, & que si le second y emprunte du premier x, la partie donnée $\frac{1}{5} \sim \frac{r}{s}$ du même premier x, savoir $\frac{rx}{s}$, la somme $y+\frac{rx}{s}$, soit au reste $x-\frac{rx}{s}$, comme $47 \sim m$, à $28 \sim n$.

Si du Solide sous la difference des deux termes de la seconde raison donnée & le Plan sous les termes antecedens de la premiere & de la troisieme, on ôte le Solide sous le consequent de la troisieme & la somme du Plan sous les antecedens & du Plan sous les consequens des deux premieres; & que par le reste on divise le Plan-plan sous la somme des deux termes de la premiere & le solide sous le Nombre donné & les deux consequens des deux dernieres; on aura le premier des deux Nombres qu'on cherche. Que si par l'antecedent de la premiere raison donnée on divise le Plan sous le consequent de la même raison, & la somme du Nombre donné & du premier Nombre trouvé, & qu'on ajoute le quotient au Nombre donné; on aura le second des deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$x+a, y-a :: b, c.$$

$$y+\frac{rx}{s}, x-\frac{rx}{s} :: m, n.$$

d'où l'on tire ces deux Equations,

$$cx+ac \sim by-ab.$$

$$ny+\frac{nrx}{s} \sim mx-\frac{mrx}{s}.$$

Dans la premiere $cx+ac \sim by-ab$, on trouvera $y \sim \frac{ab+ac+cx}{b}$, & la seconde $ny+\frac{nrx}{s} \sim mx-\frac{mrx}{s}$, se changera en celle-cy, $an+\frac{acn+cnx}{b}+\frac{nrx}{s} \sim$

$mr - \frac{mrx}{s}$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{abns+acns}{bms-bmr-bnr-cns}$, & au lieu de $y \backsim \frac{ab+ac+cx}{b}$, on aura $y \backsim \frac{abms+acms-abmr-abnr-acmr-acnr}{bms-bmr-bnr-cns}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abns+acns,\ abms+acms-abmr-abnr-acmr-acnr}{bms-bmr-bnr-cns}.$$

Parceque Nous auons supposé

$a \backsim 40.$

$b \backsim 3.$

$c \backsim 2.$

$r \backsim 1.$

$s \backsim 5.$

$m \backsim 47.$

$n \backsim 28.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

140.

160.

Determination.

La determination de cette Question, est qu'à cause de $s \oplus r$, le nombre m, doit être plus grand que $\frac{bnr+cns}{bs-br}$; à cause du denominateur commun $bms-bmr-bnr-cns$, où l'on a $bms-bmr \oplus bnr+cns$, & par consequent $m \oplus \frac{bnr+cns}{bs-br}$.

De ce que le Nombre s, doit être plus grand que le Nombre r, parcequ'autrement on Ne pouroit pas ôter du premier Nombre x sa partie donnée $\frac{rx}{s}$, il suit que la seconde raison donnée $\frac{r}{s}$, ne peut pas être Vne raison d'égalité.

Mais la premiere raison donnée $\frac{b}{c}$ peut bien être Vne raison d'égalité, c'est à dire que b peut bien être égal à c: comme si on veut trouuer deux Nombres, tels que si le premier emprunte du second Vn Nombre donné, la somme soit égale au reste, & que si le second emprunte du premier Vne partie donnée du même premier, la somme soit au reste en raison donnée. Dans ce cas les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2ans,\ 2ams-2amr-2anr}{ms-mr-nr-ns}.$$

Parceque Nous auons supposé

$a \backsim 40.$

$r \backsim 1.$

$s \backsim 5.$

$m \backsim 47.$

$n \backsim 28.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

560.

640.

dont la difference sera toujours égale au double du Nombre donné.

On tire du cette solution indefinie, le Canon suiuant.

Si par l'excez du Plan sous l'antecedent de la seconde raison donnée & la difference des termes de la premiere, sur le Plan sous le consequent de la seconde raison donnée & la somme des termes de la premiere, on diuise le Solide sous les consequens des deux raisons données & le double du Nombre donné; on aura le premier des deux Nombres qu'on cherche: lequel étant ajouté au double du Nombre donné, on aura le second. Canon.

On pourroit ajouter icy cette Question; Trouuer deux Nombres, tels que si le premier emprunte du second Une partie donnée du même second, & le second du premier Une partie donnée du même premier; la somme soit égale au reste: Mais cette Question est impossible, parcequelle est trop determinée.

On pourroit aussy ajouter icy la Question suiuante; Trouuer deux Nombres en raison donnée, en sorte que si le premier emprunte du second Une partie donnée du même second, la somme soit au reste en raison donnée. Mais elle est aussy impossible, parcequ'elle se trouue trop determinée.

VI.

Trouuer trois Nombres, tels que si le premier emprunte du second Un Nombre donné, & le second du troisieme Un Nombre donné, & enfin le troisieme du premier Un Nombre donné, la somme soit au reste en raison donnée.

On propose de trouuer trois Nombres

x.

y.

z.

en sorte que si le premier x, emprunte du second y, le Nombre donné $20 \backsim a$, la somme $x+a$, soit au reste $y-a$, comme $7 \backsim d$, à $6 \backsim m$: & que si le second y emprunte du troisieme z, le Nombre donné $60 \backsim b$, la somme $y+b$, soit au reste $z-b$, comme $5 \backsim r$, à $3 \backsim s$: & enfin que si le troisieme z emprunte du ~~premier~~ x, le Nombre donné $70 \backsim c$, la somme $z+c$, soit au reste $x-c$, comme $5 \backsim p$, à $1 \backsim q$.

Si on Multiplie la somme du Plan sous le second Nombre donné & l'antecedent de la premiere raison donnée, & du Plan sous le premier Nombre donné & la somme des deux termes de la même raison, par le Plan sous les consequens des deux Canon.

dernieres raisons données: & que pareillement on multiplie la somme du Plan sous le second Nombre donné & le consequent de la troisieme raison donnée, & du Plan sous le troisieme Nombre donné & la somme des deux termes de la même raison: & qu'on divise la somme des deux produits par l'excez du solide sous les antecedens des trois raisons données sur le solide des trois consequens; on aura le premier des trois Nombres qu'on cherche: & si par l'antecedent de la premiere raison donnée on divise la somme du Plan sous le consequent de la même raison & le premier Nombre trouvé, & du Plan sous la somme des termes de la même raison & le premier Nombre donné; on aura le second des trois nombres qu'on cherche: & pareillement si par l'antecedent de la seconde raison donnée on divise la somme du Plan sous le consequent de la même raison & le second Nombre donné, & du Plan sous la somme des termes de la même raison & le second Nombre donné; on aura le dernier des trois Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois analogies,

$$x+a,\ y-a :: d,\ m.$$
$$y+b,\ z-b :: r,\ s.$$
$$z+c,\ x-c :: p,\ q.$$

d'où l'on tire ces trois Equations,

$$mx+am \sim dy-ad.$$
$$sy+bs \sim rz-br.$$
$$qz+cq \sim px-cp.$$

Dans la premiere $mx+am \sim dy-ad$, on trouvera $y \sim \frac{mx+ad+am}{d}$, & dans la troisieme $qz+cq \sim px-cp$, on trouvera $z \sim \frac{px-cp-cq}{q}$, & la deuxieme $sy+bs \sim rz-br$, se changera en celle-cy, $\frac{smx+ads+ams}{d} + bs \sim \frac{prx-cpr-cqr}{q} - br$, dans laquelle on trouvera le premier Nombre $x \sim \frac{adqs+amqs+bdqs+cdpr+bdqr+cdqr}{dpr-mqs}$, & au lieu du second $y \sim \frac{mx+ad+am}{d}$, on aura $y \sim \frac{bmqr+bmqs+cmqr+adpr+ampr+cmpr}{dpr-mqs}$, & au lieu du troisieme $z \sim \frac{px-cp-cq}{q}$, on aura $z \sim \frac{adps+amps+bdps+bdpr+mcps+cmqs}{dpr-mqs}$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront exprimez par trois fractions, dont le denominateur commun sera tel,

$$dpr-mqs.$$

& les trois Numerateurs seront tels,

$$adqs+amqs+bdqs+cdpr+bdqr+cdqr.$$
$$adpr+ampr+cmpr+bmqr+bmqs+cmqr.$$
$$adps+amps+bdps+bdpr+cmps+cmqs.$$

Parceque Nous auons supposé

a ∾ 20.
b ∾ 60.
c ∾ 70.
d ∾ 7.
m ∾ 6.
r ∾ 5.
s ∾ 3.
p ∾ 5.
q ∾ 1.

les trois nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

120.
140.
180.

La determination de cette Question, à l'égard des trois raisons données $\frac{d}{m}, \frac{r}{s}, \frac{p}{q}$, est que solide sous les antecedens dpr doit être plus grand que le solide sous les consequens mqs, à cause du denominateur commun $dpr-mqs$. D'où il suit que les trois raisons données $\frac{d}{m}, \frac{r}{s}, \frac{p}{q}$, ne peuuent pas être chacune vne raison d'égalité. Determination.

Si deux des trois raisons données $\frac{d}{m}, \frac{r}{s}, \frac{p}{q}$, comme les deux dernieres $\frac{r}{s}, \frac{p}{q}$, sont chacune vne raison d'égalité, auquel cas on aura d ∾ m, & de plus si les trois Nombres donnez a, b, c, sont égaux entre eux: comme si on veut trouuer trois Nombres, tels que si le premier emprunte du second vn Nombre donné, la somme soit au reste en raison donnée: & que si le second emprunte du troisieme le même Nombre donné, & le troisieme du premier le même Nombre donné, la somme soit égale au reste. En retranchant de la precedente solution indefinie les six lettres b, c, p, q, r, s, les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront tels,

$$\frac{am+5ad,\ dd+5am,\ 3ad+3am}{d-m}.$$

Parceque Nous auons supposé

a ∾ 20.
d ∾ 7.
m ∾ 6.

les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront de cette grandeur,

820.
740.
780.

On tire de cette solution indefinie, le canon suiuant.

Canon. Si par l'excez de l'antecedent sur le consequent de la raison donnée on diuise le Plan sous la somme des mêmes termes & le triple du nombre donné, on aura le dernier des trois Nombres qu'on cherche: auquel ajoutant & ôtant le double du Nombre donné, on aura le premier & le second.

On peut ajouter icy plusieurs autres Questions de la même Nature, qu'il sera facile de resoudre à l'imitation des precedentes.

Question XVI.

Trouuer trois Nombres, tels que la somme de deux quelconques soit égale à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer trois nombres

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$

en sorte que la somme des deux premiers $x+y$ soit égale au Nombre donné $20 \sim a$: que la somme des deux derniers $y+z$ soit égale au Nombre donné $30 \sim b$: & que la somme des deux extrêmes $x+z$ soit égale au Nombre donné $40 \sim c$.

Canon. Si on ôte l'Vn des trois Nombres donnez de la somme des deux autres, on aura le double de l'Vn des trois nombres qu'on cherche, lequel sera le premier en ôtant le second Nombre donné, le dernier en ôtant le premier donné, & le second en ôtant le troisieme nombre donné.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$$x+y \sim a.$$
$$y+z \sim b.$$
$$x+z \sim c.$$

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouuera $y \sim a-x$, & dans la troisieme $x+z \sim c$, on trouuera $z \sim c-x$, & la seconde $y+z \sim b$, se changera en celle-cy, $a+c-2x \sim b$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}b$, & au lieu de $y \sim a-x$, on aura $y \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$, & au lieu de $z \sim c-x$, on aura $z \sim \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}a$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}b.$$
$$\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b-\tfrac{1}{2}c.$$
$$\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c-\tfrac{1}{2}a.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 20.$$
$$b \sim 30.$$
$$c \sim 40.$$

Les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

15.

15.

5.

25.

La Determination de cette Question, à l'égard des trois nombres donnez a, b, c, est que la somme de deux quelconques doit être plus grande que le troisieme, tels que sont les côtez d'un triangle, comme il est aisé de voir dans les trois nombres, où la moitié de chaque nombre se trouve ôté de la moitié de la somme des deux autres. Determination

Par cette determination, nous demontrerons aisément celle de Diophante, par laquelle il dit que la moitié de la somme des trois nombres donnez doit être plus grande que chacun des trois mêmes nombres. Car puisque par exemple, nous avons $a+b \oplus c$, en ajoûtant c, nous aurons $a+b+c \oplus 2c$, & en divisant par 2, nous aurons $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c \oplus c$. De même puisque nous avons $a+c \oplus b$, en ajoutant b, nous aurons $a+b+c \oplus 2b$, & en divisant par 2, nous aurons $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c \oplus b$. Enfin puisque nous avons $b+c \oplus a$, en ajoutant a, nous aurons $a+b+c \oplus 2a$, & en divisant par 2, nous aurons $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c \oplus a$. Ce qu'il faloit demontrer. Determination de Diophante.

Si vous voulez resoudre cette Question comme Diophante, faites cette quatrieme Equation, $x+y+z \sim \omega$, & alors on aura ces quatre Equations à resoudre, Metode de Diophante.

$$x+y \sim a.$$
$$y+z \sim b.$$
$$x+z \sim c.$$
$$x+y+z \sim \omega.$$

Si à la place de $x+y$ on met a, ce qui se peut faire, à cause de la premiere Equation, $x+y \sim a$, la quatrieme $x+y+z \sim \omega$, se changera en celle-cy, $a+z \sim \omega$, dans laquelle on trouvera le troisieme nombre $z \sim \omega - a$. De même si à la place de $y+z$ on met b, ce qui ce qui se peut faire à cause de la seconde Equation $y+z \sim b$, la quatrieme $x+y+z \sim \omega$, se changera en celle-cy, $x+b \sim \omega$, dans laquelle on trouvera le premier nombre $x \sim \omega - b$. Enfin si à la place de $x+z$ on met c, ce qui est possible, à cause de la troisieme Equation, $x+z \sim c$, la quatrieme $x+y+z \sim \omega$, se changera en celle-cy, $y+c \sim \omega$, dans laquelle on trouvera le second nombre $y \sim \omega - c$. Ainsy les trois nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\omega - b.$$
$$\omega - c.$$
$$\omega - a.$$

qui sont conformes à ceux de Diophante,

$$1N-30.$$
$$1N-40.$$
$$1N-20.$$

en supposant

$$\omega \sim 1N.$$
$$a \sim 20.$$
$$b \sim 30.$$
$$c \sim 40.$$

& au lieu de la quatrieme Equation, $x+y+z \sim \omega$, on aura celle-cy, $3\omega-b-c-a \sim \omega$, dans laquelle on trouuera $\omega \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, & les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront les Mêmes qu'auparauant.

Il manque icy cette Question; Trouuer trois Nombres, tels que la difference de deux quelconques soit égale à Vn Nombre donné: Mais elle est impossible, parcequ'elle est trop determinée. c'est pourquoy Nous ajouterons à sa place les suiuantes.

I.

Trouuer trois Nombres en proportion geometrique, en sorte que l'excez du plus grand sur le moyen, & du moyen sur le plus petit soit égal à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer trois Nombres en proportion geometrique,

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$

en sorte que l'excez $x-y$ du plus grand x sur le moyen y, soit égal au Nombre donné $6 \sim a$, & que l'excez du moyen y sur le plus petit z, soit égal au Nombre donné $4 \sim b$.

Canon Si par la difference des deux Nombres donnez on diuise separément leurs quarrez & leur produit, on aura les trois Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$$xz \sim yy.$$
$$x-y \sim a.$$
$$y-z \sim b.$$

Dans la seconde $x-y \sim a$, on trouuera $x \sim a+y$, & dans la troisieme $y-z \sim b$, on trouuera $z \sim y-b$, & la premiere $xz \sim yy$, se changera en celle-cy, $ay-ab+yy-by \sim yy$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{ab}{a-b}$, & au lieu de $x \sim a+y$, on aura $x \sim \frac{aa}{a-b}$, & au lieu de $z \sim y-b$, on aura $z \sim \frac{bb}{a-b}$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa,\ ab,\ bb}{a-b}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \sim 6.$$
$$b \sim 4.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

18.

12.

8.

Nous pourrions ajouter icy cette Question; Trouuer trois Nombres en proportion arithmetique, en sorte que l'excez du plus grand sur le moyen, & du moyen sur le plus petit, soit égal à Vn Nombre donné: mais elle est impossible, parcequ'elle est trop determinée, comme l'analyse vous le fera connoitre.

II.

Trouuer trois Nombres en proportion geometrique, en sorte que la somme du plus grand & du moyen, & la somme du moyen & du plus petit, soit égale à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer trois Nombres en proportion geometrique,

x.

y.

z.

en sorte que la somme $x+y$ du plus grand x, & du moyen y, soit égale au Nombre donné $30 \sim a$, & la somme du moyen y, & du plus petit z soit égale au Nombre donné $20 \sim b$.

Si par la somme des deux Nombres donnez on diuise separément leurs quarrez & leur produit, on aura les trois Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$$xz \sim yy.$$
$$x+y \sim a.$$
$$y+z \sim b.$$

Dans la seconde $x+y \sim a$, on trouuera $x \sim a-y$, & dans la troisieme $y+z \sim b$, on trouuera $z \sim b-y$, & la troisieme $xz \sim yy$, se changera en celle-cy, $ab-ay-by+yy \sim yy$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{ab}{a+b}$, & au lieu de $x \sim a-y$, on aura $x \sim \frac{aa}{a+b}$, & au lieu de $z \sim b-y$, on aura $z \sim \frac{bb}{a+b}$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa,\ ab,\ bb}{a+b}.$$

Parceque nous auons supposé

$a \sim 30.$

$b \sim 20.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

18.

12.

8.

III.

Trouuer trois Nombres en proportion arithmetique, en sorte que la somme du plus grand & du moyen, & la somme du Moyen & du plus petit, soit égale à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer trois Nombres, en proportion arithmetique,

$x.$

$y.$

$z.$

en sorte que la somme $x+y$ du plus grand x & du moyen y, soit égale au Nombre donné $32 \sim a$, & que la somme $y+z$, du moyen y & du plus petit z, soit égale au Nombre donné $24 \sim b$.

Canon. Le quart de l'excez du triple du triple du premier Nombre donné sur le second, est le plus grand des trois Nombres qu'on cherche, & le quart de l'excez du triple du second Nombre donné sur le premier est le plus petit, le Moyen étant égal au quart de la somme des deux Nombres donnez, ou à la moitié de la somme des deux Nombres trouuez.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$x+z \sim 2y.$

$x+y \sim a.$

$y+z \sim b.$

Dans la seconde $x+y \sim a$, on trouuera $x \sim a-y$, & dans la troisieme $y+z \sim b$, on trouuera $z \sim b-y$, & la premiere $x+z \sim 2y$, se changera en celle-cy, $a+b-2y \sim 2y$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b$, & au lieu de $x \sim a-y$, on aura $x \sim \frac{3}{4}a-\frac{1}{4}b$, & au lieu de $z \sim b-y$, on aura $z \sim \frac{3}{4}b-\frac{1}{4}a$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{3}{4}a-\frac{1}{4}b.$

$\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b.$

$\frac{3}{4}b-\frac{1}{4}a.$

Parceque nous auons supposé

$a \sim 32.$

$b \sim 24.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

18.

14.

10.

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, b, est que chacun doit être moindre que le triple de l'autre, comme l'on void aisément dans le premier & dans le troisieme Nombre trouvé. Determination.

IV.

Trouver trois trois Nombres, tels que la somme des trois, la somme des deux premiers, & la somme des deux derniers, soit égale à un Nombre donné.

On propose de trouver trois Nombres

x.

y.

z.

dont la somme $x+y+z$ soit égale au Nombre donné $36 \backsim a$, en sorte que la somme $x+y$ des deux premiers soit égale au Nombre donné $24 \backsim b$, & que la somme $y+z$ des deux derniers soit égale au Nombre donné $14 \backsim c$.

L'excez du premier Nombre donné sur le second est le dernier des trois Nombres qu'on cherche, & l'excez du premier Nombre donné sur le troisieme est le premier, le second étant égal à l'excez de la somme des deux derniers Nombres donnez sur le premier. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$$x+y+z \backsim a.$$

$$x+y \backsim b.$$

$$y+z \backsim c.$$

Dans la seconde $x+y \backsim b$, on trouvera $x \backsim b-y$, & dans la troisieme $y+z \backsim c$, on trouvera $z \backsim c-y$, & la premiere $x+y+z \backsim a$, se changera en celle-cy, $b+c-y \backsim a$, dans laquelle on trouvera $y \backsim b+c-a$, & au lieu de $x \backsim b-y$, on aura $x \backsim a-c$, & au lieu de $z \backsim c-y$, on aura $z \backsim a-b$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$a-c.$$

$$b+c-a.$$

$$a-b.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \backsim 36.$$

$$b \backsim 24.$$

$$c \backsim 14.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

22.

2.

12.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des trois Nombres donnez a, b, c, est que le premier & plus grand doit être plus grand que le plus grand des deux autres, mais moindre que leur somme, c'est à dire qu'il doit être entre le plus grand des deux autres & leur somme, comme il est évident dans les trois Nombres trouvez.

V.

Trouuer trois Nombres, dont la somme soit égale à vn Nombre donné, en sorte que la difference des deux premiers, & la difference des deux derniers, soit égale chacune à vn nombre donné.

On propose de trouuer trois Nombres,

x.

y.

z.

dont la somme $x+y+z$ soit égale au Nombre donné $52 \sim a$, & tels que la difference $x-y$ des deux premiers soit égale au Nombre donné $b \sim 6$, & que la difference $y-z$ des deux derniers soit égale au Nombre donné $8 \sim c$.

Canon. Le tiers de la somme du premier du dernier & du double du second des trois Nombres donnez est le premier des trois Nombres qu'on cherche, le troisieme étant égal au tiers de l'excez du premier Nombre donné sur la somme du second & du double du troisieme, & le second étant égal au tiers de l'excez de la somme du premier & du troisieme Nombre donné sur le second.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$x+y+z \sim a$.

$x-y \sim b$.

$y-z \sim c$.

Dans la seconde $x-y \sim b$, on trouuera $x \sim b+y$, & dans la troisieme $y-z \sim c$, on trouuera $z \sim y-c$, & la premiere $x+y+z \sim a$, se changera en celle-cy, $b-c+3y \sim a$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}c-\frac{1}{3}b$, & au lieu de $x \sim b+y$, on aura $x \sim \frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b+\frac{1}{3}c$, & au lieu de $z \sim y-c$, on aura $z \sim \frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b-\frac{2}{3}c$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a+2b+c,\ a+c-b,\ a-b-2c}{3}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 52.$$
$$b \sim 6.$$
$$c \sim 8.$$

les trois nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

24.

18.

10.

La determination de cette Question, à l'égard des trois nombres donnez $a, b, c,$ est que le premier a doit être plus grand que la somme $b+2c$, à cause du Numerateur du troisieme nombre trouvé $a-b-2c$. Determination.

Question XVII.

Trouver quatre nombres, tels que la somme de trois quelconques soit égale à un nombre donné.

On propose de trouver quatre nombres

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$
$$\omega.$$

en sorte que la somme $x+y+z$ des trois premiers soit égale au nombre donné $20 \sim a$, que la somme $y+z+\omega$ des trois derniers soit égale au nombre donné $22 \sim b$, que la somme $x+z+\omega$ du premier & des deux derniers soit égale au nombre donné $24 \sim c$, & que la somme $x+y+\omega$ du dernier & des deux premiers soit égale au nombre donné $27 \sim d$.

Si on ôte le double de l'un des quatre nombres donnez de la somme des trois autres, le tiers du reste donnera l'un des quatre nombres qu'on cherche: lequel sera le premier si on ôte le double du second nombre donné, le dernier si on ôte le double du premier nombre donné, le second si on ôte le double du troisieme nombre donné, & le troisieme si on ôte le double du quatrieme nombre donné. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces quatre Equations,

$$x+y+z \sim a.$$
$$y+\omega+z \sim b.$$
$$x+z+\omega \sim c.$$
$$x+y+\omega \sim d.$$

Dans la premiere $x+y+z \sim a$, on trouvera $x \sim a-y-z$, & dans la seconde $y+z+\omega \sim b$, on trouvera $\omega \sim b-y-z$, & les deux dernieres

se changeront en ces deux autres,

$$a+b-2y-z \backsim c.$$
$$a+b-2z-y \backsim d.$$

Dans la premiere $a+b-2y-z \backsim c$, on trouuera $z \backsim a+b-c-2y$, & la deuxieme $a+b-2z-y \backsim d$, se changera en celle-cy, $2c-a-b+3y \backsim d$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}d-\frac{2}{3}c$, c'est pourquoy au lieu de $z \backsim a+b-c-2y$, on trouuera $z \backsim \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c-\frac{2}{3}d$, & au lieu de $\omega \backsim b-y-z$, on aura $\omega \backsim \frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d-\frac{2}{3}a$, & enfin au lieu de $x \backsim a-y-z$, on aura $x \backsim \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d-\frac{2}{3}b$. Ainsy les quatre Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a+c+d-2b,\ a+b+d-2c,\ a+b+c-2d,\ b+c+d-2a}{3}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 20.$$
$$b \backsim 22.$$
$$c \backsim 24.$$
$$d \backsim 27.$$

les quatre Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

9.
7.
4.
11.

Determination. La determination de cette Question, touchant les quatre Nombres donnez a, b, c, d, est que le double de chacun doit être moindre que la somme des trois autres, parceque dans les quatre Nombres trouuez on le doit ôter de cette somme.

Determination de Diophante. Par cette determination Nous demontrerons aisément celle de Diophante, par laquelle il dit que chacun des quatre Nombres donnez doit être moindre que le tiers de leur somme. Car puisque par exemple Nous auons $a+b+c \oplus 2d$, en ajoutant d, Nous aurons $a+b+c+d \oplus 3d$, & en diuisant par 3, Nous aurons $\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d \oplus d$. Ainsy des autres.

Metode de Diophante. Pour resoudre cette Question comme Diophante, faites cette cinquieme Equation $x+y+z+\omega \backsim u$, & alors on aura ces cinq Equations,

$$x+y+z \backsim a.$$
$$y+z+\omega \backsim b.$$
$$x+z+\omega \backsim c.$$
$$x+y+\omega \backsim d.$$
$$x+y+z+\omega \backsim u.$$

Si à la place de $x+y+z$ on met a, ce qui est possible, à cause de la

la premiere Equation, $x+y+z \sim a$, la cinquieme Equation $x+y+z+\omega \sim u$, se changera en celle-cy, $a+\omega \sim u$, dans laquelle on trouuera $\omega \sim u-a$. De même si à la place de $y+z+\omega$, on met b, ce qui est possible, à cause de la seconde Equation $y+z+\omega \sim b$, la cinquieme Equation $x+y+z+\omega \sim u$, se changera en celle-cy, $b+x \sim u$, dans laquelle on trouuera $x \sim u-b$. Pareillement si à la place de $x+z+\omega$, on met c, ce qui est possible, à cause de la troisieme Equation, $x+z+\omega \sim c$, la cinquieme Equation, $x+y+z+\omega \sim u$, se changera en celle-cy, $y+c \sim u$, dans laquelle on trouuera $y \sim u-c$. Enfin si à la place de $x+y+\omega$ on met d, ce qui est possible, à cause de la quatrieme Equation, $x+y+\omega \sim d$, la cinquieme Equation $x+y+z+\omega \sim u$, se changera en celle-cy, $z+d \sim u$, dans laquelle on trouuera $z \sim u-d$. Ainsy les quatre Nombres qu'on cherche, seront tels,

$u-b$.

$u-c$.

$u-d$.

$u-a$.

qui sont conformes à ceux de Diophante,

1N−22.

1N−24.

1N−27.

1N−20.

en supposant

$u \sim 1N$.

$a \sim 20$.

$b \sim 22$.

$c \sim 24$.

$d \sim 27$.

& au lieu de la cinquieme Equation $x+y+z+\omega \sim u$, on aura celle-cy, $4u-a-b-c-d \sim u$, dans laquelle on trouuera $u \sim \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}d$, & les quatre Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Nous ajouterons icy les Questions suiuantes.

I.

Trouuer quatre Nombres en proportion geometrique, en sorte que la somme du premier & du second, du second & du troisieme, & du troisieme & du quatrieme, soit égale à vn Nombre donné.

On propose de trouuer quatre Nombres en proportion geometrique,

x.

y.

⋮

$z.$

$\omega.$

en sorte que la somme $x+y$ des deux premiers soit égale au Nombre donné $54 \backsim a$, que la somme $y+z$ du second & du troisieme soit égale au Nombre donné $42 \backsim b$, & que la somme $z+\omega$ des deux derniers soit égale au Nombre donné $36 \backsim c$.

Canon. Si par la difference du premier & du troisieme Nombre donné on diuise le Plan sous le premier Nombre donné & la difference des deux premiers, on aura le premier des quatre Nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du premier Nombre donné, on aura le second, lequel étant pareillement ôté du second Nombre donné, on aura le troisieme, lequel étant aussy ôté du troisieme Nombre donné, on aura le quatrieme.

Selon les conditions de la Question, on aura ces quatre Equations,

$$x\omega \backsim yz.$$
$$x+y \backsim a.$$
$$y+z \backsim b.$$
$$z+\omega \backsim c.$$

Dans la seconde $x+y \backsim a$, on trouuera $x \backsim a-y$, & dans la troisieme $y+z \backsim b$, on trouuera $z \backsim b-y$, & la quatrieme $z+\omega \backsim c$, se changera en celle-cy, $b-y+\omega \backsim c$, dans laquelle on trouuera $\omega \backsim y-b+c$, & la premiere $x\omega \backsim yz$, se changera en celle-cy, $ac-ab+ay-cy+by-yy \backsim by-yy$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{ab-ac}{a-c}$, & au lieu de $x \backsim a-y$, on aura $x \backsim \frac{aa-ab}{a-c}$, & au lieu de $z \backsim b-y$, on aura $z \backsim \frac{ac-bc}{a-c}$, & enfin au lieu de $\omega \backsim y-b+c$, on aura $\omega \backsim \frac{bc-cc}{a-c}$. Ainsy les quatre Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa-ab,\ ab-ac,\ ac-bc,\ bc-cc}{a-c}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 54.$$
$$b \backsim 42.$$
$$c \backsim 36.$$

les quatre Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

36.

18.

24.

12.

dont la somme sera toujours égale à la somme du premier & du troisieme Nombre donné, car leur somme indefinie est $\frac{aa-cc}{a-c}$, qui vaut autant que $a+c$.

La determination de cette Question, à l'égard des trois Nombres donnez a, b, c, est que si a est plus grand que c, à cause du denominateur commun $a-c$, il faut aussy que a soit plus grand que b, à cause du Numerateur $aa-ab$, du premier Nombre trouvé, ou du Numerateur $ae-bc$, du troisieme: & que b soit plus grand que c, à cause du Numerateur $ab-ac$ du second Nombre trouvé, ou du Numerateur $be-cc$ du quatrieme. Il arrivera tout le contraire si a est plus grand que c. Determination.

Au lieu de la proportion geometrique, on ne peut pas donner aux quatre Nombres qu'on cherche, une proportion arithmetique, ny faire que leur somme soit donnée, parceque la Question se trouvera trop determinée, comme le calcul vous fera connoitre.

11.

Trouver quatre Nombres en proportion geometrique, en sorte que la difference du premier & du second, du second & du troisieme, & la difference du troisieme & du quatrieme, soit égale à un Nombre donné.

On propose de trouver quatre Nombres en proportion geometrique,

x.
y.
z.
ω.

en sorte que la difference $x-y$ des deux premiers soit égale au Nombre donné $25 \backsim a$, que la difference $y-z$ des deux Moyens soit égale au Nombre donné $32 \backsim b$, & que la difference $z-\omega$ des deux derniers soit égale au Nombre donné $24 \backsim c$.

Si par la difference du premier & du troisieme Nombre donné, on divise le Plan sous le premier Nombre donné & la somme du premier & du second, on aura le premier des quatre Nombres qu'on cherche: duquel ôtant le premier Nombre donné, on aura le second: duquel si on ôte le second Nombre donné, on aura le troisieme: lequel étant diminué du troisieme Nombre donné, on aura le quatrieme. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces quatre Equations,

$$x\omega \backsim yz.$$
$$x-y \backsim a.$$
$$y-z \backsim b.$$
$$z-\omega \backsim c.$$

Dans la seconde $x-y \backsim a$, on trouvera $x \backsim a+y$, & dans la

troisième $y-z \backsim b$, on trouuera $z \backsim y-b$, & la quatrième $z-\omega \backsim c$, se changera en celle-cy, $y-b-\omega \backsim c$, dans laquelle on trouuera $\omega \backsim y-b-c$, & au lieu de la première $x\omega \backsim yz$ on aura celle-cy, $ay-ab-ac+yy-by-cy \backsim yy-by$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{ab+ac}{a-c}$: c'est pourquoy au lieu de $x \backsim a+y$, on aura $x \backsim \frac{aa+ab}{a-c}$, & au lieu de $z \backsim y-b$, on aura $z \backsim \frac{ac+bc}{a-c}$, & enfin au lieu de $\omega \backsim y-b-c$, on aura $\omega \backsim \frac{bc+cc}{a-c}$. Ainsy les quatre Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+ab,\ ab+ac,\ ac+bc,\ bc+cc}{a-c}.$$

Parceque Nous auons supposé

$a \backsim 25$.

$b \backsim 32$.

$c \backsim 24$.

les quatre Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

1425.

1400.

1368.

1344.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des trois Nombres donnez a, b, c, est que le premier a doit être plus grand que le troisieme c, à cause du denominateur commun $a-c$.

III.

Trouuer quatre Nombres, dont la somme soit donnée, en sorte que les differences des deux premiers, des deux Moyens, & des deux extrêmes soient données.

On propose de trouuer quatre Nombres

x.

y.

z.

ω.

dont la somme $x+y+z+\omega$ soit égale au Nombre donné $200 \backsim a$, en sorte que la difference $x-y$ des deux premiers soit égale au Nombre donné $12 \backsim b$, que la difference $y-z$ des deux Moyens soit égale au Nombre donné $14 \backsim c$, & que la difference $z-\omega$ des deux derniers soit égale au Nombre donné $20 \backsim d$.

Canon. Si du premier Nombre donné on ôte la somme du premier, du double du second, & du triple du troisieme; le quart du reste donnera le dernier des quatre Nombres qu'on cherche, auquel ajoutant le quatrieme Nombre donné on aura le troisieme, lequel étant augmenté du troisieme Nombre donné on aura le second, auquel si on ajoute le second Nombre donné on aura le premier.

Selon les conditions de la Question, on aura ces quatre Equations,

$$x+y+z+\omega \sim a$$
$$x-y \sim b.$$
$$y-z \sim c.$$
$$z-\omega \sim d$$

Dans la seconde $x-y \sim b$, on trouvera $x \sim y+b$, & dans la troisieme $y-z \sim c$, on trouvera $z \sim y-c$, & la quatrieme $z-\omega \sim d$, se changera en celle-cy, $y-c-\omega \sim d$, dans laquelle on trouvera $\omega \sim y-c-d$, & au lieu de la premiere $x+y+z+\omega \sim a$, on aura celle-cy, $4y+b-2c-d \sim a$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{4}d$, c'est pourquoy au lieu de $x \sim y+b$, on aura $x \sim \frac{1}{4}a+\frac{3}{4}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{4}d$, & au lieu de $z \sim y-c$, on aura $z \sim \frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d$, & enfin au lieu de $\omega \sim y-c-d$, on aura $\omega \sim \frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b-\frac{1}{2}c-\frac{3}{4}d$. Ainsy les quatre Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a+3b+2c+d,\ a-b+2c+d,\ a-b-2c+d,\ a-b-2c-3d}{4}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 200.$$
$$b \sim 12.$$
$$c \sim 14.$$
$$d \sim 20.$$

les quatre Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

71.
59.
45.
25.

La de cette Question, à l'égard des quatre Nombres donnez a, b, c, d, est que le premier a doit être plus grand que $b+2c+3d$, à cause du Numerateur du quatrieme Nombre trouvé $a-b-2c-3d$. Determination.

Question XVIII. & XIX.

Trouver trois nombres, tels que la somme de deux quelconques surpasse le troisieme d'un Nombre donné.

On propose de trouver trois Nombres

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$

en sorte que l'excez $x+y-z$ des deux premiers sur le troisieme soit égal au Nombre donné $20 \sim a$: que l'excez $y+z-x$ de la somme des deux derniers sur le premier soit égal au Nombre donné $30 \sim b$: & que l'excez $x+z-y$ des deux extrêmes sur le moyen soit égal au Nombre donné $40 \sim c$.

Canon. Le premier des trois nombres qu'on cherche, est égal à la moitié de la somme du premier & du troisieme nombre donné : le second est égal à la moitié de la somme des deux premiers nombres donnez : & le troisieme est égal à la moitié de la somme des deux derniers nombres donnez.

Selon les cōditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$$x+y-z \backsim a.$$
$$y+z-x \backsim b.$$
$$x+z-y \backsim c.$$

Dans la première $x+y-z \backsim a$, on trouuera $x \backsim a-y+z$, & les deux dernieres se changeront en ces deux autres,

$$2y-a \backsim b.$$
$$2z-2y+a \backsim c.$$

Dans la premiere $2y-a \backsim b$, on trouuera $y \backsim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, & la deuxieme $2z-2y+a \backsim c$, se changera en celle-cy, $2z-b \backsim c$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, & au lieu de $x \backsim a-y+z$, on aura $x \backsim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c$. Ainsy les trois nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a+c,\ a+b,\ b+c}{2}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \backsim 20.$$
$$b \backsim 30.$$
$$c \backsim 40.$$

les trois nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

30.

25.

35.

dont la somme sera toujours égale à la somme des trois nombres donnez.

Premiere metode de Diophante. Pour resoudre cette Question par la premiere metode de Diophante, laquelle fait la Quest. XVIII. faites cette quatrieme Equation $x+y+z \backsim 2\omega$, & alors vous aurez ces quatre Equations à resoudre,

$$x+y-z \backsim a.$$
$$y+z-x \backsim b.$$
$$x+z-y \backsim c.$$
$$x+y+z \backsim 2\omega.$$

& par l'antithese vous aurez ces autre quatre Equations,

$$x+y \backsim a+z.$$
$$y+z \backsim b+x.$$
$$x+z \backsim c+y.$$
$$x+y+z \backsim 2\omega.$$

Si à la place de $x+y$, on met $a+z$, ce qui est possible, à cause de la premiere Equation, $x+y \sim a+z$, la quatrieme $x+y+z \sim 2\omega$, se changera en celle-cy, $a+2z \sim 2\omega$, dans laquelle on trouuera $z \sim \omega-\frac{1}{2}a$.

Si à la place de $y+z$, on met $b+x$, ce qui est possible à cause de la seconde Equation $y+z \sim b+x$, la quatrieme $x+y+z \sim 2\omega$, se changera en celle-cy, $b+2x \sim 2\omega$, dans laquelle on trouuera $x \sim \omega-\frac{1}{2}b$.

Si à la place de $x+z$, on met $c+y$, ce qui est possible, à cause de la troisieme Equation $x+z \sim c+y$, la quatrieme $x+y+z \sim 2\omega$, se changera en celle-cy, $c+2y \sim 2\omega$, dans laquelle on trouuera $y \sim \omega-\frac{1}{2}c$.

Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\omega-\frac{1}{2}b$.
$\omega-\frac{1}{2}c$.
$\omega-\frac{1}{2}a$.

qui sont conformes aux trois Nombres de Diophante,

1N−15.
1N−20.
1N−10.

comme vous connoitrez en supposant

$\omega \sim$ 1N.
$a \sim 20$.
$b \sim 30$.
$c \sim 40$.

& au lieu de la quatrieme Equation, $x+y+z \sim 2\omega$, on aura celle-cy, $\frac{3}{2}\omega-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c \sim 2\omega$, dans laquelle on trouuera $\omega \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, & par consequent $\omega \sim a+b+c$, où l'on void, comme nous auons deja dit, que la somme des trois Nombres qu'on cherche, est égale à la somme des trois Nombres donnez: & les trois nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Pour resoudre cette Question par la seconde metode de Diophante, laquelle fait la Quest. XIX. on trouuera dans la premiere Equation, $x+y-z \sim a$, le second Nombre $y \sim a-x+z$, & dans la seconde $y+z-x \sim b$, on trouuera le même $y \sim b+x-z$, & si on ajoute ensemble ces deux Equations trouuées $y \sim a-x+z$, $y \sim b+bx-z$, on aura cette Equation, $2y \sim a+b$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, & la premiere Equation $x+y-z \sim a$, se changera en celle-cy, $x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-z \sim a$, dans laquelle on trouuera $x \sim z+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$. Ainsy les trois nombres qu'on cherche, seront tels, *Seconde metode de Diophante.*

$z+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$.
$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.
z.

qui sont conformes à ceux de Diophante

$1N-5.$

$2S.$

$1N.$

en supposant

$z \sim 1N.$

$a \sim 20.$

$b \sim 30.$

$c \sim 40.$

& au lieu de la troisieme Equation $x+z-y \sim c$, on aura celle-cy, $2z-b \sim c$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, & les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Nous ajouterons icy les Questions suiuantes.

1.

Trouuer trois Nombres en proportion arithmetique, en sorte que l'excez des deux premiers sur le troisieme, & l'excez des deux derniers sur le premier, soit donné.

On propose de trouuer trois Nombres en proportion arithmetique,

$x.$

$y.$

$z.$

en sorte que l'excez $x+y-z$ des deux premiers sur le troisieme soit égal au Nombre donné $60 \sim a$, & que l'excez $y+z-x$ des deux derniers sur le premier soit égale au Nombre donné $84 \sim b$.

Canon. La moitié de la somme des deux Nombres donnez est le Moyen des trois Nombres qu'on cherche: & si aux trois quarts du premier Nombre donné on ajoute vn quart du second, on aura le premier des trois Nombres qu'on cherche: & on aura le dernier si aux trois quarts du premier Nombre donné on ajoute le quart du premier.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$x+z \sim 2y.$

$x+y-z \sim a$

$y+z-x \sim b.$

Dans la seconde $x+y-z \sim a$, on trouuera $x \sim a-y+z$, & la troisieme $y+z-x \sim b$, se changera en celle-cy, $2y-a \sim b$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, & au lieu de $x \sim a-y+z$, on aura $x \sim \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+z$, & la premiere Equation $x+z \sim 2y$, se changera en celle-cy, $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+2z \sim a+b$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{1}{4}a+\frac{3}{4}b$, & au lieu de $x \sim \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+z$,

on

on aura $x \sim \frac{3}{4}a+\frac{1}{4}b$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}b.$$
$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b.$$
$$\frac{1}{4}a+\frac{3}{4}b.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 160.$$
$$b \sim 84.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

141.
122.
103.

dont la somme sera toujours égale à trois moitiez de la somme des trois Nombres donnez.

II.

Trouuer trois Nombres en proportion geometrique, en sorte que l'excez des deux premiers sur le derniers, & l'excez des deux derniers sur le premier, soit donné.

On propose de trouuer trois Nombres en proportion geometrique,

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$

en sorte que l'excez $x+y-z$ des deux premiers sur le dernier soit égal au Nombre donné $9 \sim a$, & que l'excez $y+z-x$ des deux derniers sur le premier soit égal au Nombre donné $99 \sim b$.

La Moitié de la somme des deux Nombres donnez est le Moyen des trois Nombres qu'on cherche: dont le quarré étant ajouté au quart du quarré de la Moitié de la difference des deux Nombres donnez, & la Racine quarrée de la somme étant augmentée & diminuée du quart de la même difference, on aura le troisieme & le premier des trois Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$$xz \sim yy.$$
$$x+y-z \sim a.$$
$$y+z-x \sim b.$$

Dans la premiere $xz \sim yy$, on trouuera $z \sim \frac{yy}{x}$, & les deux dernieres se changeront en ces deux autres,

$$x+y-\frac{yy}{x} \sim a.$$
$$y+\frac{yy}{x}-x \sim b.$$

Dans la premiere $x+y-\frac{yy}{x} \sim a$, on trouuera $y \sim \frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{5xx}{4}-ax}$,

& dans leur somme $2y \sim a+b$, on trouvera le même $y \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \sim \frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{5}{4}xx-ax}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}\sqrt{5aa+6ab+5bb}$, & au lieu de $z \sim \frac{yy}{x}$, on aura $z \sim \frac{1}{4}b-\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}\sqrt{5aa+6ab+5bb}$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}\sqrt{5aa+6ab+5bb}$$
$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b.$$
$$\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}\sqrt{5aa+6ab+5bb}.$$

Pairceque Nous avons supposé

$$a \sim 9.$$
$$b \sim 99.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

36.
54.
81.

Determination. La determination de cette Question, pour faire qu'elle soit rationnelle, est que les deux Nombres donnez a, b, doivent être tels, que si au quarré de leur difference on ajoute le quadruple du quarré de leur somme, il vienne un nombre quarré, à cause de $\sqrt{5aa+6ab+5bb}$.

Solution rationnelle. Pour savoir la valeur que l'on doit donner aux deux Nombres a, b, afinque la solution soit toujours rationnelle, c'est à dire afinque $5aa+6ab+5bb$, ait une Racine quarrée, on considerera que pour rendre quarée cette Puissance $5aa+6ab+5bb$, où la somme des Unitez fait ce Nombre quarré 16, on pourroit supposer $a \sim b$: mais comme l'on veut que les deux Nombres a, b, soient inégaux, on supposera $b \sim a+\omega$, & alors on aura cette autre Puissance à égaler au quarré, $16aa+16a\omega+5\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $4a \cdots \frac{c\omega}{d}$, on trouvera en entiers

$$a \sim cc-5dd.$$
$$\omega \sim 8cd+16dd.$$

& par consequent $b \sim cc+8cd+11dd.$

c'est pourquoy si l'on suppose $c \sim 3.$

$$d \sim 1.$$

on trouvera $a \sim 4.$

$$b \sim 44.$$

& les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

16.
24.
36.

III.

Trouver trois Nombres, dont la somme soit donnée, en sorte que l'excez des deux premiers sur le dernier, & l'excez des deux derniers sur le premier soit aussy donné.

On propose de trouver trois Nombres

x.
y.
z.

dont la somme $x+y+z$ soit égale au Nombre donné $64 \backsim a$, en sorte que l'excez $x+y-z$ des deux premiers sur le troisieme soit égale au Nombre donné $60 \backsim b$, & que l'excez $y+z-x$ des deux derniers sur le premier soit égale au Nombre donné $40 \backsim c$.

La moitié de l'excez du premier Nombre donné sur le troisieme est le premier des trois Nombres qu'on cherche: la moitié de la somme des deux derniers Nombres donnez est le second: & la moitié de l'excez du premier Nombre donné sur le dernier est le troisieme. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$$x+y+z \backsim a.$$
$$x+y-z \backsim b.$$
$$y+z-x \backsim c.$$

La somme des deux dernieres donne celle-cy, $2y \backsim b+c$, dans laquelle on trouvera $y \backsim \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$: & la difference des deux premieres donne celle-cy, $2z \backsim a-b$, dans laquelle on trouvera $z \backsim \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, & au lieu de la premiere $x+y+z \backsim a$, on aura celle-cy, $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}c+x \backsim a$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}c$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}c.$$
$$\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}c.$$
$$\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \backsim 64.$$
$$b \backsim 60.$$
$$c \backsim 40.$$

les trois nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

12.
50.
2.

Question XX. & XXI.

Trouver quatre nombres, tels que la somme de trois quelconques surpasse le quatrieme d'un nombre donné.

On propose de trouver quatre nombres

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$
$$\omega.$$

en sorte que l'excez $x+y+z-\omega$ des trois premiers sur le quatrieme soit égal au nombre donné $20 \sim a$, que l'excez $y+z+\omega-x$ des trois derniers sur le premier soit égal au nombre donné $30 \sim b$, que l'excez $z+\omega+x-y$ du premier & des deux derniers sur le second soit égal au nombre donné $40 \sim c$, & que l'excez $\omega+x+y-z$ du dernier & des deux premiers sur le troisieme soit égal au nombre donné $50 \sim d$.

Canon. Si on ôte l'un des quatre nombres donnez de la somme des trois autres, le quart du reste donnera l'un des quatre nombres qu'on cherche: lequel sera le premier, si on ôte le second nombre donné: le second, si on ôte le troisieme nombre donné: le troisieme si on ôte le quatrieme nombre donné: & le dernier si on ôte le premier nombre donné.

Selon les conditions de la Question, on aura ces quatre Equations,

$$x+y+z-\omega \sim a.$$
$$y+z+\omega-x \sim b.$$
$$z+\omega+x-y \sim c.$$
$$\omega+x+y-z \sim d.$$

Dans la premiere $x+y+z-\omega \sim a$, on trouvera $x \sim a+\omega-y-z$, & les trois dernieres se changeront en ces trois autres,

$$2y+2z-a \sim b.$$
$$a+2\omega-2y \sim c.$$
$$a+2\omega-2z \sim d.$$

Dans la premiere $2y+2z-a \sim b$, on trouvera $y \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-z$, & les deux dernieres se changeront en ces deux autres,

$$2\omega+2z-b \sim c.$$
$$2\omega-2z+a \sim d.$$

Leur somme donnera celle-cy, $4\omega+a-b \sim c+d$, dans laquelle on trouvera $\omega \sim \frac{1}{4}+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d-\frac{1}{4}a$, & leur difference donnera celle-cy, $4z-a-b \sim c-d$, dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c-\frac{1}{4}d$, & au lieu de $y \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-z$, on aura $y \sim \frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b-\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d$, & au lieu de $x \sim a+\omega-y-z$, on aura $x \sim \frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d$. Ainsy les quatre nombres qu'on cherche, seront tels,

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 20.$$
$$b \sim 30.$$
$$c \sim 40.$$
$$\partial \sim 50.$$

les quatre Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

20.
15.
10.
25.

La determination de cette Question à l'égard des quatre Nombres donnez a, b, c, ∂, est que chacun doit être Moindre que la somme des trois autres, comme l'on void dans les Numerateurs des quatre Nombres trouuez, où chacun des quatre Nombres donnez est ôté de la somme des trois autres. Determination.

Par ~~pour~~ cette determination Nous demontrerons aisément celle de Diophante, par laquelle il dit que chacun des quatre Nombres donnez doit être Moindre que la Moitié de leur somme. Car puisque par exemple, Nous auons $\partial \,\Theta\, a+b+c$, en ajoutant ∂, Nous aurons $2\partial \,\Theta\, a+b+c+\partial$, & par consequent $\partial \,\Theta\, \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\partial$. Pareillement puisque Nous auons $a \,\Theta\, b+c+\partial$, en ajoutant a de chaque côté, Nous aurons $2a \,\Theta\, b+c+\partial+a$, & en diuisant chaque partie par 2, Nous aurons $a \,\Theta\, \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\partial$. Determination de Diophante.

Pour resoudre cette Question par la Metode de Diophante, faites cette cinquieme Equation, $x+y+z+\omega \sim 2u$, & alors Vous aurez ces cinq Equations à resoudre, Premiere Metode de Diophante.

$$x+y+z-\omega \sim a.$$
$$y+z+\omega-x \sim b.$$
$$z+\omega+x-y \sim c.$$
$$\omega+x+y-z \sim \partial.$$
$$x+y+z+\omega \sim 2u.$$

& par l'antitheze, on aura ces autres cinq Equations,

$$x+y+z \sim a+\omega.$$
$$y+z+\omega \sim b+x.$$
$$z+\omega+x \sim c+y.$$
$$\omega+x+y \sim \partial+z.$$
$$x+y+z+\omega \sim 2u.$$

Si à la place de $x+y+z$, on met $a+\omega$, ce qui est possible, à

cause de la premiere Equation, $x+y+z \backsim a+\omega$, la cinquieme Equation $x+y+z+\omega \backsim 2u$, se changera en celle-cy, $a+2\omega \backsim 2u$, dans laquelle on trouvera $\omega \backsim u-\frac{1}{2}a$.

Si à la place de $y+z+\omega$, on met $b+x$, ce qui est possible, à cause de la seconde Equation, $y+z+\omega \backsim b+x$, la cinquieme Equation $x+y+z+\omega \backsim 2u$, se changera en celle-cy, $b+2x \backsim 2u$, dans laquelle on trouvera $x \backsim u-\frac{1}{2}b$.

Si à la place de $z+\omega+x$, on met $c+y$, ce qui est possible, à cause de la troisieme Equation $z+\omega+x \backsim c+y$, la cinquieme Equation $x+y+z+\omega \backsim 2u$ se changera en celle-cy, $c+2y \backsim 2u$, dans laquelle on trouvera $y \backsim u-\frac{1}{2}c$.

Enfin si à la place de $\omega+x+y$, on met $d+z$, ce qui est possibles, à cause de la quatrieme Equation $\omega+x+y \backsim d+z$, la cinquieme Equation $x+y+z+\omega \backsim 2u$ se changera en celle-cy, $d+2z \backsim 2u$, dans laquelle on trouvera $z \backsim u-\frac{1}{2}c$.

Ainsy les quatre nombres qu'on cherche, seront tels,

$u-\frac{1}{2}b$.
$u-\frac{1}{2}c$.
$u-\frac{1}{2}d$.
$u-\frac{1}{2}a$.

qui sont conformes aux quatre nombres de Diophante,

1N − 15.
1N − 20.
1N − 25.
1N − 10.

en supposant

$u \backsim$ 1N.
$a \backsim 20$.
$b \backsim 30$.
$c \backsim 40$.
$d \backsim 50$.

& au lieu de la cinquieme Equation, $x+y+z+\omega \backsim 2u$, on aura celle-cy, $4u-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}d \backsim 2u$, dans laquelle on trouvera $u \backsim \frac{1}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d$, & par consequent $2u \backsim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}d$, où l'on void que la somme des quatre nombres qu'on cherche, est égale à la moitié de la somme des quatre nombres donnez, & les quatre nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Si vous voulez suiure l'autre Metode de Diophante, laquelle fait la Quest. XXI. faites ainsy.

Dans la premiere Equation $x+y+z-\omega \sim a$, on trouuera $y+z \sim a+\omega-x$, & dans la seconde $y+z+\omega-x \sim b$, on trouuera la même somme $y+z \sim b-\omega+x$, & si on ajoute ensemble ces deux Equations $y+z \sim a+\omega-x$, $y+z \sim b-\omega+x$, on aura celle-cy, $2y+2z \sim a+b$, & par consequent $y+z \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, où l'on void que la somme du second & du troisieme des quatre Nombres qu'on cherche, est égale à la Moitié de la somme des deux premiers Nombres donnez, comme dit Diophante; & au lieu de la premiere Equation $x+y+z-\omega \sim a$, on aura celle-cy, $x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\omega \sim a$, dans laquelle on trouuera $x \sim \omega+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$. Seconde Metode de Diophante.

Dans la seconde Equation $y+z+\omega-x \sim b$, on trouuera $z+\omega \sim b+x-y$, & dans la troisieme $\omega+x+z-y \sim c$, on trouuera la même somme $z+\omega \sim c-x+y$, & si on ajoute ensemble ces deux Equations, $z+\omega \sim b+x-y$, $z+\omega \sim c-x+y$, on aura celle-cy, $2z+2\omega \sim b+c$, & par consequent $z+\omega \sim \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c$, où l'on void que la somme du troisieme & du quatrieme des quatre Nombres qu'on cherche, est égale à la Moitié de la somme du second & du troisieme Nombre donné, comme dit Diophante, & par l'antitheze on trouuera $z \sim \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\omega$, & au lieu de l'Equation precedente $y+z \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, on aura celle-cy, $y+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\omega \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, dans laquelle on trouuera $y \sim \omega+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}c$. Ainsy les quatre Nombres qu'on cherche, seront exprimez ainsy,

$\omega+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$.
$\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c-\omega$.
$\omega+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}c$.
ω.

qui sont conformes aux quatre Nombres de Diophante,

1N-5.
35-1N.
1N-10.
1N.

en supposant

$\omega \sim 1N$.
$a \sim 20$.
$b \sim 30$.
$c \sim 40$.
$d \sim 50$.

& au lieu de la quatrieme Equation, $\omega+x+y-z \sim d$, on aura celle-cy, $4\omega+a-b-c \sim d$, dans laquelle on trouuera $\omega \sim \frac{1}{4}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}d-\frac{1}{4}a$, & les quatre Nombres qu'on cherche, seront les mêmes qu'auparauant.

Nous ajouterons icy les Questions suivantes.

I.

Trouver quatre Nombres en continuelle proportion arithmetique, en sorte que l'excez des trois premiers sur le dernier, & l'excez des trois derniers sur le premier soit donné.

On propose de trouver quatre Nombres en continuelle proportion arithmetique,

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$
$$\omega.$$

en sorte que l'excez $x+y+z-\omega$ des trois premiers sur le dernier soit égal au Nombre donné $60 \backsim a$, & que l'excez $y+z+\omega-x$ des trois derniers sur le premier soit égal au Nombre donné $84 \backsim b$.

Canon. La moitié du premier nombre donné est le premier des quatre Nombres qu'on cherche, & la moitié du second nombre donné est le dernier. Le tiers de la somme du second Nombre donné & de la moitié du premier est le troisieme des quatre Nombres qu'on cherche, & le tiers de la somme du premier nombre donné & du tiers du second est le second des quatre Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces quatre Equations,

$$x+z \backsim 2y.$$
$$y+\omega \backsim 2z.$$
$$x+y+z-\omega \backsim a.$$
$$y+z+\omega-x \backsim b.$$

La somme des deux dernieres donne celle-cy, $2y+2z \backsim a+b$, dans laquelle on trouvera $y \backsim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-z$, & la difference des deux mêmes dernieres donne celle-cy, $2\omega-2x \backsim b-a$, dans laquelle on trouvera $\omega \backsim \frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a+x$, & les deux premieres Equations se changeront en ces deux autres,

$$x+z \backsim a+b-2z.$$
$$b-z+x \backsim 2z.$$

Dans la premiere $x+z \backsim a+b-2z$, on trouvera $x \backsim a+b-3z$, & la seconde $b-z+x \backsim 2z$, se changera en celle-cy, $a+2b-4z \backsim 2z$, dans laquelle on trouvera $z \backsim \frac{1}{6}a+\frac{1}{3}b$, & au lieu de $y \backsim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-z$, on aura $y \backsim \frac{1}{3}a+\frac{1}{6}b$, & encore au lieu de $x \backsim a+b-3z$, on

on aura $x \backsim \frac{1}{2}a$, & enfin au lieu de $\omega \backsim \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a + x$, on aura $\omega \backsim \frac{1}{2}b$. Ainsy les quatre Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{3a,\ 2a+b,\ a+2b,\ 3b}{6}.$$

Parceque nous auons supposé

$a \backsim 60.$

$b \backsim 84.$

les quatre Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

30.

34.

38.

42.

dont la somme sera toujours égale à la somme des deux Nombres donnez.

II.

Trouuer quatre Nombres, tels que l'excez des deux premiers sur le troisieme, des deux Moyens sur le quatrieme, des trois premiers sur le dernier, & des trois derniers sur le premier, soit donné.

On propose de trouuer quatre Nombres

$x.$

$y.$

$z.$

$\omega.$

où l'excez $x+y-z$ des deux premiers sur le troisieme soit égal au Nombre donné $72 \backsim a$, & l'excez $y+z-\omega$ des deux Moyens sur le quatrieme soit égal au nombre donné $80 \backsim b$, & l'excez $x+y+z-\omega$ des trois premiers sur le dernier soit égal au nombre donné $136 \backsim c$, & l'excez $y+z+\omega-x$ des trois derniers sur le premier soit égal au Nombre donné $88 \backsim d$.

L'excez du troisieme Nombre donné sur le second est le premier des quatre Nombres qu'on cherche: & le dernier se trouuera en ôtant le second Nombre donné de la moitié de la somme des deux derniers. Le second se trouuera en ôtant le quart du troisieme Nombre donné de la somme de la moitié des deux premiers & du quart du quatrieme: & le troisieme se trouuera en ôtant la moitié de la somme des deux premiers Nombres donnez du quart de la somme du quatrieme Nombre donné & du triple du troisieme, ou plus facilement en ôtant la somme des deux premiers Nombres donnez de la somme du troisieme Nombre & du second Nombre trouué. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces quatre Equations,

$$x+y-z \sim a.$$
$$y+z-\omega \sim b.$$
$$x+y+z-\omega \sim c.$$
$$y+z+\omega-x \sim \partial.$$

Si de la troisieme $x+y+z-\omega \sim c$, on ôte la deuxieme $y+z-\omega \sim b$, on aura $x \sim c-b$, & on aura ces autres quatre Equations,

$$c-b+y-z \sim a.$$
$$y+z-\omega \sim b.$$
$$c-b+y+z-\omega \sim c.$$
$$y+z+\omega+b-c \sim \partial.$$

Si de la troisieme $c-b+y+z-\omega \sim c$, on ôte la quatrieme $y+z+\omega+b-c \sim \partial$, on aura celle-cy, $2c-2b-2\omega \sim c-\partial$, dans laquelle on trouuera $\omega \sim \frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\partial-b$, & la seconde Equation, $y+z-\omega \sim b$, se changera en celle-cy, $y+z-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}\partial+b \sim b$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\partial-z$, & au lieu de la premiere Equation, $c+b+y-z \sim a$, on aura celle-cy, $\frac{3}{2}c-b+\frac{1}{2}\partial-2z \sim a$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{3}{4}c+\frac{1}{4}\partial-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, c'est pourquoy au lieu de $y \sim \frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\partial-z$, on aura $y \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}c+\frac{1}{4}\partial$. Ainsy les quatre Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4c-4b,\ 2a+2b-c+\partial,\ 3c+\partial-2a-2b,\ 2c+2\partial-4b}{4}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 72.$$
$$b \sim 80.$$
$$c \sim 136.$$
$$\partial \sim 88.$$

les quatre Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

56.
64.
48.
32.

où la somme des deux Moyens sera toujours égale à la Moitié de la somme du troisieme & du quatrieme Nombre donné.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des quatre Nombres donnez a, b, c, ∂, est que b, doit être moindre que $\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\partial$, & aussy que $\frac{3}{2}c+\frac{1}{2}\partial-a$, d'où il suit que a doit être moindre que $\frac{3}{2}c+\frac{1}{2}\partial$. Il faut aussy que c, soit plus grand que b, & moindre que $a+b+\frac{1}{2}\partial$. La demonstration de tout cela se trouuera aisément dans les Numerateurs des quatre Nombres trouuez, sans qu'il soit besoin d'en parler dauantage.

Question XXII.

Trouuer trois Nombres, dont la somme soit égale à Un Nombre donné, en sorte que la raison du premier à la somme des deux autres, & du dernier à la somme des deux autres, soit donnée.

On propose de trouuer trois nombres

x.
y.
z.

dont la somme $x+y+z$ soit égale au Nombre donné $100 \sim a$, en sorte que le premier x soit à la somme $y+z$ des deux derniers comme $1 \sim r$, à $4 \sim s$, & que le dernier z soit à la somme $x+y$ des deux premiers comme $1 \sim c$, à $3 \sim d$.

Si on diuise chaque Plan sous le Nombre donné & le terme antecedent de chaque raison donnée, par la somme des mêmes termes; on aura le premier & le dernier des trois Nombres qu'on cherche, dont la somme étant ôtée du Nombre donné, on aura le second. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$$x+y+z \sim a.$$

& ces deux analogies,

$$x,\ y+z :: r,\ s.$$
$$z,\ x+y :: c,\ d.$$

Dans l'Equation precedente $x+y+z \sim a$, on trouuera $x \sim a-y-z$, & les deux analogies precedentes se changeront en ces deux autres,

$$a-y-z,\ y+z :: r,\ s.$$
$$z,\ a-z :: c,\ d.$$

desquelles on tire ces deux Equations,

$$as-sy-sz \sim ry+rz.$$
$$dz \sim ac-cz.$$

Dans la seconde $dz \sim ac-cz$, on trouuera $z \sim \frac{ac}{c+d}$, & la premiere $as-sy-sz \sim ry+rz$, se changera en celle-cy, $as-sy-\frac{acs}{c+d} \sim ac-\frac{acc}{c+d}$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{ads-acr}{cr+dr+cs+ds}$, & au lieu de $x \sim a-y-z$, on aura $x \sim \frac{ar}{r+s}$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ac}{r+s}.$$
$$\frac{ads-acr}{cr+dr+cs+ds}.$$
$$\frac{ac}{c+d}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 100.$$

$r \sim 1.$

$s \sim 4.$

$c \sim 1.$

$d \sim 3.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur

20.

55.

25.

Determination. La determination de cette Question, touchant les deux raisons données $\frac{r}{s}$, $\frac{c}{d}$, est que le Plan ds sous les antecedens doit être plus grand que le Plan cr sous les consequens, comme il est aisé de voir dans le Numerateur $ads - acr$ du seconde Nombre trouvé.

Metode de Diophante. Si vous voulez suivre la Metode de Diophante, faites des deux premieres analogies precedentes, ces deux Equations,

$sx \sim ry + rz.$

$dz \sim cx + cy.$

Dans la seconde $dz \sim cx + cy$, on trouvera la somme des deux premiers Nombres qu'on cherche, $x + y \sim \frac{dz}{c}$, qui est conforme à celle de Diophante 3N, en prenant 1N pour z, &c. & au lieu de la premiere Equation precedente $x + y + z \sim a$, on aura celle-cy, $\frac{dz}{c} + z \sim a$, dans laquelle on trouvera le troisieme Nombre $z \sim \frac{ac}{c+d}$, qui est conforme à celuy de Diophante, 25. On trouvera aussy dans la premiere des deux Equations precedentes, $sx \sim ry + rz$, la somme des deux derniers Nombres qu'on cherche, $y + z \sim \frac{sx}{r}$, qui est conforme à celle de Diophante, 4N, en prenant 1N, pour x, &c. & au lieu de la premiere Equation precedente $x + y + z \sim a$, on aura celle-cy, $x + \frac{sx}{r} \sim a$, dans laquelle on trouvera le premier Nombre $x \sim \frac{ar}{r+s}$, comme Diophante. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront

$\frac{ar}{s}.$

$y.$

$\frac{ac}{c+d}.$

qui sont conformes à ceux de Diophante, en supposant

$y \sim 1N.$

$r \sim 1.$

$s \sim 4.$

$c \sim 1.$

$d \sim 3.$

$a \sim 100.$

& au lieu de la même Equation $x + y + z \sim a$, on aura celle-cy, $\frac{ar}{r+s} + y + \frac{ac}{c+d} \sim a$,

dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{ads - acr}{cr+dr+cs+ds}$. Ainsy les trois nombres qu'on cherche, seront les mêmes qu'auparavant.

Nous ajouterons icy les Questions suivantes.

I.

Trouver trois Nombres, dont la somme soit égale à vn Nombre donné, en sorte que la raison du premier à la difference des deux autres, & du dernier à la difference des deux autres, soit donnée.

On propose de trouver trois Nombres

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$

dont la somme $x+y+z$ soit égale au nombre donné $100 \sim a$, en sorte que le premier x soit à la difference $y-z$ des deux derniers, comme $11 \sim r$, à $4 \sim s$, & que le dernier z soit à la difference $x-y$, des deux premiers, comme $5 \sim c$, à $2 \sim d$.

Si par la somme du Plan sous l'antecedent de la premiere raison donnée & la somme sous le consequent de la seconde raison donnée & le triple de son consequent, & du Plan sous le consequent de la premiere raison donnée & l'excez du consequent sur l'antecedent de la seconde, on divise le Solide sous le Nombre donné & la somme du Plan sous les antecedens & du Plan sous les consequens des deux raisons données; on aura le second des trois Nombres qu'on cherche: & si par la même somme on divise le Solide sous le Nombre donné & le Plan sous l'antecedent de la premiere raison donnée & l'excez de l'antecedent sur le consequent de la premiere, on aura le troisieme Nombre: & si du Nombre donné on ôte la somme des deux Nombres trouvez, on aura le premier. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$$x+y+z \sim a.$$

& ces deux analogies,

$$x,\ y-z :: r,\ s.$$
$$z,\ x-y :: c,\ d,$$

desquelles on tire ces deux Equations,

$$sx \sim ry - rz.$$
$$dz \sim cx - cy.$$

Ainsy on aura ces trois Equations à resoudre,

$$x+y+z \sim a.$$
$$sx \sim ry - rz.$$
$$dz \sim cx - cy.$$

Dans la premiere $x+y+z \sim a$, on trouvera $x \sim a-y-z$, & les deux dernieres se changeront en ces deux autres,

$$as-sy-sz \sim ry-rz.$$
$$dz \sim ac-2cy.$$

Dans la seconde $dz \sim ac-2cy$, on trouvera $z \sim \frac{ac-2cy}{d}$, & la premiere $as-sy-sz \sim ry-rz$, se changera en celle-cy, $as-sy-\frac{acs+2csy}{d} \sim ry-\frac{acr+2cry}{d}$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{acr+ads}{3cr-cs+dr+ds}$, & au lieu de $z \sim \frac{ac-2cy}{d}$, on aura $z \sim \frac{acr-acs}{3cr-cs+dr+ds}$, & au lieu de $x \sim a-y-z$, on aura $x \sim \frac{acr+adr}{3cr-cs+dr+ds}$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche seront tels,

$$\frac{acr+adr,\ acr+ads,\ acr-acs}{3cr-cs+dr+ds}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 100.$$
$$r \sim 11.$$
$$s \sim 4.$$
$$c \sim 5.$$
$$d \sim 2.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

44.

36.

20.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard de la premiere raison donnée $\frac{r}{s}$, est que l'antecedent r, doit être plus grand que le consequent s, à cause du Numerateur $acr-acs$, du troisieme Nombre trouvé. D'où il suit que cette raison Ne peut pas être Une raison d'égalité.

Mais premiere raison donnée $\frac{r}{s}$ peut bien être Une raison d'égalité, & alors les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2ar,\ ar+as,\ ar-as}{4r}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 100.$$
$$r \sim 11.$$
$$s \sim 4.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

50.

$34\frac{1}{11}$.

$15.\frac{10}{11}$.

On tire de cette solution indefinie, le canon suivant.

Canon. Le premier des trois Nombres qu'on cherche, est égal à la moitié du Nombre donné: & si par le quadruple du premier terme de la

raison donnée, on diuise le Plan sous le Nombre donné & la somme des deux termes de la raison donnée, & le Plan sous le même Nombre donné & la difference des mêmes termes; on aura le second & le troisieme nombre.

Les deux raisons données $\frac{r}{s}$, $\frac{c}{d}$, peuuent aussy égales entre elles, & alors les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{acc+acd,\ acc+add,\ acc-acd}{3cc+dd}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 100.$$
$$c \backsim 5.$$
$$d \backsim 2.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$44.\tfrac{24}{79}.$$
$$36.\tfrac{56}{79}.$$
$$18.\tfrac{78}{79}.$$

On tire de cette solution indefinie le canon suiuant.

Si par la somme du quarré du consequent & du triple du quarré de l'antecedent de la raison donnée, on diuise le Solide sous le Nombre donné & la somme des quarrez des deux termes de la raison donnée; on aura le second des trois Nombres qu'on cherche: & si par la même somme on diuise le solide sous le Nombre donné & le Plan sous l'antecedent de la raison donnée & la somme des termes de la même raison, & le solide sous le Nombre donné & le Plan sous l'antecedent de la raison donnée & l'excez de l'antecedent sur le consequent; on aura le premier & le troisieme Nombre. Canon.

II.

Trouuer quatre Nombres, dont la somme soit égale à Un Nombre donné, en sorte que la raison du premier à la somme des trois derniers, & la raison du dernier à la somme des trois premiers, & encore la raison de la somme des deux premiers à la somme des deux derniers, soit donnée.

On propose de trouuer quatre Nombres,

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$
$$\omega.$$

dont la somme $x+y+z+\omega$ soit égale au Nombre donné $540 \backsim a$, en sorte que le premier x, soit à la somme $y+z+\omega$ des trois autres,

comme $2 \backsim r$, à $7 \backsim s$: que le dernier ω soit à la somme $x+y+z$ des trois autres, comme $5 \backsim b$, à $13 \backsim c$: & que la somme $x+y$, des deux premiers soit à la somme $z+\omega$ des deux derniers, comme $25 \backsim d$, à $29 \backsim m$.

Canon. Si par la somme des deux termes de la premiere raison donnée, on diuise le Plan sous l'antecedent & le Nombre donné ; on aura le premier des quatre Nombres qu'on cherche : & pareillement si par la somme des deux termes de la seconde raison donnée, on diuise le Plan sous l'antecedent & le Nombre donné ; on aura le dernier : lequel étant ôté du quotient qui viendra en diuisant par la somme des deux termes de la troisieme raison donnée le Plan sous le consequent & le Nombre donné ; on aura le troisieme : & si du Nombre donné on ôte la somme des trois Nombres trouuez on aura le second.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$$x+y+z+\omega \backsim a.$$

& ces trois analogies,

$$x,\ y+z+\omega :: r,\ s.$$
$$\omega,\ x+y+z :: b,\ c.$$
$$x+y,\ z+\omega :: d,\ m.$$

On tire de l'Equation precedente, ces autres quatre,

$$x+y+z \backsim a-\omega.$$
$$y+z+\omega \backsim a-x.$$
$$x+y \backsim a-z-\omega.$$
$$z+\omega \backsim a-x-y.$$

qui changent les trois analogies precedentes en ces trois autres,

$$x,\ a-x :: r,\ s.$$
$$\omega,\ a-\omega :: b,\ c.$$
$$a-z-\omega,\ a-x-y :: d,\ m.$$

desquelles on tire ces trois Equations,

$$sx \backsim ar-rx.$$
$$c\omega \backsim ab-b\omega.$$
$$am-mz-m\omega \backsim ad-dx-dy.$$

Ainsy on aura ces quatre Equations à resoudre,

$$x+y+z+\omega \backsim a.$$
$$sx \backsim ar-rx.$$
$$c\omega \backsim ab-b\omega.$$
$$am-mz-m\omega \backsim ad-dx-dy.$$

Dans la seconde $sx \backsim ar-rx$, on trouuera $x \backsim \frac{ar}{r+s}$, & dans la troisieme

troisieme $c\omega \sim ab - b\omega$, on trouuera $\omega \sim \frac{ab}{b+c}$, & la quatrieme $am - mz - m\omega \sim ad - dx - dy$, se changera en celle-cy, $\frac{acm}{b+c} - mz \sim \frac{ds}{r+s} - dy$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{as}{r+s} + \frac{mz}{d} - \frac{acm}{bd+cd}$, & la premiere $x+y+z+\omega \sim a$, se changera en celle-cy, $a + \frac{mz}{d} - \frac{acm}{bd+cd} + z + \frac{ab}{b+c} \sim a$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{am}{d+m} - \frac{ab}{b+c}$, & au lieu de $y \sim \frac{as}{r+s} + \frac{mz}{d} - \frac{acm}{bd+cd}$, on aura $y \sim \frac{as}{r+s} - \frac{am}{d+m}$. Ainsy les quatre Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ar}{r+s}.$$
$$\frac{as}{r+s} - \frac{am}{d+m}.$$
$$\frac{am}{d+m} - \frac{ab}{b+c}.$$
$$\frac{ab}{b+c}.$$

Parceque Nous auons supposé

$a \sim 540.$
$r \sim 2.$
$s \sim 7.$
$b \sim 5.$
$c \sim 13.$
$d \sim 25.$
$m \sim 29.$

les quatre Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

120.
130.
140
150.

La determination de cette Question, à l'égard des trois raisons données $\frac{r}{s}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{m}$, est que la fraction $\frac{s}{r+s}$ doit être plus grande que la fraction $\frac{m}{d+m}$, & que cette fraction $\frac{m}{d+m}$ doit être plus grande que la fraction $\frac{b}{b+c}$, comme il est aisé de voir dans les deux moyens des quatre Nombres trouuez. Determination.

Ou bien on peut dire que le Nombre m doit être plus grand que $\frac{bd}{c}$, & moindre que $\frac{ds}{r}$. Car à cause de $\frac{m}{d+m} \oplus \frac{b}{b+c}$, en multipliant par $b+c$, on aura $\frac{bm+cm}{d+m} \oplus b$, & en multipliant par $d+m$, on aura $bm+cm \oplus bd+bm$, & par consequent $cm \oplus bd$, ou $m \oplus \frac{bd}{c}$. Ce qui est l'vne des choses qu'il faloit demontrer. Demonstration.

Pareillement à cause de $\frac{s}{r+s} \oplus \frac{m}{d+m}$, en multipliant par $d+m$, on aura $\frac{ds+ms}{r+s} \oplus m$, & en multipliant par $r+s$, on aura $ds+ms \oplus mr + ms$, & par consequent $ds \oplus mr$, ou $\frac{ds}{r} \oplus m$. Ce qui restoit à demontrer.

Question XXIII. & XXIV.

Trouuer trois nombres, tels que l'excez du plus grand sur le moyen soit égal à une partie donnée du plus petit, que l'excez du moyen sur le plus petit soit égal à une partie donnée du plus grand, & que l'excez du plus petit sur une partie donnée du moyen soit égal à un nombre donné.

On propose de trouuer trois nombres

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$

en sorte que l'excez $x-y$ du plus grand x sur le moyen y, soit égal à la partie donnée $\frac{1}{2}z \backsim \frac{rz}{s}$, du plus petit z; que l'excez $y-z$ du moyen y sur le plus petit z soit égal à la partie donnée $\frac{1}{3}x \backsim \frac{cx}{d}$, du plus grand x; & que l'excez $z-\frac{m}{n}y$ du plus petit z sur la partie donnée $\frac{1}{4}y \backsim \frac{m}{n}y$ du moyen y, soit égal au nombre donné $9 \backsim a$.

Canon. Si des six termes $r, s, c, d, m, n,$ des trois parties données, on multiplie le solide sous le nombre donné le quatrieme & le sixieme terme par la somme des deux premiers, & le solide sous le nombre donné le second & le sixieme terme par l'excez du quatrieme sur le troisieme, & qu'on multiplie encore le plan sous le nombre donné & le sixieme terme par la somme du plan sous le deuxieme & le quatrieme terme & du plan sous le premier & le troisieme, & qu'on diuise chaque plan-plan par l'excez du solide sous le deuxieme le quatrieme & le sixieme terme sur la somme du solide sous le second le troisieme & le sixieme, du solide sous le premier le troisieme & le cinquieme, & du solide sous le deuxieme le quatrieme & le cinquieme; on aura les trois nombres qu'on cherche, dont le premier sera le plus grand, & le second sera le plus petit.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$$x-y \backsim \frac{r}{s}z.$$
$$y-z \backsim \frac{c}{d}x.$$
$$z-\frac{m}{n}y \backsim a.$$

Dans la premiere $x-y \backsim \frac{r}{s}z$, on trouuera $x \backsim y+\frac{r}{s}z$, & les deux dernieres se changeront en ces deux autres,

$$y-z \backsim \frac{c}{d}y+\frac{cr}{ds}z.$$
$$z-\frac{m}{n}y \backsim a.$$

Dans la deuxieme $z-\frac{m}{n}y \backsim a$, on trouuera $y \backsim \frac{nz-an}{m}$, & la premiere $y-z \backsim \frac{c}{d}y+\frac{cr}{ds}z$, se changera en celle-cy, $\frac{nz-an}{m}-z \backsim \frac{cnz-can}{dm}+$

$\frac{crz}{ds}$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{adns - acns}{dns - cns - cmr - dms}$, & au lieu de $y \sim \frac{nz - an}{m}$, on aura $y \sim \frac{adns + acrn}{dns - cns - cmr - dms}$, & enfin au lieu de $x \sim y + \frac{r}{s}z$, on aura $x \sim \frac{adns + adnr}{dns - cns - cmr - dms}$. Ainsy les trois nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{adns + adnr,\ adns + acnr;\ adns - acns}{dns - cns - cmr - dms}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 9.$$
$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 3$$
$$m \sim 1.$$
$$n \sim 4.$$

les trois nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

36.

28.

16.

La determination de cette Question, est que d doit être plus grand que c, à cause du Numerateur $adns - acns$, du troisieme Nombre trouué, Determination.
& que le Solide dns doit être plus grand que la somme des trois $cns + cmr + dms$, à cause du denominateur commun $dns - cns - cmr - dms$.

Pour resoudre cette Question comme Diophante, supposez $y \sim \frac{d\omega}{c}$, Metode de Diophante.
& les trois Equations precedentes se changeront en ces trois autres,

$$x - \frac{d\omega}{c} \sim \frac{r}{s}z.$$
$$\frac{d\omega}{c} - z \sim \frac{cx}{d}.$$
$$z - \frac{dm\omega}{cn} \sim a.$$

Dans la derniere $z - \frac{dm\omega}{cn} \sim a$, on trouuera $z \sim \frac{dm\omega}{n} + a$, & la seconde $\frac{d\omega}{c} - z \sim \frac{cx}{d}$, se changera en celle-cy, $\frac{d\omega}{c} - \frac{dm\omega}{cn} - a \sim \frac{cx}{d}$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{ddn\omega}{ccn} - \frac{ddm\omega}{ccn} - \frac{ad}{c}$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ddn\omega - ddm\omega}{ccn} - \frac{ad}{c}.$$
$$\frac{d\omega}{c}$$
$$\frac{dm\omega}{cn} + a.$$

qui sont conformes à ceux de Diophante,

6N − 30.

3N.

1N + 10.

en supposant

$$\omega \sim 1N.$$

$a \sim 10.$
$r \sim 1.$
$s \sim 3.$
$c \sim 1.$
$d \sim 3.$
$m \sim 1.$
$n \sim 3.$

comme Diophante: & si à la place de x, on substitue sa valeur trouvée $\frac{ddn\omega - ddm\omega}{ccn} - \frac{ad}{c}$, la premiere Equation $x - \frac{d\omega}{c} \sim \frac{rz}{s}$, se changera en celle-cy, $\frac{ddn\omega - ddm\omega}{ccn} - \frac{d\omega - ad}{c} \sim \frac{rz}{s}$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{ddns\omega - ddms\omega - cdns\omega}{ccnr} - \frac{ads}{cr}$, comme Diophante, & parceque nous auons encore trouué $z \sim \frac{dm\omega}{cn} + a$, nous aurons cette Equation, $\frac{ddns\omega - ddms\omega - cdns\omega}{ccnr} - \frac{ads}{cr} \sim \frac{dm\omega}{cn} + a$, dans laquelle on trouuera $\omega \sim \frac{acdns + accnr}{ddns - ddms - cdns - cdmr}$, & les trois nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Parceque nous auons supposé

$a \sim 10.$
$r \sim 1.$
$s \sim 3.$
$c \sim 1.$
$d \sim 3.$
$m \sim 1.$
$n \sim 3.$

les trois nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

45.
$37\frac{1}{2}$.
$22\frac{1}{2}$.

Solution en nombres entiers. Si vous voulez que la solution se fasse toujours en nombres entiers, il faudra mettre pour a, le denominateur commun des trois nombres trouuez, sauoir $dns - cns - cmr - dms$, ou 8, & alors les trois nombres qu'on cherche, seront tels,

36.
30.
18.

Seconde metode de Diophante. Si vous voulez suiure l'autre metode de Diophante, laquelle fait la Quest. XXIV. ayant trouué comme dans sa premiere metode, $z \sim \frac{dm\omega}{cn} + a$, la deuxieme Equation, $x - \frac{d\omega}{c} \sim \frac{rz}{s}$, se changera en celle-cy, $x - \frac{d\omega}{c} \sim \frac{dmr\omega}{cns} + \frac{ar}{s}$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{dmr\omega + dns\omega}{cns} + \frac{ar}{s}$. Ainsy les trois nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{\partial mr\omega + \partial ns\omega}{cns} + \frac{as}{r}.$$

$$\frac{\partial\omega}{c}.$$

$$\frac{\partial m\omega}{cn} + a.$$

qui sont conformes à ceux de Diophante,

$$\frac{10N + 10}{3}.$$

$$3N.$$

$$1N + 10.$$

en supposant

$$\omega \sim 1N.$$

$$a \sim 10.$$

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 3.$$

$$c \sim 1.$$

$$\partial \sim 3.$$

$$m \sim 1.$$

$$n \sim 3.$$

& la seconde Equation $\frac{\partial\omega}{c} - z \sim \frac{cx}{\partial}$, se changera en celle-cy, $\frac{\partial\omega}{c} - \frac{\partial m\omega}{cn} - a \sim \frac{mr\omega + ns\omega}{ns} - \frac{acr}{\partial s}$, dans laquelle on trouuera $\omega \sim \frac{ac\partial ns + accnr}{\partial\partial ns - \partial\partial ms - c\partial ns - c\partial mr}$, comme auparauant. c'est pourquoy les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront aussy les mêmes qu'auparauant.

On void aisément par les trois parties de Diophante, que les trois parties données $\frac{r}{s}$, $\frac{c}{\partial}$, $\frac{m}{n}$, peuuent être égales entre elles, & alors les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a\partial\partial\partial + ac\partial\partial,\ a\partial\partial\partial + acc\partial,\ a\partial\partial\partial - ac\partial\partial}{\partial\partial\partial - 2c\partial\partial - ccc}.$$

où l'on void que ∂ doit être plus grand que $2c$, à cause du denominateur commun $\partial\partial\partial - 2c\partial\partial - ccc$.

Parceque nous auons supposé

$$a \sim 10.$$

$$c \sim 1.$$

$$\partial \sim 3.$$

les trois nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$45.$$

$$37\tfrac{1}{2}.$$

$$22\tfrac{1}{2}.$$

& si on suppose $a \sim 8$, pour auoir vne solution en entiers, les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$36.$$

$$30.$$

$$18.$$

Question XXV.

Trouver trois nombres, tels que si de chacun on ôte sa partie donnée, & qu'au reste on ajoute la partie donnée du nombre precedent; les trois sommes soient égales entre elles.

On propose de trouver trois nombres

x.

y.

z.

en sorte que si du premier x on ôte sa partie donnée $\frac{1}{3}x \sim \frac{r}{s}x$, & qu'au reste $x - \frac{r}{s}x$ on ajoute la partie donnée $\frac{1}{5}z \sim \frac{m}{n}z$ du troisieme z: & que si du second y on ôte sa partie donnée $\frac{1}{4}y \sim \frac{c}{d}y$, & qu'au reste $y - \frac{c}{d}y$ on ajoute la partie donnée $\frac{r}{s}x$ du premier x: & encore, que si du troisieme z on ôte sa partie donnée $\frac{m}{n}z$, & qu'au reste $z - \frac{m}{n}z$ on ajoute la partie donnée $\frac{c}{d}y$, du second y, les trois sommes $x - \frac{r}{s}x + \frac{m}{n}z$, $y - \frac{c}{d}y + \frac{r}{s}x$, $z - \frac{m}{n}z + \frac{c}{d}y$, soient égales entre elles.

Si des six nombres donnez r, s, m, n, c, d, on ajoute au solide sous le deuxieme, le quatrieme, & l'excez du sixieme sur le cinquieme, le solide sous le deuxieme le troisieme & l'excez du triple du cinquieme sur le double du sixieme; on aura le premier des trois nombres qu'on cherche: & si au solide sous le deuxieme le sixieme & l'excez du quatrieme sur le troisieme on ajoute le solide sous le premier le sixieme & l'excez du triple du troisieme sur le double du quatrieme; on aura le second nombre qu'on cherche: & enfin si au solide sous le quatrieme le sixieme & l'excez du second sur le premier, on ajoute le solide sous le quatrieme le cinquieme & l'excez du triple du premier sur le double du second; on aura le troisieme nombre qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x - \frac{rx}{s} + \frac{mz}{n} \sim y - \frac{cy}{d} + \frac{rx}{s}.$$

$$z - \frac{mz}{n} + \frac{cy}{d} \sim x - \frac{rx}{s} + \frac{mz}{n}.$$

Dans la premiere $x - \frac{rx}{s} + \frac{mz}{n} \sim y - \frac{cy}{d} + \frac{rx}{s}$, on trouvera $x \sim \frac{nsdy - nscy - msdz}{dns - 2dnr}$, & la seconde $z - \frac{mz}{n} + \frac{cy}{d} \sim x - \frac{rx}{s} + \frac{mz}{n}$, se changera en celle-cy, $z - \frac{mz}{n} + \frac{cy}{d} \sim \frac{dnsy - cnsy - dnry + cnry - dmrz}{dns - 2dnr}$, dans laquelle on trouvera en entiers,

$$y \sim dns - 2dnr - dms + 3dmr.$$

$$z \sim dns - 2cns - dnr + 3cnr.$$

& au lieu de $x \sim \frac{dnsy - cnsy - dmsy}{dns - 2dnr}$, on aura $x \sim dns - cns - 2dms + 3cms$.

Ainsy les trois nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\partial ns - cns - 2\partial ms + 3cms.$$
$$\partial ns - \partial ms - 2\partial nr + 3\partial mr.$$
$$\partial ns - \partial nr - 2cns + 3cnr.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 3.$$
$$m \sim 1.$$
$$n \sim 5.$$
$$c \sim 1.$$
$$\partial \sim 4.$$

les trois nombres qu'on cherche, seront en moindres termes de cette grandeur;

$$6.$$
$$4.$$
$$5.$$

Diophante resoud cette Question ainsy. Mettez $\frac{s\omega}{r}$ pour le premier nombre x, afinqu'il ait sa partie donnée $\frac{r}{s}$, & $\frac{a\partial}{c}$ pour le second nombre y, afinqu'il ait sa partie donnée $\frac{c}{\partial}$, & les deux Equations precedentes se changeront en ces deux autres, Metode de Diophante.

$$\frac{s\omega}{r} - \omega + \frac{mz}{n} \sim \frac{a\partial}{c} - a + \omega.$$
$$z - \frac{mz}{n} + a \sim \frac{s\omega}{r} - \omega + \frac{mz}{n}.$$

Dans la premiere $\frac{s\omega}{r} - \omega + \frac{mz}{n} \sim \frac{a\partial}{c} - a + \omega$, on trouuera $z \sim \frac{a\partial n}{cm} - \frac{an}{m} + \frac{2n\omega}{m} - \frac{ns\omega}{mr}$, & les trois nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{s\omega}{r}.$$
$$\frac{a\partial}{c}.$$
$$\frac{a\partial n}{cm} - \frac{an}{m} + \frac{2n\omega}{m} - \frac{ns\omega}{mr}.$$

qui sont conformes à ceux de Diophante,

$$3N.$$
$$4.$$
$$15 - 5N.$$

en supposant

$$\omega \sim 1N.$$
$$r \sim 1.$$
$$s \sim 3.$$
$$m \sim 1.$$
$$n \sim 5.$$
$$c \sim 1.$$
$$\partial \sim 4.$$
$$a \sim 1.$$

& au lieu de la seconde Equation, $z - \frac{mz}{n} + a \sim \frac{s\omega}{r} - \omega + \frac{mz}{n}$, on aura

celle-cy, $\frac{adn}{cm} - \frac{an}{m} + \frac{2n\omega}{m} - \frac{ns\omega}{rm} - \frac{ad}{c} + 2a - 2\omega + \frac{s\omega}{r} \sim \frac{ad}{c} - a + \omega$, dans laquelle on trouuera en entiers,

$$\omega \sim dnr - cnr - 2dmr + 3cmr.$$

$$a \sim cns - cms - 2cnr + 3cmr.$$

& les trois nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Question XXVI.

Trouuer quatre Nombres, tels que si de châcun on ôte sa partie donnée, & qu'au reste on ajoute la partie donnée du Nombre precedent, les quatre sommes soient égales entre elles.

On propose de trouuer quatre Nombres

x.
y.
z.
ω.

en sorte que si du premier x, on ôte sa partie donnée $\frac{1}{3}x \sim \frac{r}{s}x$, & qu'au reste $x - \frac{r}{s}x$ on ajoute la partie donnée $\frac{1}{6}\omega \sim \frac{a}{b}\omega$ du quatrieme ω; Que si du second y, on ôte sa partie donnée $\frac{1}{4}y \sim \frac{cy}{d}$, & qu'au reste $y - \frac{c}{d}y$ on ajoute la partie donnée $\frac{r}{s}x$ du premier x; Que si du troisieme z on ôte sa partie donnée $\frac{1}{5}z \sim \frac{m}{n}z$, & qu'au reste $z - \frac{m}{n}z$ on ajoute la partie donnée $\frac{c}{d}y$ du second y; Que si du quatrieme ω, on ôte sa partie donnée $\frac{a}{b}\omega$, & qu'au reste $\omega - \frac{a}{b}\omega$ on ajoute la partie donnée $\frac{m}{n}z$ du troisieme z, les quatre sommes $x - \frac{r}{s}x + \frac{a\omega}{b}$, $y - \frac{cy}{d} + \frac{rx}{s}$, $z - \frac{mz}{n} + \frac{cy}{d}$, $\omega - \frac{a\omega}{b} + \frac{mz}{n}$, soient égalas entre elles.

Canon. Si des huit Nombres donnez r, s, a, b, c, d, m, n, on ajoute au Plan-plan sous le deuxieme le quatrieme le sixieme & l'excez du huitieme sur le septieme, le Plan-plan sous le deuxieme le quatrieme le cinquieme & l'excez du septieme sur le huitieme, & le Plan-plan sous le deuxieme le troisieme le sixieme & l'excez du triple du septieme sur le double du huitieme, & encore le Plan-plan sous le deuxieme le troisieme le cinquieme & l'excez du double du huitieme sur le quadruple du septieme, on aura le premier des quatre Nombres qu'on cherche.

Si au Plan-plan sous le deuxieme le quatrieme le sixieme & l'excez du huitieme sur le septieme, on ajoute le Plan-plan sous le deuxieme le troisieme le sixieme & l'excez du septieme sur le huitieme, & le double du Plan-plan sous le premier le quatrieme le sixieme & l'excez du septieme sur huitieme, & encore le Plan-plan sous le premier le troisieme le sixieme & l'excez du triple du huitieme sur le quadruple

quadruple du septieme; on aura le second des quatre Nombres qu'on cherche.

Si au Plan-plan sous le quatrieme le sixieme le huitieme & l'excez du second sur le premier, on ajoute le Plan-plan sous le troisieme le sixieme le huitieme & l'excez du premier sur le second, & le Plan-plan sous le quatrieme le cinquieme le huitieme & l'excez du triple du premier sur le double du second, & encore le Plan-plan sous le troisieme le cinquieme le huitieme & l'excez du double du second sur le quadruple du premier; on aura le troisieme des quatre Nombres qu'on cherche.

Enfin si au Plan-plan sous le quatrieme le sixieme le huitieme & l'excez du second sur le premier, on ajoute le Plan-plan sous le quatrieme le cinquieme le huitieme & l'excez du premier sur le second, & le Plan-plan sous le deuxieme le quatrieme le septieme & l'excez du triple du cinquieme sur le double du sixieme, & encore le Plan-plan sous le premier le quatrieme le septieme & l'excez du double du sixieme sur le quadruple du cinquieme; on aura le dernier des quatre Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$$x-\frac{rx}{s}+\frac{a\omega}{b}\sim y-\frac{cy}{d}+\frac{rx}{s}.$$
$$y-\frac{cy}{d}+\frac{rx}{s}\sim z-\frac{mz}{n}+\frac{cy}{d}.$$
$$z-\frac{mz}{n}+\frac{cy}{d}\sim \omega-\frac{a\omega}{b}+\frac{mz}{n}.$$

Dans la premiere $x-\frac{rx}{s}+\frac{a\omega}{b}\sim y-\frac{cy}{d}+\frac{rx}{s}$, on trouvera $x\sim\frac{bdsy-bcsy-ads\omega}{bds-2bdr}$, & dans la troisieme $z-\frac{mz}{n}+\frac{cy}{d}\sim\omega-\frac{a\omega}{b}+\frac{mz}{n}$, on trouvera $z\sim\frac{bdn\omega-adn\omega-bcny}{bdn-2bdm}$, & la deuxieme $y-\frac{cy}{d}+\frac{rx}{s}\sim z-\frac{mz}{n}+\frac{cy}{d}$, se changera en celle-cy, $\frac{bdsy-bcsy-bdry+bcry-adr\omega}{bds-2bdr}\sim\frac{bdn\omega-adn\omega-bdm\omega+adm\omega-bcny}{bdn-2bdm}$, dans laquelle on trouvera en entiers,

$$y\sim bdns-adns-bdms+adms-2bdnr+3adnr+2bdmr-4admr.$$
$$\omega\sim bdns-bcns-bdnr+bcnr-2bdms+3bcms+2bdmr-4bcmr.$$

& au lieu de $x\sim\frac{bdsy-bcsy-ads\omega}{bds-2bdr}$, & de $z\sim\frac{bdn\omega-adn\omega-bcny}{bdn-2bdm}$, on aura

$$x\sim bdns-bdms-bcns+bcms-2adns+3adms+2acns-4acms.$$
$$z\sim bdns-bdnr-adns+adnr-2bcns+3bcnr+2acns-4acnr.$$

Ainsy les quatre Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$bdns-bdms-bcns+bcms-2adns+3adms+2acns-4acms.$$
$$bdns-bdms-adns+adms-2bdnr+3adnr+2bdmr-4admr.$$
$$bdns-bdnr-adns+adnr-2bcns+3bcnr+2acns-4acnr.$$
$$bdns-bdnr-bcns+bcnr-2bdms+3bcms+2bdmr-4bcmr.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r\sim 1.$$

$s \sim 3.$

$a \sim 1.$

$b \sim 6.$

$c \sim 1$

$d \sim 4.$

$m \sim 1.$

$n \sim 5.$

les quatre nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

150.

92.

120.

114.

La metode dont Diophante se sert pour resoudre cette Question, est la même que celle dont il s'est servi pour resoudre la precedente: & comme elle n'a rien de particulier, nous n'en parlerons pas davantage.

Question XXVII.

Trouver trois Nombres, tels que si à chacun on ajoute une partie donnée de la somme des deux autres, les trois sommes soient égales entre elles.

On propose de trouver trois Nombres

$x.$

$y.$

$z.$

en sorte que si au premier x, on ajoute la partie donnée $\frac{y+z}{3} \sim \frac{ry+rz}{s}$ de la somme des deux autres: que si au second y, on ajoute la partie donnée $\frac{z+x}{4} \sim \frac{cz+cx}{d}$ de la somme des deux autres: & que si au troisieme z, on ajoute la partie donnée $\frac{x+y}{5} \sim \frac{mx+my}{n}$ de la somme des deux autres, les trois sommes $x+\frac{ry+rz}{s}$, $y+\frac{cx+cz}{d}$, $z+\frac{mx+my}{n}$, soient égales entre elles.

Canon. Si des six Nombres donnez r, s, c, d, m, n, on ajoute au Solide sous le quatrieme le sixieme & l'excez du second sur le double du premier, le Solide sous le premier & la somme du Plan sous le troisieme & le sixieme & du Plan sous le quatrieme & le cinquieme, & que de la somme on ôte le Solide sous le deuxieme le troisieme & le cinquieme; on aura le premier des trois Nombres qu'on cherche.

Si au Solide sous le deuxieme le sixieme & l'excez du quatrieme sur le double du troisieme, on ajoute le Solide sous le troisieme

& la somme du Plan sous le premier & le sixieme, & du Plan sous le deuxieme & le cinquieme; on aura le second des trois nombres qu'on cherche.

Si au Solide sous le cinquieme & la somme du Plan sous le premier & le quatrieme & du Plan sous le deuxieme & le troisieme, & que de la somme on ôte le Solide sous le premier le troisieme & le sixieme; on aura le dernier des trois Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+\frac{ry+rz}{s}\sim y+\frac{cx+cz}{d}.$$
$$y+\frac{cx+cz}{d}\sim z+\frac{mx+my}{n}.$$

Dans la premiere $x+\frac{ry+rz}{s}\sim y+\frac{cx+cz}{d}$, on trouvera $x\sim\frac{dsy-dry+csz-crz}{ds-cs}$, & la seconde $y+\frac{cx+cz}{d}\sim z+\frac{mx+my}{n}$, se changera en celle-cy, $\frac{dsy-cry+csz-crz}{ds-cs}\sim z+\frac{my}{n}+\frac{dmsy-dmry+cmsz-dmrz}{dns-cns}$, dans laquelle on trouvera en entiers,

$$y\sim dns-dmr-2cns+cnr+cms.$$
$$z\sim dns-cnr-2dms+dmr+cms.$$

& au lieu de $x\sim\frac{dsy-dry+csz-crz}{ds-cs}$, on aura $x\sim dns-cms-2dnr-dmr+cnr$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$dns-cms-2dnr+dmr+cnr.$$
$$dns-dmr-2cns+cnr+cms.$$
$$dns-cnr-2dms+dmr+cms.$$

Parceque Nous avons Supposé

$$r\sim 1.$$
$$s\sim 3.$$
$$c\sim 1$$
$$d\sim 4.$$
$$m\sim 1$$
$$n\sim 5.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront en Moindres termes de cette grandeur,

13.
17.
19.

Pour resoudre cette Question par la Metode de Diophante, supposez $y+z\sim\frac{as}{r}$, afinque cette somme $y+z$ ait sa partie donnée $\frac{r}{s}$, & par l'antitheze Vous aurez Metode de Diophante.

$$z\sim\frac{as}{r}-y.$$
$$y\sim\frac{as}{r}-z.$$

Si à la place de z on met sa valeur trouvée $\frac{as}{r}-y$, la premiere Equation $x+\frac{ry+rz}{s}\sim y+\frac{cx+cz}{d}$, se changera en celle-cy, $x+a\sim y+\frac{cx}{d}+$

$+\frac{acs}{r}-\frac{cy}{d}$, dans laquelle on trouuera $y \sim x+\frac{adr-acs}{dr-cr}$; & si à la place de y, on met sa premiere valeur trouuée $\frac{as}{r}-z$ la seconde Equation $y+\frac{cx+cz}{d} \sim z+\frac{mx+my}{n}$, se changera en celle-cy, $x+a \sim z+\frac{mx-mz}{n}+\frac{ams}{rn}$, dans laquelle on trouuera $z \sim x+\frac{anr-ams}{nr-mr}$. Ainsy les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$
$$x+\frac{adr-acs}{dr-cr}.$$
$$x+\frac{anr-ams}{nr-mr}.$$

qui sont conformes aux trois Nombres de Diophante,

$$1N.$$
$$1N+\frac{1}{3}.$$
$$1N+\frac{1}{2}.$$

en supposant

$$x \sim 1N.$$
$$r \sim 1.$$
$$s \sim 3.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 4.$$
$$m \sim 1.$$
$$n \sim 5$$
$$a \sim 1.$$

& au lieu de l'Equation supposée $y+z \sim \frac{as}{r}$, on aura celle-cy, $2x+\frac{adr-acs}{dr-cr}+\frac{anr-ams}{nr-mr} \sim \frac{as}{r}$, dans laquelle on trouuera en entiers,

$$a \sim 2dnr-2dmr-2cnr+2cmr.$$
$$x \sim dns-2dnr+dmr+cnr-cms.$$

& les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Question XXVIII.

Trouuer quatre Nombres, tels que si à chacun on ajoute une partie donnée de la somme des trois autres, les quatre sommes soient égales entre elles.

On propose de trouuer quatre Nombres

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$
$$\omega.$$

en sorte que si au premier x, on ajoute la partie donnée $\frac{y+z+\omega}{3} \sim \frac{ry+rz+r\omega}{s}$ de la somme des trois autres: que si au second y on ajoute la partie donnée $\frac{x+z+\omega}{4} \sim \frac{cx+cz+c\omega}{d}$, de la somme des trois

autres : que si au troisieme z, on ajoute la partie donnée $\frac{\omega+x+y}{s} \backsim \frac{m\omega+mx+my}{n}$ de la somme des trois autres : & que si au quatrieme ω on ajoute la partie donnée $\frac{x+y+z}{b} \backsim \frac{ax+ay+az}{b}$ de la somme des trois autres, les quatre sommes $x+\frac{ry+rz+r\omega}{s}$, $y+\frac{cx+cz+c\omega}{d}$, $z+\frac{m\omega+mx+my}{n}$, $\omega+\frac{ax+ay+az}{b}$, soient égales entre elles.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Equations,

$$x+\frac{ry+rz+r\omega}{s} \backsim y+\frac{cx+cz+c\omega}{d}.$$

$$x+\frac{ry+rz+r\omega}{s} \backsim z+\frac{m\omega+mx+my}{n}.$$

$$x+\frac{ry+rz+r\omega}{s} \backsim \omega+\frac{ax+ay+az}{b}.$$

Dans la premiere $x+\frac{ry+rz+r\omega}{s} \backsim y+\frac{cx+cz+c\omega}{d}$, on trouvera $x \backsim \frac{dsy-dry+csz-drz+cs\omega-dr\omega}{ds-cs}$, & les deux dernieres se changeront en ces deux autres,

$$\frac{dsy-cry+csz-crz+cs\omega-cr\omega}{ds-cs} \backsim$$
$$\frac{2dmsy-dmry-cmsy+cmsz-dmrz+dnsz-cnsz+dms\omega-dmr\omega}{bds-bcs}.$$

$$\frac{dsy-cry+csz-crz+cs\omega-cr\omega}{ds-cs} \backsim$$
$$\frac{2adsy-adry-acsy+adsz-adrz+acs\omega-adr\omega+bds\omega-bcs\omega}{bds-bcs}.$$

Dans la premiere de ces deux Equations, on trouvera

$$y \backsim \frac{cmsz-dmrz+dnsz-2cnsz+cnrz+dms\omega-dmr\omega-cns\omega+cnr\omega}{dmr-2dms+cms-cnr+dns},$$

& dans la deuxieme on trouvera le même

$$y \backsim \frac{adsz-adrz+bcrz+acs\omega-bcsz-adr\omega+bds\omega-2bcs\omega+bcr\omega}{adr-2ads+acs-bcr+bds}:$$

c'est pourquoy on aura cette Equation,

$$\frac{cmsz-dmrz+dnsz-2cnsz+cnrz+dms\omega-dmr\omega-cns\omega+cnr\omega}{dmr-2dms+cms-cnr+dns} \backsim$$
$$\frac{adsz-adrz+bcrz-bcsz+acs\omega-adr\omega+bds\omega-2bcs\omega+bcr\omega}{adr-2ads+acs-bcr+bds},$$

dans laquelle on trouvera en entiers,

$$\left.\begin{array}{l}+adr\\-acs\\-bds\\+2bcs\\-bcr\end{array}\right\}2dms \quad \left.\begin{array}{l}+acs\\-adr\\+bds\\-2bcs\\+bcr\end{array}\right\}dns \quad \left.\begin{array}{l}+dms\\-dmr\\-cns\\+cnr\end{array}\right\}2ads$$

$$\left.\begin{array}{l}+acs\\-adr\\+bds\\-2bcs\\+bcr\end{array}\right\}cms \quad \left.\begin{array}{l}+acs\\-adr\\+bds\\-2bcs\\+bcr\end{array}\right\}dmr \quad \left.\begin{array}{l}-dms\\+dmr\\+cns\\-cnr\end{array}\right\}acs$$

$$\left.\begin{array}{l}+adr\\-acs\\-bds\\+2bcs\\-bcr\end{array}\right\}cnr \quad \left.\begin{array}{l}-dms\\+dmr\\+cns\\-cnr\end{array}\right\}adr \quad \left.\begin{array}{l}+dms\\-dmr\\-cns\\+cnr\end{array}\right\}bcr \quad \left.\begin{array}{l}+dmr\\-dms\\+cns\\-cnr\end{array}\right\}bds$$

la valeur de z.

$$\left.\begin{array}{l}+dmr\\-cms\\-dns\\+2cns\\-cnr\end{array}\right\}2ads \quad \left.\begin{array}{l}+dmr\\-cms\\-dns\\+2cns\\-cnr\end{array}\right\}bcr \quad \left.\begin{array}{l}+ads\\-adr\\+bcr\\-bcs\end{array}\right\}2dms$$

$$\left.\begin{array}{l}+cms\\-dmr\\+dns\\-2cns\\+cnr\end{array}\right\}adr \quad \left.\begin{array}{l}+cms\\-dmr\\+dns\\-2cns\\+cnr\end{array}\right\}bds \quad \left.\begin{array}{l}+adr\\-ads\\-bcr\\+bcs\end{array}\right\}cms \quad \left.\begin{array}{l}+ads\\-adr\\+bcr\\-bcs\end{array}\right\}cnr$$

$$\left.\begin{array}{l}+cmr\\-dmr\\+dns\\-2cns\\+cnr\end{array}\right\}acs \quad \left.\begin{array}{l}+adr\\-ads\\-bcr\\+bcs\end{array}\right\}dmr \quad \left.\begin{array}{l}+adr\\-ads\\-bcr\\+bcs\end{array}\right\}dns$$

la valeur de ω.

Aprez quoy on pourra aisément connoitre les valeurs des deux autres quantitez inconnues x, y, ce que nous avons icy negligé pour éviter la peine du calcul, qui néanmoins n'est pas plus difficile que le precedent.

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 3.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 4.$$
$$m \sim 1.$$
$$n \sim 5.$$
$$a \sim 1.$$
$$b \sim 6.$$

les quatre nombres qu'on cherche, seront en moindres termes, tels,

47.

77.

92.

101.

Question XXIX.

Trouver Un Nombre, tel que si on le multiplie separément par deux Nombres donnez, l'Un des deux produits soit égal au quarré de l'autre.

On propose de trouver Un Nombre

$$x.$$

par lequel multipliant le Nombre donné $200 \sim a$, & le Nombre donné $5 \sim b$, le premier produit ax soit égal au quarré $bbxx$ du second bx.

Canon. On divise le premier Nombre donné par le quarré de l'autre, on aura le Nombre qu'on cherche.

Selon la condition, de la Question, on aura cette Equation,

$$llax \sim bbxx.$$

dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{lla}{bb}$, ou $x \sim \frac{a}{bb}$, en negligeant l'Unité l. Ainsy le Nombre qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{a}{bb}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 200.$$
$$b \sim 5.$$

le nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

8.

On auroit pû proposer cette Question ainsy; Trouver Un Nombre, lequel étant multiplié par Un nombre donné, & son quarré par Un quarré donné, les deux produits soient égaux.

Nous ajouterons icy les Questions suivantes.

I.

Trouuer Vn Nombre, tel que, si on le diuise separément par deux Nombres donnez, l'Vn des deux quotiens soit égal au quarré de l'autre.

On propose de trouuer Vn Nombre

$$x.$$

lequel étant diuisé par le nombre donné $2 \sim a$, & par le Nombre donné $6 \sim b$, le premier quotient $\frac{x}{a}$ soit égal au quarré $\frac{xx}{bb}$, du second $\frac{x}{b}$.

Si par le premier Nombre donné on diuise le quarré du second, on aura le Nombre qu'on cherche. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$$\frac{x}{a} \sim \frac{xx}{bb}.$$

dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{bb}{a}$. Ainsy le Nombre qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{bb}{a}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 6.$$

le Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$18.$$

Cette Question est la même que celle-cy; Trouuer Vn Nombre, par lequel diuisant deux Nombres donnez, l'Vn des deux quotiens soit égal au quarré de l'autre.

II.

Trouuer Vn Nombre, lequel étant ajouté à deux Nombres donnez, l'Vne des deux sommes soit égale au quarré de l'autre.

On propose de trouuer Vn Nombre

$$x.$$

lequel étant ajouté au Nombre donné $32 \sim a$, & au Nombre donné $2 \sim b$, la premiere somme $x+a$ soit égale au quarré $xx+2bx+bb$ de la seconde $x+b$.

Si à la Racine quarrée de l'excez de la somme du premier Nombre donné & du quart de l'Vnité sur le second Nombre donné, on ajoute l'excez de la Moitié de l'Vnité sur le second Nombre donné; on aura le Nombre qu'on cherche. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$$1x+1a \sim xx+2bx+bb.$$

dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{1}{2}1-b+\sqrt{\frac{1}{4}11-1b+1a}$. Ainsy le

Nombre qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{1}{2}l-b+\sqrt{\frac{1}{4}ll-lb+la}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 32.$$
$$b \sim 2.$$

le Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

4.

Determination. La determination de cette Question, à l'egard des deux Nombres donnez a, b, est qu'afinque le Nombre trouvé soit reel & affirmé, le premier Nombre donné a, doit être plus grand que le quarré du second Nombre donné b.

Demonstration. Car à cause du Nombre trouvé, on aura cette inégalité, $\frac{1}{2}l-b+\sqrt{\frac{1}{4}ll-lb+la} \oplus 0$, c'est pourquoy par l'antitheze on aura celle-cy, $\sqrt{\frac{1}{4}ll-lb+la} \oplus b-\frac{1}{2}l$, où prenant le quarré de chaque partie, on aura celle-cy, $\frac{1}{4}ll-lb+la \oplus bb-lb+\frac{1}{4}ll$, dans laquelle on trouvera $la \oplus bb$. Ce qu'il faloit demontrer.

Cette determination suffira lorsque les deux Nombres donnez seront des Nombres entiers, mais elle ne suffira pas quands ils seront des fractions moindres que l'Unité; car il faut non seulement que le premier soit plus grand que le quarré du second, afinque le Nombre trouvé soit affirmé: mais il faut encore que le premier augmenté du quart de l'Unité ne soit pas moindre que le second, autrement le Nombre trouvé deviendra imaginaire, à cause du terme irrationel $\sqrt{\frac{1}{4}ll-lb+la}$, où l'on void que $la+\frac{1}{4}ll$ doit être plus grand que lb. Ce qu'il faloit demontrer.

III.

Trouver un nombre, lequel étant ôté separément de deux Nombres donnez, l'un des deux restes soit égal au quarré de l'autre.

On propose de trouver un nombre

$$x.$$

lequel étant ôté du Nombre donné $\frac{25}{9} \sim a$, & du nombre donné $3 \sim b$, le premier reste $a-x$ soit égal au quarré $bb-2bx+xx$ du second $b-x$.

Canon. Si à la Racine quarrée de l'excez de la somme du premier Nombre donné & du quart de l'Unité sur le second, on ajoute l'excez du second Nombre donné sur la moitié de l'Unité; on aura le Nombre qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$$la-lx \sim bb-2bx+xx.$$

dans

dans lequel on trouuera $x \backsim b - \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll - lb + la}$. Ainsy le nombre qu'on cherche, sera tel,

$$b - \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll - lb + la}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \backsim \frac{25}{9}.$$
$$b \backsim 3.$$

le nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$2\frac{2}{3}.$$

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, b, le second b doit être plus grand que le premier a & egal ou bien moindre que le même premier a augmenté d'vn quart de l'vnité, c'est à dire égal ou moindre que $a + \frac{1}{4}$. Determination.

Car afinque le Nombre trouué $b - \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll - lb + la}$ puisse être oté de chacun des deux Nombres donnez a, b, il doit être moindre que chacun de ces deux mêmes Nombres a, b, comme par exemple, moindre que b Ainsy on aura cette inégalité, $b - \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll - lb + la} \ominus b$, & par l'antithese on aura celle-cy, $\sqrt{\frac{1}{4}ll - lb + la} \ominus \frac{1}{2}l$, où prenant le quarré de chaque partie, on aura celle-cy, $\frac{1}{4}ll - lb + la \ominus \frac{1}{4}ll$, dans laquelle on trouuera $la \ominus lb$, ou $a \ominus b$. Ce qui est l'vne des choses qu'il faloit demontrer. Demonstration.

L'autre partie de la determination, sauoir que b doit être moindre que $a + \frac{1}{4}$, a été demontrée dans la Question precedente, où nous auons ômis la determination que l'on doit faire à l'égard des deux mêmes Nombres donnez a, b, pour auoir vne solution rationnelle. Cette determination se fera en cette sorte, tant pour cette Question que pour la precedente.

Acause du terme irrationnel $\sqrt{\frac{1}{4}ll - lb + la}$, on a cette Puissance à égaler au quarré, $\frac{1}{4}ll - lb + la$, pour le côté duquel prenant c, on trouuera $lb \backsim \frac{1}{4}ll + la - cc$. Si donc on prend pour c, tel nombre que l'on voudra, pourueu que son quarré soit moindre que $\frac{1}{4}ll$, à cause de $la \ominus lb$, comme $\frac{1}{6}$, on trouuera $lb \backsim 3$, & le nombre qu'on cherche, se trouuera le même qu'auparauant.

Puisque par la determination, nous auons reconnu que le premier nombre donné a, doit être moindre que le second b, on aura $la \ominus bb$, lorsque l sera vn nombre moindre que l'vnité, comme icy. C'est pourquoy dans l'Equation precedente $la - lx \backsim bb - 2bx + xx$, ou $xx - 2bx + lx \backsim la - lb$, l'Homogene de comparaison $la - lb$ sera nié: ce qui fait que les deux Racines de l'Equation sont veritables. Ainsy le nombre qu'on cherche, se pourra encore exprimer ainsy,

$b-\frac{1}{2}l-\sqrt{\frac{1}{4}ll-lb+la}$.

Parceque Nous auons supposé

$a \backsim \frac{25}{9}$

$b \backsim 3$.

le Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$2\frac{1}{3}$.

IV.

Trouuer Vn Nombre, duquel ôtant separément deux Nombres donnez, l'Vn des deux restes soit égal au quarré de l'autre.

On propose de trouuer Vn Nombre

x.

duquel si on ôte separément le Nombre donné $4 \backsim a$, & le Nombre donné $6 \backsim b$, le premier reste $x-a$ soit égal au quarré $xx-2bx+bb$ du second $x-b$.

Canon. Si à la somme du second Nombre donné & de la Moitié de l'Vnité on ajoute la Racine quarrée de l'excez du second Nombre donné augmenté du quart de l'Vnité, sur le premier; on aura le Nombre qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$lx-la \backsim xx-2bx+bb$.

dans laquelle on trouuera $x \backsim b+\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+lb-la}$. Ainsy le Nombre qu'on cherche, sera tel,

$b+\frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ll+lb-la}$

Parceque Nous auons supposé

$a \backsim 4$.

$b \backsim 6$.

le Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

8.

Determination. La Determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, b, est que le premier a ne doit pas être moindre que le second b augmenté du quart de l'Vnité, à cause du terme irrationnel $\sqrt{\frac{1}{4}ll+lb-la}$, qui deuiendroit imaginaire, si la étoit moindre que $lb+\frac{1}{4}ll$, ou a moindre que $b+\frac{1}{4}l$.

Mais à cause du même terme irrationnel $\sqrt{\frac{1}{4}ll+lb-la}$, on connoit que pour auoir Vne Solution rationelle, il faut égaler au quarré cette Puissance $\frac{1}{4}ll+lb-la$, pour le côté duquel prenant c, on trouuera $lb \backsim cc+la-\frac{1}{4}ll$. Si donc on suppose $c \backsim \frac{3}{2}$, on trouuera $b \backsim 6$, & le Nombre qu'on cherche, se trouuera le même qu'auparauant.

Question XXX.

Trouuer deux nombres, dont la somme & le produit soient égaux à des nombres donnez.

On propose de trouuer deux nombres,

$$x.$$
$$y.$$

dont la somme $x+y$ soit égale au nombre donné $20 \backsim a$, & le produit xy au nombre donné $96 \backsim bc$.

Si à la moitié de la somme donnée on ajoute & on ôte la Racine quarrée de l'excez du quarré de cette moitié sur le produit donné; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \backsim a.$$
$$xy \backsim bc.$$

Dans la premiere $x+y \backsim a$, on trouuera $y \backsim a-x$, & la seconde $xy \backsim bc$, se changera en celle-cy, $ax-xx \backsim bc$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}aa-bc}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-bc}.$$
$$\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa-bc}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 20.$$
$$bc \backsim 96.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$12.$$
$$8.$$

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que $\frac{1}{4}aa$ doit être plus grand que bc, à cause du terme irrationnel $\sqrt{\frac{1}{4}aa-bc}$. Determination.

Pour n'auoir pas une Equation composée, mettez

$$x+y.$$
$$x-y.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez ces deux Equations,

$$2x \backsim a.$$
$$xx-yy \backsim bc.$$

Dans la premiere $2x \backsim a$, on trouuera $x \backsim \frac{1}{2}a$, & la deuxieme $xx-yy \backsim bc$, se changera en celle-cy, $\frac{1}{4}aa-yy \backsim bc$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \sqrt{\frac{1}{4}aa-bc}$, & les deux nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Metode de Diophante.

Pour resoudre cette Question par la Metode de Diophante, supposez

$$x - y \sim 2z.$$

& comparez cette Equation supposée $x - y \sim 2z$, avec la premiere de Nôtre premiere Metode, savoir $x + y \sim a$, en les ajoutant ensemble & en les ôtant l'une de l'autre, & vous trouverez

$$x \sim \frac{1}{2}a + z.$$

$$y \sim \frac{1}{2}a - z.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, qui sont conformes aux deux Nombres de Diophante,

$$10 + 1N.$$

$$10 - 1N.$$

en supposant

$$z \sim 1N$$

$$a \sim 20.$$

& la deuxieme Equation $xy \sim bc$, se changera en celle-cy, $\frac{1}{4}aa \sim zz - bc$, dans laquelle on trouvera $z \sim \sqrt{\frac{1}{4}aa - bc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouveront les mêmes qu'auparavant.

On auroit pû proposer cette Question ainsy; Trouver un Parallelograme rectangle, dont on connoit le contenu & le contour. Car la moitié du contour est representé par le premier Nombre donné a, & le contenu par le second Nombre donné bc.

Ou bien on auroit pû proposer la Question ainsy; Trouver trois quantitez proportionnelles, dont on connoit la Moyenne & la somme des deux extrêmes. La somme étant representée par le premier Nombre donné a, & le quarré de la Moyenne par le second Nombre donné bc.

On l'auroit aussy pû proposer en cette sorte; Trouver un triangle rectangle, dont on connoit l'hypotenuse, & la perpendiculaire qui tombe de l'angle droit sur l'hypotenuse. Car l'hypotenuse est representée par le premier Nombre donné a, & le quarré de la perpendiculaire par le second Nombre donné bc.

Il est évident que les segmens de l'hypotenuse, faits par la perpendiculaire, representent les deux Nombres qu'on cherche, lesquels on pourra trouver aisément par geometrie, savoir en decrivant un demicercle alentour de l'hypotenuse donnée, & en apliquant dans ce demicercle une ligne perpendiculaire au diametre & égale à la perpendiculaire donnée. Cela est aisé à comprendre, sans qu'il soit besoin d'en faire icy une figure particuliere.

Question XXXI.

Trouver deux Nombres, tels que leur somme & la somme de leurs quarez soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que leur somme $x+y$ soit égale au Nombre donné 20 $\sim a$, & la somme $xx+yy$ de leurs quarez au Nombre donné 208 $\sim bc$.

Si à la Moitié de la somme donnée des Nombres on ajoute & on ôte la Racine quarrée de l'excez de la Moitié de la somme donnée des quarez sur le quarré de la Moitié de la somme donnée des Nombres; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$x+y \sim a$.

$xx+yy \sim bc$.

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouvera $y \sim a-x$, & la deuxieme $xx+yy \sim bc$, se changera en celle-cy, $aa-2ax+2xx \sim bc$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{2}bc-\frac{1}{4}aa}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{2}bc-\frac{1}{4}aa}$.

$\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{2}bc-\frac{1}{4}aa}$.

Parceque Nous avons supposé

$a \sim 20$.

$bc \sim 208$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

12.

8.

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que aa doit être plus grand que bc, & moindre que $2bc$, c'est à dire que aa doit être entre bc, & $2bc$, pour empêcher que les deux Nombres trouvez ne soient niez, ny imaginaires. *Determination.*

Car dans le terme irrationnel $\sqrt{\frac{1}{2}bc-\frac{1}{4}aa}$, on a cette inégalité, $\frac{1}{2}bc-\frac{1}{4}aa \oplus 0$, & par l'antithese on aura celle-cy, $\frac{1}{2}bc \oplus \frac{1}{4}aa$, & en multipliant par 4, on aura celle-cy, $2bc \oplus aa$. Ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit demontrer. *Demonstration.*

Dans le second Nombre trouvé $\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{2}bc-\frac{1}{4}aa}$, on a cette inégalité, $\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{2}bc-\frac{1}{4}aa} \oplus 0$: c'est pourquoy par l'antithese, on aura celle-cy, $\frac{1}{2}a \oplus \sqrt{\frac{1}{2}bc-\frac{1}{4}aa}$, & en prenant le quarré de chaque partie, on aura

celle-cy, $\frac{1}{4}aa \oplus \frac{1}{2}bc - \frac{1}{4}aa$, & par l'antithese on aura celle-cy, $\frac{1}{2}aa \oplus \frac{1}{2}bc$, & par consequent $aa \oplus bc$. Ce qu'il faloit demontrer.

Mais il y a vne autre determination à faire touchant les deux Mêmes Nombres donnez a, b, pour auoir vne Solution rationnelle, qui est que $\frac{1}{2}bc - \frac{1}{4}aa$ doit être vn nombre quarré. Pour cette fin, on l'égalera au quarré dd, pour auoir $bc \backsim \frac{1}{2}aa + 2dd$. c'est pourquoy si l'on suppose $d \backsim 2$, on trouuera $bc \backsim 208$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les Mêmes qu'auparauant.

Metode de Diophante. Pour n'auoir pas vne Equation composée, seruez-vous de la Metode de Diophante, qui est telle. Supposez

$$x - y \backsim 2z.$$

& comparez cette Equation $x - y \backsim 2z$ auec la premiere $x + y \backsim a$, en les ajoutant ensemble, & en les ôtant l'vne de l'autre, & vous trouuerez

$$x \backsim \frac{1}{2}a + z.$$
$$y \backsim \frac{1}{2}a - z.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, qui sont conformes aux deux Nombres de Diophante,

$$10 + 1N.$$
$$10 - 1N.$$

en supposant

$$z \backsim 1N.$$
$$a \backsim 20.$$

& la deuxieme Equation $xx + yy \backsim bc$, se changera en celle-cy, $\frac{1}{2}aa + 2zz \backsim bc$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \sqrt{\frac{1}{2}bc - \frac{1}{4}aa}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les Mêmes qu'auparauant.

Ou bien mettez

$$x + y.$$
$$x - y.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez ces deux Equations,

$$2x \backsim a.$$
$$2xx + 2yy \backsim bc.$$

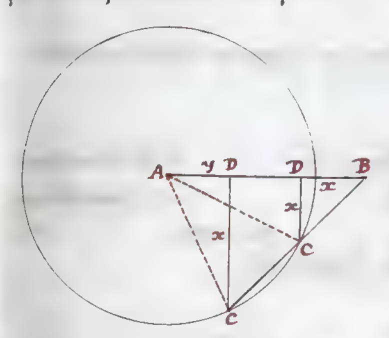
Dans la premiere $2x \backsim a$, on trouuera $x \backsim \frac{1}{2}a$, & la deuxième $2xx + 2yy \backsim bc$, se changera en celle-cy, $\frac{1}{2}aa + 2yy \backsim bc$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \sqrt{\frac{1}{2}bc - \frac{1}{4}aa}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les Mêmes qu'auparauant.

On auroit pû proposer cette Question ainsy; Trouuer vn triangle rectangle, dont on connoit la somme des deux côtez & l'hypotenuse. Car la somme des deux côtez est representée par le

premier nombre donné a, & le quarré de l'hypotenuse par le second nombre donné bc, laquelle par consequent sera $\sqrt{bc}$. Si donc à la place de a, & de $\sqrt{bc}$, on met des lignes, la Question proposée se pourra resoudre geometriquement en cette sorte.

Puisque la premiere Equation $x+y \sim a$, est un Lieu à la Ligne droite, & que la deuxieme $xx+yy \sim bc$, est un lieu à un cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{bc}$, ou d, en supposant la ligne d, moyenne proportionnelle entre les deux bc, ou le quarré dd, égal au Plan bc, en joignant ensemble ces deux lieux, on aura le construction suiuante.

Acause du Lieu à la Ligne droite $x+y \sim a$, conceuez dans la ligne AB $\sim a$, la ligne indeterminée AD $\sim y$, pour auoir BD $\sim x$, en quelque lieu que tombe le point D, & parceque les deux quantitez indeterminées x, y, doiuent faire un angle droit, à cause du Lieu au cercle $xx+yy \sim bc$, ou $xx+yy \sim dd$, conceuez que du point D il part la ligne CD $\sim x$, perpendiculaire à la ligne AD, & menez la droite BC, qui fera en B, un angle demidroit, à cause des deux lignes égales BD, CD. *Solution geometrique.*



Pour donc determiner les trois lignes AD, CD, BC, ayant fait au point B, l'angle demidroit ABC, par la ligne indeterminée BC, decriuez de l'extremité A, une circonference de cercle, dont le Rayon AC soit égal à $\sqrt{bc}$, ou à d; cette circonference terminera la ligne Locale BC, au point C, par lequel tirant la ligne CD, perpendiculaire à la ligne AB, les deux lignes AD, CD, se trouueront terminées, & resoudront la Question, c'est à dire qu'elles representeront les deux nombres qu'on cherche, de sorte que leur somme sera égale à la quantité donnée a, ou à la ligne AB, & la somme de leurs quarrez sera égale au Plan bc ou au quarré de la ligne AC.

Car puisque CD $\sim$ BD, à cause de l'angle B, demidroit, la somme des deux lignes AD, CD, sera égale à la ligne AB, ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit demontrer; & parceque le triangle ADC, est rectangle en D, la somme des quarrez AD, CD, sera égale au quarré AC, par 47. 1. Ce qui restoit à demontrer. *Demonstration.*

Question XXXII.

Trouuer deux Nombres, tels que leur somme, & la difference de leurs quarrez soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

en sorte que leur somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $20 \sim a$, & que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $80 \sim bc$.

Canon. Si au quarré de la somme donnée des Nombres on ajoute & on ôte la difference donnée des quarrez, & qu'on diuise la somme & le reste par le double de la somme donnée des Nombres; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \sim a.$$

$$xx-yy \sim bc.$$

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouuera $y \sim a-x$, & la deuxieme $xx-yy \sim bc$, se changera en celle-cy, $2ax-aa \sim bc$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{aa+bc}{2a}$: & au lieu de $y \sim a-x$, on aura $y \sim \frac{aa-bc}{2a}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+bc,\ aa-bc}{2a}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 20.$$

$$bc \sim 80.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

12.

8.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que aa doit être plus grand que bc, à cause du Numerateur $aa-bc$, du second Nombre trouué.

Metode de Diophante. Diophante resoud cette Question comme les deux precedentes, sauoir en supposant $x-y \sim 2z$, pour auoir comme auparauant,

$$x \sim \tfrac{1}{2}a+z.$$

$$y \sim \tfrac{1}{2}a-z.$$

& la deuxieme Equation $xx-yy \sim bc$, se changera en celle-cy, $2az \sim bc$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{bc}{2a}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les Mêmes qu'auparauant.

Par le Moyen de cette Question, on resoudra facilement celle-cy,

Trouuer

Trouver un triangle rectangle, dont on connoit l'hypotenuse & la difference des quarez des deux côtez: parceque dans tout triangle, la difference des quarrez des deux côtez est égale à la difference des segmens de la base, faits par la perpendiculaire. C'est pourquoy l'hypotenuse du triangle rectangle sera representée par la somme donnée a, & la difference des quarrez des deux côtez par la difference donnée bc, & les deux nombres trouvez representeront les segmens de l'hypotenuse, lesquels étant ainsy connus, on connoitra aisément les deux côtez du triangle rectangle, savoir en ajoutant au quarré de chaque segment le produit des mêmes segmens, & en prenant la Racine quarrée de chaque somme, ou plus facilement en multipliant chacun des deux Nombres trouvez par la somme donnée des Nombres, & en prenant la Racine quarrée de chaque produit.

Question XXXIII.

Trouver deux Nombres, dont la difference & le produit, soient égaux à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $4 \propto a$, & le produit xy au Nombre donné $96 \propto bc$.

Si on ôte & qu'on ajoute la moitié de la difference donnée des Nombres à la Racine quarrée de la somme du produit donné & du quarré de la moitié de la difference donnée des Nombres; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \propto a.$$

$$xy \propto bc.$$

Dans la premiere $x-y \propto a$, on trouvera $x \propto a+y$, & la deuxieme $xy \propto bc$, se changera en celle-cy, $ay+yy \propto bc$, dans laquelle on trouvera $y \propto \sqrt{bc+\frac{1}{4}aa}-\frac{1}{2}a$: & au lieu de $x \propto a+y$, on aura $x \propto \sqrt{bc+\frac{1}{4}aa}+\frac{1}{2}a$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{bc+\tfrac{1}{4}aa}+\tfrac{1}{2}a.$$

$$\sqrt{bc+\tfrac{1}{4}aa}-\tfrac{1}{2}a.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \propto 4.$$

$$bc \propto 96.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$12.$$

$$8.$$

Metode de Diophante

Pour resoudre cette Question comme Diophante, faites cette Equation,

$$x+y \sim 2z.$$

& la comparez par addition & par soustraction auec la premiere $x-y \sim a$, & vous trouuerez

$$x \sim z+\frac{1}{2}a.$$
$$y \sim z-\frac{1}{2}a.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, qui sont conformes aux deux Nombres de Diophante,

$$1N+2.$$
$$1N-2.$$

en supposant

$$z \sim 1N.$$
$$a \sim 4.$$

& la deuxieme Equation $xy \sim bc$, se changera en celle-cy, $zz-\frac{1}{4}aa \sim bc$, dans laquelle on trouuera $z \sim \sqrt{bc+\frac{1}{4}aa}$, & les deux nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

On auroit pû proposer cette Question ainsy; Trouuer vn Parallelograme rectangle, dont on connoit l'aire & la difference des deux côtez: Car la difference des côtez est representée par le premier Nombre donné a, & l'aire par le second Nombre donné bc.

On bien on auroit pû proposer la Question ainsy; Trouuer trois lignes proportionnelles, dont on connoit la Moyenne, & la difference des deux extremes. Cette difference étant representée par le premier Nombre donné a, & le quarré de la Moyenne par le second Nombre donné bc.

Bachet ajoute icy les Questions suiuantes.

1.

Trouuer deux Nombres, dont le produit, & la somme de leurs quarrez, soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont le produit xy soit égal au Nombre donné $15 \sim ab$, en sorte que la somme $xx+yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $34 \sim cd$.

Canon. Si au quart de la somme donnée des quarrez on ajoute & on ôte la moitié du produit donné, les Racines quarrées de la somme & du reste étant ajoutées & ôtées l'vne de l'autre, donneront les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xy \backsim ab.$$
$$xx+yy \backsim cd.$$

Dans la premiere $xy \backsim ab$, on trouuera $y \backsim \frac{ab}{x}$, & par consequent $yy \backsim \frac{aabb}{xx}$, & la seconde $xx+yy \backsim cd$, se changera en celle-cy, $xx+\frac{aabb}{xx} \backsim cd$, ou $x^4-cdxx \backsim -aabb$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \sqrt{\frac{1}{4}cd+\frac{1}{2}ab} \mp \sqrt{\frac{1}{4}cd-\frac{1}{2}ab}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}cd+\tfrac{1}{2}ab}+\sqrt{\tfrac{1}{4}cd-\tfrac{1}{2}ab}.$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{4}cd+\tfrac{1}{2}ab}-\sqrt{\tfrac{1}{4}cd-\tfrac{1}{2}ab}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$ab \backsim 15.$$
$$cd \backsim 34.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez ab, cd, est que cd doit être plus grand que $2ab$, comme il est aisé de voir dans le terme irrationnel $\sqrt{\frac{1}{4}cd-\frac{1}{2}ab}$. *Determination.*

Mais il y a une autre determination à faire, pour auoir une Solution rationnelle, qui est que le second Nombre donné cd, doit être égal à $aa+bb$, sauoir à la somme des quarrez de deux Nombres produisans du premier Nombre donné ab.

Car pour faire que les deux Nombres trouuez soient rationnels, il faudra égaler au quarré ces deux Puissances, *Demonstration.*

$$\tfrac{1}{4}cd+\tfrac{1}{2}ab.$$
$$\tfrac{1}{4}cd-\tfrac{1}{2}ab.$$

Leur difference est ab, dont les deux Nombres produisans sont a, b. La moitié de la somme de ces deux nombres produisans est $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, dont le quarré $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb$ étant égalé à la plus grande Puissance $\frac{1}{4}cd+\frac{1}{2}ab$, on trouuera $cd \backsim aa+bb$. Ce qu'il faloit demontrer.

Pour ne pas auoir une Equation composée, mettez

$$x+y.$$
$$x-y.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez ces deux Equations à resoudre,

$$xx-yy \backsim ab.$$
$$2xx+2yy \backsim cd.$$

Dans la premiere $xx-yy \backsim ab$, on trouuera $x \backsim \sqrt{ab+yy}$, & la deuxieme $2xx+2yy \backsim cd$, se changera en celle-cy, $2ab+4yy \backsim cd$,

dans laquelle on trouvera $y \sim \sqrt{\frac{1}{4}cd - \frac{1}{2}ab}$: & au lieu de $x \sim \sqrt{ab+yy}$, on aura $x \sim \sqrt{\frac{1}{4}cd + \frac{1}{2}ab}$, & les deux nombres qu'on cherche, se trouveront les mêmes qu'auparavant.

On auroit pû proposer cette Question ainsy; Trouver un Parallelograme rectangle, dont on connoit l'aire & la diagonale. Car l'aire sera representée par le premier Nombre donné ab, & le quarré de la diagonale par le second Nombre donné cd.

Ou bien on auroit pû proposer la Question ainsy; Trouver trois quantitez proportionnelles, dont on connoit la Moyenne, & la somme des quarrez des deux extrêmes. Le quarré de la Moyenne étant representé par le premier Nombre donné ab, & la somme des quarrez des deux extrêmes par le second nombre donné cd.

II.

Trouver deux Nombres, tels que leur difference & la somme de leurs quarrez soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que leur difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $6 \sim a$, & la somme $xx+yy$ de leurs quarrez au Nombre donné $68 \sim bc$.

Canon. Si la Moitié de la difference donnée des Nombres est ajoutée, & ôtée de la Racine quarrée de l'excez de la Moitié de la somme donnée des quarrez sur le quarré de la Moitié de la difference donnée des Nombres; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \sim a.$$

$$xx+yy \sim bc.$$

Dans la premiere $x-y \sim a$, on trouvera $y \sim x-a$, & la deuxieme $xx+yy \sim bc$, se changera en celle-cy, $2xx-2ax+aa \sim bc$, ou $xx-ax \sim \frac{1}{2}bc - \frac{1}{2}aa$, dans laquelle on trouvera $x \sim \sqrt{\frac{1}{2}bc - \frac{1}{4}aa} + \frac{1}{2}a$, & au lieu de $y \sim x-a$, on aura $y \sim \sqrt{\frac{1}{2}bc - \frac{1}{4}aa} - \frac{1}{2}a$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}bc - \tfrac{1}{4}aa} + \tfrac{1}{2}a.$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}bc - \tfrac{1}{4}aa} - \tfrac{1}{2}a.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 6.$$

$$bc \sim 68.$$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

8.

2.

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le second bc doit être plus grand que le quarré aa du premier, comme il est aisé de voir dans le second Nombre trouvé $\sqrt{\frac{1}{2}bc-\frac{1}{4}aa}-\frac{1}{2}a$, où l'on a $\sqrt{\frac{1}{2}bc-\frac{1}{4}aa} \oplus \frac{1}{2}a$, & par consequent $\frac{1}{2}bc-\frac{1}{4}aa \oplus \frac{1}{4}aa$, ou $\frac{1}{2}bc \oplus \frac{1}{2}aa$, ou $bc \oplus aa$. Determination.

Pour n'avoir point d'Equation composée; mettez

$$x+y.$$

$$x-y.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez ces deux Equations à resoudre,

$$2y \sim a.$$

$$2xx+2yy \sim bc.$$

Dans la premiere $2y \sim a$, on trouvera $y \sim \frac{1}{2}a$, & la deuxieme $2xx+2yy \sim bc$, se changera en celle-cy, $2xx+\frac{1}{2}aa \sim bc$, dans laquelle on trouvera $x \sim \sqrt{\frac{1}{2}bc-\frac{1}{4}aa}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouveront les mêmes qu'auparavant.

On auroit pû proposer cette Question ainsy; Trouver un triangle rectangle, dont on connoit l'hypotenuse, & la difference des deux côtez: Car la difference des deux côtez est representée par le premier Nombre donné a, & le quarré de l'hypotenuse par le second Nombre donné bc.

III.

Trouver deux Nombres, tels que leur difference, & la difference de leurs quarrez, soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que leur difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $6 \sim a$, & la difference $xx-yy$ de leurs quarrez au Nombre donné $60 \sim bc$.

Si on ajoute & qu'on ôte le quarré de la difference donnée des Nombres, de la difference donnée des quarrez, & qu'on divise la somme & le reste, chacun par le double de la difference donnée des Nombres; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \sim a$$

$$xx-yy \sim bc.$$

Dans la premiere $x-y \backsim a$, on trouvera $y \backsim x-a$, & la deuxieme $xx-yy \backsim bc$, se changera en celle-cy, $2ax-aa \backsim bc$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{aa+bc}{2a}$, & au lieu de $y \backsim x-a$, on aura $y \backsim \frac{bc-aa}{2a}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bc}{2a}+\frac{1}{2}a.$$
$$\frac{bc}{2a}-\frac{1}{2}a.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \backsim 6.$$
$$bc \backsim 60.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

8.

2.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le second bc doit être plus grand que le quarré aa du premier, comme il est aisé de voir dans le Numerateur $bc-aa$ du second Nombre trouvé.

On connoit aisément que cette Question est la même que la suivante; Trouver un triangle rectangle, dont on connoit un côté, & l'excez de l'hypotenuse sur l'autre côté. Car l'excez est representé par le premier Nombre donné a, & le quarré du côté connu par le second Nombre donné bc.

IV.

Trouver deux Nombres, tels que leur produit, & la difference de leurs quarrez soient égaux à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont le produit xy soit égal au Nombre donné $15 \backsim ab$, en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $16 \backsim cd$.

Canon. Si à la Moitié de la difference donnée on ajoute & on ôte la Racine quarrée de la somme du quarré du produit donné & du quarré de la Moitié de la difference donnée, les Racines quarrées de la somme & du reste donneront les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xy \backsim ab.$$
$$xx-yy \backsim cd.$$

Dans la premiere $xy \backsim ab$, on trouvera $y \backsim \frac{ab}{x}$, & la deuxieme $xx-yy \backsim cd$, se changera en celle-cy, $xx-\frac{aabb}{xx} \backsim cd$, ou $x^4-cdxx \backsim aabb$,

dans laquelle on trouuera $x \propto \sqrt{\sqrt{aabb + \frac{1}{4}ccdd} + \frac{1}{2}cd}$, & au lieu de $y \propto \frac{ab}{x}$, on aura $y \propto \sqrt{\sqrt{aabb + \frac{1}{4}ccdd} - \frac{1}{2}cd}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\sqrt{aabb + \tfrac{1}{4}ccdd} + \tfrac{1}{2}cd}.$$
$$\sqrt{\sqrt{aabb + \tfrac{1}{4}ccdd} - \tfrac{1}{2}cd}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$ab \propto 15.$$
$$cd \propto 16.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$
$$3.$$

On n'aura pas Une solution differente, quoy que l'on mette

$$x+y.$$
$$x-y.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, car selon les conditions de la Question, Vous aurez ces deux Equations à resoudre,

$$xx - yy \propto ab.$$
$$4xy \propto cd.$$

Dans la premiere $xx - yy \propto ab$, on trouuera $x \propto \sqrt{yy+ab}$, & la deuxieme $4xy \propto cd$, se changera en celle-cy, $\sqrt{16y^4 + 16abyy} \propto cd$, ou $y^4 + abyy \propto \frac{1}{16}ccdd$, dans laquelle on trouuera $y \propto \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}aabb - \frac{1}{16}ccdd} - \frac{1}{2}ab}$, & au lieu de $x \propto \sqrt{yy+ab}$, on aura $x \propto \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}aabb - \frac{1}{16}ccdd} + \frac{1}{2}ab}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

On auroit pû proposer cette Question ainsy; Trouuer Un triangle rectangle, dont on connoit Un côté, & le Plan sous l'hypotenuse & l'autre côté. Car le Plan est icy representé par le premier Nombre donné ab, & le quarré du côté connu par le second Nombre donné cd.

V.

Trouuer deux Nombres, tels que leur somme, & la somme de leurs quarrez & de leur produit, soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que leur somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $10 \propto a$, & que la somme $xx+yy+xy$ de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez & de leur produit xy, soit égale au Nombre donné $76 \propto bc$.

Si à la Moitié de la somme donnée des Nombres on ajoute & on ôte la Racine quarrée de l'excez de la somme donnée des quarrez Canon.

& du produit, sur le triple du quarré de cette même moitié; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \backsim a.$$

$$xx+yy+xy \backsim bc.$$

Dans la premiere $x+y \backsim a$, on trouvera $y \backsim a-x$, & la seconde $xx+yy+xy \backsim bc$, se changera en celle-cy, $aa-ax+xx \backsim bc$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{1}{2}a \mp \sqrt{bc-\frac{3}{4}aa}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a+\sqrt{bc-\frac{3}{4}aa}.$$

$$\frac{1}{2}a-\sqrt{bc-\frac{3}{4}aa}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \backsim 10.$$

$$bc \backsim 76.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

6.

4.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le quarré aa du premier doit être plus grand que le second bc, & moindre que les quatre tiers du même second, c'est à dire qu'il doit être entre bc, & $\frac{4}{3}bc$.

Demonstration. Car dans le terme irrationnel $\sqrt{bc-\frac{3}{4}aa}$, qui se rencontre dans chacun des deux Nombres trouvez, on a $bc \oplus \frac{3}{4}aa$: c'est pourquoy en divisant par $\frac{3}{4}$, on aura $\frac{4}{3}bc \oplus aa$. Ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit demontrer.

Acause du second Nombre trouvé $\frac{1}{2}a-\sqrt{bc-\frac{3}{4}aa}$, on a $\frac{1}{2}a \oplus \sqrt{bc-\frac{3}{4}aa}$: c'est pourquoy en prenant le quarré de chaque partie, on aura $\frac{1}{4}aa \oplus bc-\frac{3}{4}aa$, & par l'antithese on aura $aa \oplus bc$. Ce qui restoit à demontrer.

On auroit pû proposer cette Question ainsy; Trouver trois quantitez proportionnelles, dont on connoit la sommee, & aussy la somme des Racines quarrées des deux extrêmes, soit donnée. La somme des Racines quarrées étant égale au premier Nombre donné a, & la somme des trois proportionnelles au second bc.

Ou bien on auroit pû proposer la Question ainsy; Trouver deux Nombres, dont la somme soit donnée, & aussy le quotient qui viendra en divisant par leur difference la difference de leurs cubes. Car leur somme est representé par le premier Nombre donné a, & le quotient par le second Nombre donné bc.

Pour trouuer ces deux Nombres sans auoir Vne Equation composée, qu'il est toujours plus difficile de resoudre, mettez

$$x+y.$$
$$x-y.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez ces deux Equations à resoudre,

$$2x \sim a.$$
$$3xx+yy \sim bc.$$

Dans la premiere $2x \sim a$, on trouuera $x \sim \frac{1}{2}a$, & la deuxieme $3xx+yy \sim bc$, se changera en celle-cy, $\frac{3}{4}aa+yy \sim bc$, dans laquelle on trouuera $y \sim \sqrt{bc-\frac{3}{4}aa}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les Mêmes qu'auparauant.

VI.

Trouuer deux Nombres, dont le premier soit égal à Vn Nombre donné, en sorte que la somme de leurs quarrez & de leur produit, soit aussy égale à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que le premier x, soit égal au Nombre donné $10 \sim a$, & que la somme $xx+yy+xy$ de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez & de leur produit xy soit égale au Nombre donné $124 \sim bc$.

Si on ôte la Moitié du premier Nombre donné, lequel est le premier des deux Nombres qu'on cherche, de la Racine quarrée de l'excez de la somme donnée, ou du second Nombre donné sur le triple du quarré de la Même Moitié; on aura le second des deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x \sim a.$$
$$xx+yy+xy \sim bc.$$

Si à la place de x, on met a, ce qui se peut faire à cause de la premiere Equation $x \sim a$, la deuxieme $xx+yy+xy \sim bc$, se changera en celle-cy, $aa+yy+ay \sim bc$, dans laquelle on trouuera $y \sim \sqrt{bc-\frac{3}{4}aa}-\frac{1}{2}a$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$a.$$
$$\sqrt{bc-\frac{3}{4}aa}-\frac{1}{2}a.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \sim 10.$$
$$bc \sim 124.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$10.$$

$$2.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le second bc, doit être plus grand que le quarré aa, du premier, à cause du second Nombre trouvé $\sqrt{bc-\frac{3}{4}aa}-\frac{1}{2}a$, où l'on a $\sqrt{bc-\frac{3}{4}aa} \oplus \frac{1}{2}a$, & par consequent $bc-\frac{3}{4}aa \oplus \frac{1}{4}aa$, ou $bc \oplus aa$.

VII.

Trouuer deux Nombres, tels que la somme de leurs quarrez, & leur somme auec leur produit, soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que la somme $xx+yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $34 \backsim ab$, & que leur somme $x+y$ auec leur produit xy, sauoir $lx+ly+xy$ soit égale au Nombre donné $23 \backsim cd$.

Canon. Si de la Racine quarrée de la somme du quart de l'Vnité du quart du premier Nombre donné & de la moitié du second, on ôte la Moitié de l'Vnité, on aura trouué Vn Nombre, dont le quarré étant ôté de la Moitié du premier Nombre donné, & la Racine quarrée du reste étant ajoutée & ôtée du Nombre trouué; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx+yy \backsim ab.$$

$$lx+ly+xy \backsim cd.$$

Dans la premiere $xx+yy \backsim ab$, on trouuera $x \backsim \sqrt{ab-yy}$, & dans la seconde $lx+ly+xy \backsim cd$, on trouuera le même $x \backsim \frac{cd-ly}{y+l}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\sqrt{ab-yy} \backsim \frac{cd-ly}{y+l}$, ou $ab-yy \backsim \frac{ccdd-2lcdy+llyy}{yy+2ly+ll}$, ou $y^4+2ly^3+2llyy-abyy-2laby-2lcdy \backsim llab-ccdd$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{1}{2}\sqrt{ll+2cd+ab}-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}\sqrt{ab-2ll-2cd+\sqrt{4l^4+8llcd+4llab}}$, & au lieu de $x \backsim \sqrt{ab-yy}$, on aura $x \backsim \frac{1}{2}\sqrt{ll+2cd+ab}-\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}\sqrt{ab-2ll-2cd+\sqrt{4l^4+8llcd+4llab}}$.

Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}\sqrt{ll+2cd+ab}-\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}\sqrt{ab-2ll-2cd+\sqrt{4l^4+8llcd+4llab}}.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{ll+2cd+ab}-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}\sqrt{ab-2ll-2cd+\sqrt{4l^4+8llcd+4llab}}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$ab \backsim 34.$$

$$cd \backsim 23.$$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez ab, cd, est que le quarré $ccdd$ du second cd, doit être plus grand que le premier ab, & moindre que $2ab + \frac{1}{4}aabb + \sqrt{2a^3b^3}$, c'est à dire que $ccdd$ doit être entre ab, & $2ab + \frac{1}{4}aabb + \sqrt{2a^3b^3}$. Determination.

Car dans le second Nombre trouvé, on a $\frac{1}{2}\sqrt{ll + 2cd + ab} - \frac{1}{2}l \oplus \frac{1}{2}\sqrt{ab - 2ll - 2cd + \sqrt{4l^4 + 8llcd + 4llab}}$: c'est pourquoy en prenant le quarré de chaque partie, on aura $\frac{1}{2}ll + \frac{1}{2}cd + \frac{1}{4}ab - \frac{1}{2}\sqrt{l^4 + 2llcd + llab} \oplus \frac{1}{4}ab - \frac{1}{2}ll - \frac{1}{2}cd + \sqrt{\frac{1}{4}l^4 + \frac{1}{2}llcd + \frac{1}{4}llab}$, & par l'antithese on aura $ll + cd \oplus \sqrt{l^4 + 2llcd + llab}$, & en prenant le quarré de chaque partie, on aura $l^4 + 2llcd + ccdd \oplus l^4 + 2llcd + llab$, & par consequent $ccdd \oplus llab$. Ce qui est l'une des choses qu'il faloit demontrer. Demonstration.

Dans le terme irrationnel $\frac{1}{2}\sqrt{ab - 2ll - 2cd + \sqrt{4l^4 + 8llcd + 4llab}}$, on a $\sqrt{4l^4 + 8llcd + 4llab} \oplus 2ll + 2cd - ab$: c'est pourquoy en prenant le quarré de chaque partie, on aura $4l^4 + 8llcd + 4llab \oplus 4l^4 + 8llcd + 4ccdd - 4llab - 4abcd + aabb$, & par l'antithese on aura $8llab - aabb \oplus 4ccdd - 4abcd$, ou $8llab \oplus 4ccdd - 4abcd + aabb$, & en prenant la Racine quarrée de chaque partie, on aura $\sqrt{8llab} \oplus 2cd - ab$, ou $ab + \sqrt{8llab} \oplus 2cd$, ou $\frac{1}{2}ab + \sqrt{2llab} \oplus cd$, & par consequent $\frac{1}{4}aabb + 2llab + \sqrt{2lla^3b^3} \oplus ccdd$. Ce qui restoit à demontrer.

Pour n'auoir pas vne Equation de quatre dimensions, mettez

$x + y$.

$x - y$.

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez ces deux Equations à resoudre,

$$2xx + 2yy \backsim ab.$$

$$2lx + xx - yy \backsim cd.$$

Dans la premiere $2xx + 2yy \backsim ab$, on trouuera $y \backsim \sqrt{\frac{1}{2}ab - xx}$, & la deuxieme $2lx + xx - yy \backsim cd$, se changera en celle-cy, $2lx - \frac{1}{2}ab + 2xx \backsim cd$, ou $xx + lx \backsim \frac{1}{2}cd + \frac{1}{4}ab$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{1}{2}\sqrt{ll + 2cd + ab} - \frac{1}{2}l$, & au lieu de $y \backsim \sqrt{\frac{1}{2}ab - xx}$, on aura $y \backsim \frac{1}{2}\sqrt{ab - 2ll - 2cd + \sqrt{4l^4 + 2llcd + 4llab}}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront les Mêmes qu'auparauant.

VIII.

Trouuer deux Nombres, tels que leur produit, & leur somme auec celle de leurs quarrez soient donnez.

On propose de trouuer deux Nombres,

x.

y.

en sorte que leur produit xy soit égal au Nombre donné $6 \sim ab$, & que leur somme $x+y$, avec la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, savoir $lx+ly+xx+yy$ soit égale au Nombre donné $18 \sim cd$.

Canon. Si on ôte le quart de l'Unité de la Racine quarrée de la Somme de la Moitié du premier Nombre donné du quart du second & d'une seizieme partie de l'Unité, on aura trouvé un nombre, dont le quarré étant diminué du premier Nombre donné, & la Racine quarrée du reste étant ajoutée & ôtée du Nombre trouvé; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xy \sim ab.$$

$$lx+ly+xx+yy \sim cd.$$

Dans la premiere $xy \sim ab$, on trouvera $x \sim \frac{ab}{y}$, & la deuxieme $lx+ly+xx+yy \sim cd$, se changera en celle-cy, $\frac{lab}{y}+ly+\frac{aabb}{yy}+yy \sim cd$, dans laquelle on trouvera $y \sim \sqrt{\frac{1}{4}cd+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{16}ll}-\frac{1}{4}l-\sqrt{\frac{1}{4}cd-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}ll-\sqrt{\frac{1}{8}llab+\frac{1}{16}llcd+\frac{1}{64}l^4}}$; & au lieu de $x \sim \frac{ab}{y}$, on aura $x \sim \sqrt{\frac{1}{4}cd+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{16}ll}-\frac{1}{4}l+\sqrt{\frac{1}{4}cd-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}ll-\sqrt{\frac{1}{8}llab+\frac{1}{16}llcd+\frac{1}{64}l^4}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{cd+2ab+\tfrac{1}{4}ll}-\tfrac{1}{4}l+\tfrac{1}{2}\sqrt{cd-2ab+\tfrac{1}{2}ll-\sqrt{2llab+llcd+\tfrac{1}{4}l^4}}.$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{cd+2ab+\tfrac{1}{4}ll}-\tfrac{1}{4}l-\tfrac{1}{2}\sqrt{cd-2ab+\tfrac{1}{2}ll-\sqrt{2llab+llcd+\tfrac{1}{4}l^4}}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$ab \sim 6.$$

$$cd \sim 18.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

3.

2.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez ab, cd, est que le second cd doit être plus grand que $2ab+\sqrt{4llab}$.

Demonstration. Car dans le terme irrationnel $\frac{1}{2}\sqrt{cd-2ab+\frac{1}{2}ll-\sqrt{2llab+llcd+\frac{1}{4}l^4}}$, on a $cd-2ab+\frac{1}{2}ll \oplus \sqrt{2llab+llcd+\frac{1}{4}l^4}$: c'est pourquoy en prenant le quarré de chaque partie, on aura $ccdd-4abcd+4aabb+llcd-2llab+\frac{1}{4}l^4 \oplus 2llab+\frac{1}{4}l^4$, & par l'antithese on aura $ccdd-4abcd+4aabb \oplus 4llab$, & en prenant la Racine quarrée de chaque partie, on aura $cd-2ab \oplus \sqrt{4llab}$, ou $cd \oplus 2ab+\sqrt{4llab}$. Ce qu'il faloit demontrer.

Pour avoir une Equation plus facile à resoudre, mettez

$$x+y.$$

$$x-y.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche : & selon les conditions de la Question, vous aurez ces deux Equations à resoudre,

$$xx - yy \backsim ab.$$

$$2lx + 2xx + 2yy \backsim cd.$$

Dans la premiere $xx - yy \backsim ab$, on trouuera $y \backsim \sqrt{xx - ab}$, & la deuxieme $2lx + 2xx + 2yy \backsim cd$, se changera en celle-cy, $2lx + 4x - 2ab \backsim cd$, ou $xx + \frac{1}{2}lx \backsim \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}cd$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}cd + \frac{1}{16}ll} - \frac{1}{4}l$, & au lieu de $y \backsim \sqrt{xx - ab}$, on aura $y \backsim \sqrt{\frac{1}{4}cd - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}ll - \sqrt{\frac{1}{16}llcd + \frac{1}{8}llab + \frac{1}{64}l^4}}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

IX.

Trouuer deux Nombres, tels que leur somme, & leur difference auec la somme de leurs quarrez soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la somme $x + y$ soit égale au Nombre donné $8 \backsim a$, en sorte que leur difference $x - y$, auec la somme $xx + yy$ de leurs quarrez, sauoir $lx - ly + xx + yy$ soit égale au Nombre donné $56 \backsim bc$.

Si de la somme de l'Vnité & du double du second Nombre donné, on ôte le quarré du premier, & qu'on ôte la Racine quarée du reste de la somme de l'Vnité & du premier Nombre donné, la Moitié du reste donnera le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du premier Nombre donné, on aura le plus grand. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x + y \backsim a.$$

$$lx - ly + xx + yy \backsim bc.$$

Dans la premiere $x + y \backsim a$, on trouuera $y \backsim a - x$, & la deuxieme $lx - ly + xx + yy \backsim bc$, se changera en celle-cy, $2lx - la + aa - 2ax + 2xx \backsim bc$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}\sqrt{2bc - aa + ll}$, & au lieu de $y \backsim a - x$, on aura $y \backsim \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}\sqrt{2bc - aa + ll}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}\sqrt{2bc - aa + ll}.$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}\sqrt{2bc - aa + ll}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \backsim 8.$$

$$bc \backsim 56.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$7.$$

$$1.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le premier a doit être plus petit que $\sqrt{2bc+ll}$, & plus grand que $\sqrt{bc+\frac{1}{4}ll}-\frac{1}{2}l$, c'est à dire qu'il doit être entre $\sqrt{2bc+ll}$, & $\sqrt{bc+\frac{1}{4}ll}-\frac{1}{2}l$.

Demonstration. Car dans le second Nombre trouvé $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}\sqrt{2bc-aa+ll}$, on a cette inégalité, $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}l \oplus \frac{1}{2}\sqrt{2bc-aa+ll}$, ou $a+l \oplus \sqrt{2bc-aa+ll}$, c'est pourquoy en prenant le quarré de chaque partie, on aura celle-cy, $aa+2al+ll \oplus 2bc-aa+ll$, & par l'antithese on aura celle-cy, $2aa+2la \oplus 2bc$, ou $aa+la \oplus bc$, & ajoutant $\frac{1}{4}ll$, on aura celle-cy, $aa+la+\frac{1}{4}ll \oplus bc+\frac{1}{4}ll$, & par la Racine quarré on aura celle-cy, $a+\frac{1}{2}l \oplus \sqrt{bc+\frac{1}{4}ll}$, & par consequent $a \oplus \sqrt{bc+\frac{1}{4}ll}-\frac{1}{2}l$. Ce qui est l'Vne des deux choses qu'il faloit demontrer.

Dans le terme irrationnel $\sqrt{2bc-aa+ll}$, qui se rencontre dans chacun des deux Nombres trouvez, on a cette inégalité, $2bc+ll \oplus aa$: c'est pourquoy en prenant la Racine quarrée de chaque partie, on aura celle-cy, $\sqrt{2bc+ll} \oplus a$. Ce qui restoit à demontrer.

X.

Trouver deux Nombres, tels que leur difference, & leur somme avec celle de leurs quarrez, soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $6 \sim a$, & dont la somme $x+y$ avec la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, savoir $lx+ly+xx+yy$ soit égale au Nombre donné $58 \sim bc$.

Canon. Si de la somme de l'Vnité & du double du second Nombre donné, on ôte le quarré du premier, & que de la Racine quarrée du reste on ôte la somme de l'Vnité & du premier Nombre donné, la Moitié du reste donnera le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, auquel ajoutant le premier Nombre donné, on aura le plus grand.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \sim a.$$

$$lx+ly+xx+yy \sim bc.$$

Dans la premiere $x-y \sim a$, on trouvera $y \sim x-a$, & la Seconde $lx+ly+xx+yy \sim bc$, se changera en celle-cy, $2lx-la+2xx-2ax+aa \sim bc$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{1}{2}\sqrt{2bc-aa+ll}+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}l$: & au lieu de $y \sim x-a$, on aura $y \sim \frac{1}{2}\sqrt{2bc-aa+ll}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}l$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}\sqrt{2bc-aa+ll}+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}l.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2bc-aa+ll}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}l.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \backsim 6.$$

$$bc \backsim 58.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

7.

1.

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le premier a doit être moindre que $\sqrt{bc+\frac{1}{4}ll}-\frac{1}{2}l$: à cause du second Nombre trouvé $\frac{1}{2}\sqrt{2bc-aa+ll}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}l$, ou l'on a $\sqrt{2bc-aa+ll} \oplus a+l$, & par consequent $2bc-aa+ll \oplus aa+2la+ll$, ou $bc \oplus aa+la$, ou $bc+\frac{1}{4}ll \oplus aa+la+\frac{1}{4}ll$, ou $\sqrt{bc+\frac{1}{4}ll} \oplus a+\frac{1}{2}l$, ou enfin $\sqrt{bc+\frac{1}{4}ll}-\frac{1}{2}l \oplus a$. Determination.

XI.

Trouver deux Nombres, tels que leur somme, & leur difference avec leur produit, soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $16 \backsim a$, & dont la difference $x-y$, avec leur produit xy, savoir $lx-ly+xy$ soit égale au Nombre donné $56 \backsim bc$.

Si de la somme de l'Unité & du quarré de la Moitié du premier Nombre donné, on ôte le second, & qu'on ajoute la Racine quarrée du reste à la somme de l'Unité & de la Moitié du premier Nombre donné; on aura le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du premier Nombre donné, on aura le plus petit. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \backsim a.$$

$$lx-ly+xy \backsim bc.$$

Dans la premiere $x+y \backsim a$, on trouvera $y \backsim a-x$, & la deuxieme $lx-ly+xy \backsim bc$, se changera en celle-cy, $ax-xx+2lx-la \backsim bc$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{1}{2}a+l+\sqrt{\frac{1}{4}aa-bc+ll}$: & aulieu de $y \backsim a-x$, on aura $y \backsim \frac{1}{2}a-l-\sqrt{\frac{1}{4}aa-bc+ll}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a+l+\sqrt{\frac{1}{4}aa-bc+ll}.$$

$$\frac{1}{2}a-l-\sqrt{\frac{1}{4}aa-bc+ll}.$$

Parceque Nous auons supposé

$a \sim 16.$

$bc \sim 56.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

12.

4.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le premier a, doit être plus grand que $2\sqrt{bc-ll}$, & moindre que $\frac{bc}{l}$, c'est à dire qu'il doit être entre $2\sqrt{bc-ll}$, & bc.

Demonstration. Car dans le terme irrationnel $\sqrt{\frac{1}{4}aa-bc+ll}$, qui se rencontre dans chacun des deux nombres trouuez, on a $\frac{1}{4}aa \oplus bc-ll$, & par consequent $\frac{1}{2}a \oplus \sqrt{bc-ll}$, ou $a \oplus 2\sqrt{bc-ll}$. Ce qui est l'Vne des deux choses qu'il faloit demontrer.

Dans le second Nombre trouué $\frac{1}{2}a-l-\sqrt{\frac{1}{4}aa-bc+ll}$, on a cette inegalité, $\frac{1}{2}a-l \oplus \sqrt{\frac{1}{4}aa-bc+ll}$: c'est pourquoy en prenant le quarré de chaque partie, on aura celle-cy, $\frac{1}{4}aa-la+ll \oplus \frac{1}{4}aa-bc+ll$, & par l'antithese on aura $bc \oplus la$. Ce qui restoit à demontrer.

XII.

Trouuer deux Nombres, tels que leur difference, & leur somme auec leur produit, soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit égale au nombre donné $8 \sim a$, & dont la somme $x+y$ auec leur produit xy, sauoir $lx-ly+xy$ soit égal au nombre donné $32 \sim bc$.

Canon. Si de la Racine quarrée de la somme de l'Vnité du second Nombre donné & du quarré de la moitié du premier, on ôte la somme de l'Vnité & de la même moitié; on aura le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, auquel ajoutant le premier Nombre donné, on aura le second.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$x-y \sim a.$

$lx+ly+xy \sim bc.$

Dans la premiere $x-y \sim a$, on trouuera $y \sim x-a$, & la deuxieme $lx+ly+xy \sim bc$, se changera en celle-cy, $2lx-la+xx-ax \sim bc$, dans laquelle on trouuera $x \sim \sqrt{\frac{1}{4}aa+bc+ll}+\frac{1}{2}a-l$: & au lieu de $y \sim x-a$, on aura $y \sim \sqrt{\frac{1}{4}aa+bc+ll}-\frac{1}{2}a-l$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche seront tels,

$\sqrt{\frac{1}{4}aa+}$

$\sqrt{\frac{1}{4}aa+bc+ll}+\frac{1}{2}a-l.$

$\sqrt{\frac{1}{4}aa+bc+ll}-\frac{1}{2}a-l.$

Parceque Nous avons supposé

$a \sim 8.$

$bc \sim 32.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

10.

2.

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que la doit être plus petit que bc à cause du second Nombre trouvé $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bc+ll}-\frac{1}{2}a-l$, où l'on a $\sqrt{\frac{1}{4}aa+bc+ll} \oplus \frac{1}{2}a+l$, & par consequent $\frac{1}{4}aa+bc+ll \oplus \frac{1}{4}aa+la+ll$, ou $bc \oplus la$. Determination.

XIII.

Trouver deux nombres, tels que leur somme, & la somme de leur produit & de la difference de leurs quarrez soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $12 \sim a$, & dont le produit xy avec la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, sçavoir $xy+xx-yy$ soit égale au Nombre donné $116 \sim bc$.

Si de la Racine quarrée de l'excez des cinq quarts du quarré du premier Nombre donné sur le second, on ôte la moitié du même premier; on aura le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du premier Nombre donné, on aura le plus grand. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$x+y \sim a.$

$xy+xx-yy \sim bc.$

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouvera $y \sim a-x$, & la deuxieme $xy+xx-yy \sim bc$, se changera en celle-cy, $3ax-aa-xx \sim bc$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{3}{2}a-\sqrt{\frac{5}{4}aa-bc}$, & au lieu de $y \sim a-x$, on aura $y \sim \sqrt{\frac{5}{4}aa-bc}-\frac{1}{2}a$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{3}{2}a-\sqrt{\frac{5}{4}aa-bc}.$

$\sqrt{\frac{5}{4}aa-bc}-\frac{1}{2}a.$

Parceque Nous avons supposé

$a \sim 12.$

$bc \sim 116.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

10.

2.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que la quarré aa, du premier doit être plus grand que le second bc, à cause du second Nombre trouué $\sqrt{\frac{5}{4}aa-bc}-\frac{1}{2}a$, où l'on a $\sqrt{\frac{5}{4}aa-bc} \oplus \frac{1}{2}a$, & par consequent $\frac{5}{4}aa-bc \oplus \frac{1}{4}aa$, ou $aa \oplus bc$.

XIV.

Trouuer deux Nombres, tels que leur somme, & la somme de leur difference & de la difference de leurs quarrez soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $10 \sim a$, & dont la difference $x-y$ auec la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, sauoir $lx-ly+xx-yy$ soit égale au Nombre donné $44 \sim bc$.

Canon. Si on diuise la Moitié de la somme du premier Nombre donné de son quarré & du second Nombre donné, par le premier augmenté de l'Vnité, on aura le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du premier Nombre donné, on aura le plus petit.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \sim a.$$

$$lx-ly+xx-yy \sim bc.$$

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouuera $y \sim a-x$, & la seconde $lx-ly+xx-yy \sim bc$, se changera en celle-cy, $2lx-la-aa+2ax \sim bc$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{bc+aa+la}{2a+2l}$, & au lieu de $y \sim a-x$, on aura $y \sim \frac{aa+la-bc}{2a+2l}$; Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+la+bc,\ aa+la-bc}{2a+2l}.$$

Parceque Nous auons supposé

$a \sim 10$.

$bc \sim 44$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

7.

2.

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le second bc, doit être moindre que $aa+la$, à cause du Numerateur $aa+la-bc$, du second Nombre trouué.

XV.

Trouver deux nombres, tels que leur difference, & leur somme avec la difference de leurs quarrez, soient égales à des nombres donnez.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

dont la difference x−y soit égale au Nombre donné 4∾a, & dont la somme x+y avec la difference xx−yy de leurs quarrez, savoir lx+ly+xx−yy soit égale au nombre donné 50∾bc.

Si on divise la moitié de la somme du premier nombre donné de son quarré & du second nombre donné, par le premier augmenté de l'Unité, on aura le plus grand des deux nombres qu'on cherche, duquel si on ôte le premier nombre donné, on aura le plus petit. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

x−y ∾ a.

lx+ly+xx−yy ∾ bc.

Dans la premiere x−y ∾ a, on trouvera x ∾ a+y, & la deuxieme lx+ly+xx−yy ∾ bc, se changera en celle-cy, la+2ly+aa+2ay ∾ bc, dans laquelle on trouvera y ∾ $\frac{bc-aa-la}{2a+2l}$, & au lieu de x ∾ a+y, on aura x ∾ $\frac{bc+aa+la}{2a+2l}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{bc+aa+la,\ bc-aa-la}{2a+2l}$.

Parceque nous avons supposé

a∾4.

bc∾50.

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

7.

3.

La determination de cette Question, à l'égard des deux nombres donnez a, bc, est que le second bc doit être plus grand que aa+la, à cause du Numerateur bc−aa−la du second Nombre trouvé. Determination

XVI.

Trouver deux nombres, tels que la somme de leurs quarrez, & la somme de leur difference & de leur produit, soient égales à des nombres donnez.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

en sorte que la somme xx+yy de leurs quarrez soit égale au Nombre

donné 58 $\sim ab$, & que leur difference $x-y$, auec leur produit xy, sauoir $lx-ly+xy$ soit égale au Nombre donné 25 $\sim cd$.

Canon. Si à la Moitié de l'Vnité on ajoute la moitié de la Racine quarée de l'excez du premier Nombre donné augmenté de l'Vnité sur le double du second, on aura trouvé Vn Nombre, dont le quarré étant ôté de la Moitié du premier Nombre donné, & la Racine quarée du reste étant augmentée & diminuée du Nombre trouvé, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx+yy \sim ab.$$

$$lx-ly+xy \sim cd.$$

Dans la seconde $lx-ly+xy \sim cd$, on trouuera $x \sim \frac{cd+ly}{y+l}$, & la premiere $xx+yy \sim ab$, se changera en celle-cy, $\frac{ccdd+2lycd+llyy}{yy+2ly+ll}+yy \sim ab$, ou $y^4+2ly^3+2llyy+2lcdy-abyy-2laby \sim llab-ccdd$, dans laquelle on trouuera $\sqrt{\frac{1}{4}ab+\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}ll-\frac{1}{2}\sqrt{llab-2llcd+l^4}}-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}\sqrt{ab-2cd+ll}$, pour le second Nombre y, & au lieu du premier $x \sim \frac{cd+ly}{y+l}$, on aura $x \sim \sqrt{\frac{1}{4}ab+\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}ll-\frac{1}{2}\sqrt{llab-2llcd+l^4}}+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}\sqrt{ab-2cd+ll}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\frac{1}{4}ab+\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}ll-\frac{1}{2}\sqrt{llab-2llcd+l^4}}+\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}\sqrt{ab-2cd+ll}.$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}ab+\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}ll-\frac{1}{2}\sqrt{llab-2llcd+l^4}}-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}\sqrt{ab-2cd+ll}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$ab \sim 58.$$

$$cd \sim 25.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

7.

3.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez ab, cd, est que le second cd doit être plus grand que $\sqrt{llab}$, & moindre que $\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ll$.

Demonstration. Car dans le second Nombre trouué, on a $\sqrt{\frac{1}{4}ab+\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}ll-\frac{1}{2}\sqrt{llab-2llcd+l^4}} \oplus \frac{1}{2}l+\frac{1}{2}\sqrt{ab-2cd+ll}$: c'est pourquoy en prenant le quarré de chaque partie, on aura $\frac{1}{4}ab+\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}ll-\frac{1}{2}\sqrt{llab-2llcd+l^4} \oplus \frac{1}{2}ll+\frac{1}{4}ab-\frac{1}{2}cd+\frac{1}{2}\sqrt{llab-2llcd+l^4}$, & par l'antitheze on aura $cd-ll \oplus \sqrt{llab-2llcd+l^4}$, & par consequent $ccdd-2llcd+l^4 \oplus llab-2llcd+l^4$, & par l'antithese on aura $ccdd \oplus llab$, & par consequent $cd \oplus \sqrt{llab}$. Ce qui est la premiere chose qu'il faloit demontrer.

Dans le terme irrationnel $\sqrt{ab-2cd+ll}$, on a $ab+ll \oplus 2cd$, & par consequent $\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ll \oplus cd$. Ce qui restoit à demontrer.

Pour auoir Vne Equation plus simple, mettez

$$x+y.$$

$$x-y.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question Vous aurez ces deux Equations à resoudre,

$$2xx+2yy \backsim ab.$$

$$2ly+xx-yy \backsim cd.$$

Dans la premiere $2xx+2yy \backsim ab$, on trouuera $x \backsim \sqrt{\frac{1}{2}ab-yy}$, & la deuxieme $2ly+xx-yy \backsim cd$, se changera en celle-cy, $2ly+\frac{1}{2}ab-2yy \backsim cd$, ou $yy-ly \backsim \frac{1}{4}ab-\frac{1}{2}cd$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{1}{2}l+\sqrt{\frac{1}{4}ab-\frac{1}{2}cd+\frac{1}{4}ll}$, & au lieu de $x \backsim \sqrt{\frac{1}{2}ab-yy}$, on aura $x \backsim \sqrt{\frac{1}{4}ab+\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}ll-\sqrt{\frac{1}{4}llab-\frac{1}{2}llcd+\frac{1}{4}l^4}}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

XVII.

Trouuer deux Nombres, tels que leur difference, & aussy leur produit joint à la somme de leurs quarrez, soient égaux à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$, soit égale au Nombre donné $4 \backsim a$, & dont le produit xy, auec la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, sauoir $xy+xx+yy$ soit égal au Nombre donné $79 \backsim bc$.

Si de la moitié de la Racine quarée du tiers de l'excez du quadruple du second Nombre donné sur le quaré du premier, on ôte & on ajoute la moitié du même premier; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \backsim a.$$

$$xy+xx+yy \backsim bc.$$

Dans la premiere $x-y \backsim a$, on trouuera $y \backsim x-a$, & la deuxieme $xy+xx+yy \backsim bc$, se changera en celle-cy, $3xx-3ax+aa \backsim bc$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}bc-\frac{1}{3}aa}+\frac{1}{2}a$, & au lieu de $y \backsim x-a$, on aura $y \backsim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}bc-\frac{1}{3}aa}-\frac{1}{2}a$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}bc-\frac{1}{3}aa}+\frac{1}{2}a.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}bc-\frac{1}{3}aa}-\frac{1}{2}a.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 4.$$

$$bc \backsim 79.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

7.
3.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le second bc doit être plus grand que le quarré aa du premier, à cause du second Nombre trouvé $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}bc - \frac{1}{3}aa} - \frac{1}{2}a$, où l'on a $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}bc - \frac{1}{3}aa} \oplus \frac{1}{2}a$, & par consequent $\frac{4}{12}bc - \frac{1}{12}aa \oplus \frac{1}{4}aa$, ou $bc \oplus aa$. Ce qu'il faloit demontrer.

XVIII.

Trouver deux Nombres, tels que leur produit, & aussy leur difference jointe à la somme de leurs quarrez, soient égaux à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont le produit xy soit égal au Nombre donné $21 \backsim ab$, & dont la difference $x-y$ jointe à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez fasse une somme $lx - ly + xx + yy$ égale au Nombre donné $62 \backsim cd$.

Canon. Si on ôte la Moitié de l'Unité de la Moitié de la Racine quarrée de l'excez du second Nombre donné augmenté de l'Unité sur le double du premier, on aura trouvé un Nombre, dont le quarré étant ajouté au premier Nombre donné, & la Racine quarrée de la somme étant augmentée & diminuée du Nombre trouvé; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xy \backsim ab.$$

$$lx - ly + xx + yy \backsim cd.$$

Dans la premiere $xy \backsim ab$, on trouvera $y \backsim \frac{ab}{x}$, & la deuxieme $lx - ly + xx + yy \backsim cd$, se changera en celle-cy, $lx - \frac{lab}{x} + xx + \frac{aabb}{xx} \backsim cd$, ou $x^4 + lx^3 - cdxx - labx \backsim -aabb$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}cd + \frac{1}{8}ll - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}llcd - \frac{1}{2}llab + \frac{1}{16}l^4}} + \sqrt{\frac{1}{4}cd - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{16}ll} - \frac{1}{4}l$: c'est pourquoy au lieu du second Nombre $y \backsim \frac{ab}{x}$, on aura $y \backsim \sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}cd + \frac{1}{8}ll - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}llcd - \frac{1}{2}llab + \frac{1}{16}l^4}} - \sqrt{\frac{1}{4}cd - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{16}ll} + \frac{1}{4}l$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}cd + \frac{1}{8}ll - \frac{1}{2}\sqrt{llcd - \frac{1}{2}llab + \frac{1}{16}l^4}} + \sqrt{\frac{1}{4}cd - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{16}ll} - \frac{1}{4}l.$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}cd + \frac{1}{8}ll - \frac{1}{2}\sqrt{llcd - \frac{1}{2}llab + \frac{1}{16}l^4}} - \sqrt{\frac{1}{4}cd - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{16}ll} + \frac{1}{4}l.$$

Parceque nous avons supposé

$$ab \backsim 21.$$

$$cd \backsim 62.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$7.$$

$$3.$$

La determination de cette Question, à l'égard des deux nombres donnez ab, cd, est que le premier ab doit etre moindre que $\frac{1}{2}cd+\frac{1}{8}ll$, à cause du terme irrationnel $\sqrt{\frac{1}{4}cd-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{16}ll}$, où l'on a $\frac{1}{4}cd+\frac{1}{16}ll \oplus \frac{1}{2}ab$, & par consequent $\frac{1}{2}cd+\frac{1}{8}ll \oplus ab$. Determination.

Pour auoir une Equation plus simple, supposez

$$x+y.$$

$$x-y.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez ces deux Equations à resoudre,

$$xx-yy \backsim ab.$$

$$2ly+2xx+2yy \backsim cd.$$

Dans la premiere $xx-yy \backsim ab$, on trouuera $x \backsim \sqrt{yy+ab}$, & la seconde $2ly+2xx+2yy \backsim cd$, se changera en celle-cy, $2ly+2ab+4yy \backsim cd$, ou $yy+\frac{1}{2}ly \backsim \frac{1}{4}cd-\frac{1}{2}ab$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \sqrt{\frac{1}{4}cd-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{16}ll}-\frac{1}{4}l$, & au lieu du premier Nombre $x \backsim \sqrt{yy+ab}$, on aura $x \backsim \sqrt{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}cd+\frac{1}{8}ll-\frac{1}{2}\sqrt{llcd-\frac{1}{2}llab+\frac{1}{16}l^4}}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

XIX.

Trouuer deux Nombres, tels que la somme de leurs quarrez, & aussy leur produit auec la difference des mêmes quarrez, soient égaux à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que la somme $xx+yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $58 \backsim ab$, & que leur produit xy auec la difference $xx-yy$, des mêmes quarrez, sauoir $xy+xx-yy$ soit égal au Nombre donné $61 \backsim cd$.

Si de la somme de la moitié du premier Nombre donné & des deux cinquiemes du second, on ôte la Racine quarrée de l'excez de la vintieme du quarré du premier Nombre donné sur la vintcinquieme du quarré du second; la Racine quarrée du reste donnera le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, dont le quarré étant ôté du premier Nombre donné, la Racine quarrée du reste donnera le plus petit. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx+yy \backsim ab.$$

$$xy+xx-yy \backsim cd.$$

Dans la premiere $xx+yy \backsim ab$, on trouuera $x \backsim \sqrt{ab-yy}$, & dans la seconde $xy+xx-yy \backsim cd$, on trouuera le même $x \backsim \sqrt{cd+\frac{5}{4}yy}-\frac{1}{2}y$:

c'est pourquoy on aura cette Equation, $\sqrt{ab-yy} \sim \sqrt{cd+\frac{5}{4}yy}-\frac{1}{2}y$, ou $y^4+\frac{4}{5}cdyy-abyy \sim \frac{2}{5}abcd-\frac{1}{5}aabb-\frac{1}{5}ccdd$, dans laquelle on trouvera $y \sim \sqrt{\frac{1}{2}ab-\frac{2}{5}cd+\sqrt{\frac{1}{20}aabb-\frac{1}{25}ccdd}}$, & au lieu de $x \sim \sqrt{ab-yy}$, ou de $x \sim \sqrt{cd+\frac{5}{4}yy}-\frac{1}{2}y$, on aura $x \sim \sqrt{\frac{1}{2}ab+\frac{2}{5}cd-\sqrt{\frac{1}{20}aabb-\frac{1}{25}ccdd}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\frac{1}{2}ab+\frac{2}{5}cd-\sqrt{\frac{1}{20}aabb-\frac{1}{25}ccdd}}.$$
$$\sqrt{\frac{1}{2}ab-\frac{2}{5}cd+\sqrt{\frac{1}{20}aabb-\frac{1}{25}ccdd}}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$ab \sim 58.$$
$$cd \sim 61.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$7.$$
$$3.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez ab, cd, est que le premier ab doit être plus grand que $\frac{2cd}{\sqrt{5}}$, & moindre que $2cd$, c'est à dire que le premier nombre donné ab doit etre entre $\frac{2cd}{\sqrt{5}}$, & $2cd$.

Demonstration. Car dans le terme irrationnel $\sqrt{\frac{1}{20}aabb-\frac{1}{25}ccdd}$, qui se trouue dans chacun des deux Nombres trouuez, on a $\frac{1}{20}aabb > \frac{1}{25}ccdd$, ou $aabb > \frac{4}{5}ccdd$, ou $ab > \frac{2cd}{\sqrt{5}}$. Ce qui est la premiere des deux choses qu'il faloit demontrer.

Afinque le premier Nombre trouué soit le plus grand, parcequ'il a été supposé tel dans l'analyse, on aura $\frac{1}{2}ab+\frac{2}{5}cd-\sqrt{\frac{1}{20}aabb-\frac{1}{25}ccdd} > \frac{1}{2}ab-\frac{2}{5}cd+\sqrt{\frac{1}{20}aabb-\frac{1}{25}ccdd}$: & par l'antitheze on aura $\frac{4}{5}cd > \sqrt{\frac{1}{5}aabb-\frac{4}{25}ccdd}$, & par consequent $\frac{16}{25}ccdd > \frac{1}{5}aabb-\frac{4}{25}ccdd$, & par l'antitheze on aura $\frac{4}{5}ccdd > \frac{1}{5}aabb$, ou $4ccdd > aabb$, & par consequent $2cd > ab$. Ce qui restoit à demontrer.

Seconde Solution. Dans la même Equation $y^4+\frac{4}{5}cdyy-abyy \sim \frac{2}{5}abcd-\frac{1}{5}aabb-\frac{1}{5}ccdd$, on trouuera encore $y \sim \sqrt{\frac{1}{2}ab-\frac{2}{5}cd-\sqrt{\frac{1}{20}aabb-\frac{1}{25}ccdd}}$, & au lieu de $x \sim \sqrt{ab-yy}$, ou de $x \sim \sqrt{cd+\frac{5}{4}yy}-\frac{1}{2}y$, on aura $x \sim \sqrt{\frac{1}{2}ab+\frac{2}{5}cd+\sqrt{\frac{1}{20}aabb-\frac{1}{25}ccdd}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\frac{1}{2}ab+\frac{2}{5}cd+\sqrt{\frac{1}{20}aabb-\frac{1}{25}ccdd}}.$$
$$\sqrt{\frac{1}{2}ab-\frac{2}{5}cd-\sqrt{\frac{1}{20}aabb-\frac{1}{25}ccdd}}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$ab \sim 58.$$
$$cd \sim 61.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{17}{\sqrt{5}}.$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

On tire de cette seconde Solution, le Canon suivant;

Si à la somme de la moitié du premier Nombre donné & des deux cinquiemes du second, on ajoute la Racine quarrée de l'excez de la Vintieme du quarré du premier Nombre donné sur la Vint-cinquieme du quarré du second; la Racine quarrée de la somme donnera le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, dont le quarré étant ôté du premier Nombre donné, la Racine quarée du reste donnera le plus petit. Canon.

Il arrive que dans cette seconde solution, le premier Nombre trouvé est essentiellement plus grand, c'est pourquoy il n'y aura aucune determination à faire dans ce Nombre touchant les deux Nombres donnez ab, cd, & il suffira de dire comme auparavant, que le premier ab doit être plus grand que $\frac{2cd}{\sqrt{5}}$, pour empêcher que les deux Nombres trouvez ne soient imaginaires, comme il arriveroit si ab étoit moindre que $\frac{2cd}{\sqrt{5}}$. Il est bien vray que ab peut être égal à $\frac{2cd}{\sqrt{5}}$, & alors le terme irrationnel $\sqrt{\frac{1}{20}aabb - \frac{1}{25}ccdd}$ s'évanouira, & alors les deux Nombres, qui ont été trouvez par la premiere ou par la seconde solution, se reduiront à ces deux,

$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}cd + \frac{2}{5}cd}.$$
$$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}cd - \frac{2}{5}cd}.$$

mais ce cas est trop particulier.

XX.

Trouver deux Nombres, tels que la difference de leurs quarrez & la somme des mêmes quarrez augmentée du produit des deux Nombres, soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $40 \sim ab$, & que la somme $xx+yy+xy$ de leur produit xy, & de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $79 \sim cd$.

Si de la somme des deux tiers du second Nombre donné & de la Moitié du premier, on ôte la Racine quarrée de l'excez de la Neuvieme du quarré du second Nombre donné sur une douzieme du quarré du premier; la Racine quarré du reste sera le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, dont le quarré étant diminué du premier Nombre donné, on aura le plus petit. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx - yy \backsim ab.$$

$$xy + xx + yy \backsim cd.$$

Dans la premiere $xx - yy \backsim ab$, on trouvera $x \backsim \sqrt{ab + yy}$, & la seconde $xy + xx + yy \backsim cd$, se changera en celle-cy, $\sqrt{abyy + y^4} + ab + 2yy \backsim cd$, ou $y^4 + abyy - \frac{4}{3}cdyy \backsim \frac{2}{3}abcd - \frac{1}{3}aabb - \frac{1}{3}ccdd$, dans laquelle on trouvera $y \backsim \sqrt{\frac{2}{3}cd - \frac{1}{2}ab - \sqrt{\frac{1}{9}ccdd - \frac{1}{12}aabb}}$, & au lieu de $x \backsim \sqrt{ab + yy}$, on aura $x \backsim \sqrt{\frac{2}{3}cd + \frac{1}{2}ab - \sqrt{\frac{1}{9}ccdd - \frac{1}{12}aabb}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\frac{2}{3}cd + \frac{1}{2}ab - \sqrt{\frac{1}{9}ccdd - \frac{1}{12}aabb}}.$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}cd - \frac{1}{2}ab - \sqrt{\frac{1}{9}ccdd - \frac{1}{12}aabb}}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$ab \backsim 40.$$

$$cd \backsim 79.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

7.

3.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez ab, cd, est que le premier ab doit être moindre que $\frac{2cd}{\sqrt{3}}$, à cause du terme irrationnel $\sqrt{\frac{1}{9}ccdd - \frac{1}{12}aabb}$, qui se rencontre dans chacun des deux Nombres trouvez, où l'on a $\frac{1}{9}ccdd \oplus \frac{1}{12}aabb$, ou $4ccdd \oplus 3aabb$, ou $\frac{4}{3}ccdd \oplus aabb$, ou enfin $\frac{2cd}{\sqrt{3}} \oplus ab$.

On trouvera aussy $y \backsim \sqrt{\frac{2}{3}cd - \frac{1}{2}ab + \sqrt{\frac{1}{9}ccdd - \frac{1}{12}aabb}}$, mais cette valeur ne se trouve pas propre pour resoudre la Question: car comme Nous avons trouvé cette Equation, $\sqrt{abyy + y^4} + ab + 2yy \backsim cd$, par l'antitheze Nous aurons celle-cy, $\sqrt{abyy + y^4} \backsim cd - ab - 2yy$, où l'on void que cd doit être plus grand que $ab + 2yy$, ou que $\frac{4}{3}cd + \sqrt{\frac{4}{9}ccdd - \frac{1}{3}aabb}$: ce qui est impossible.

XXI.

Trouver deux Nombres, dont la difference jointe à celle de leurs quarez, & la somme jointe à celle de leurs quarez, soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que la somme $1x - 1y + xx - yy$ de leur difference $x - y$, & de la difference $xx - yy$ de leurs quarez, soit égale au Nombre donné $14 \backsim ab$, & que la somme $1x + 1y + xx + yy$ de leur somme $x + y$, & de la somme $xx + yy$ de leurs quarez, soit égale au Nombre donné $26 \backsim cd$.

Si à la moitié de la somme des deux Nombres donnez, & à la moitié de l'excez du premier sur le second, on ajoute le quart de l'Vnité, & que de la Racine quarrée de chaque somme on ôte la Moitié de l'Vnité; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$lx-ly+xx-yy \sim ab.$$

$$lx+ly+xx+yy \sim cd.$$

dont la somme & la difference donnent ces deux autres Equations,

$$2lx+2xx \sim cd+ab.$$

$$2ly+2yy \sim cd-ab.$$

Dans la premiere $2lx+2xx \sim cd+ab$, ou $xx+lx \sim \frac{1}{2}cd+\frac{1}{2}ab$, on trouuera $x \sim \sqrt{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd+\frac{1}{4}ll}-\frac{1}{2}l$, & dans la seconde $2ly+2yy \sim cd-ab$, ou $yy+ly \sim \frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}ab$, on trouuera $y \sim \sqrt{\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}ll}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}\sqrt{2ab+2cd+ll}-\frac{1}{2}l.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2cd-2ab+ll}-\frac{1}{2}l.$$

Parceque Nous auons supposé

$$ab \sim 14.$$

$$cd \sim 26.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.

2.

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez ab, cd, est que le premier ab, doit être moindre que le second cd, comme il est éuident par la Nature de la Question, & aussy par le second nombre trouué $\frac{1}{2}\sqrt{2cd-2ab+ll}-\frac{1}{2}l$, où l'on a $\sqrt{2cd-2ab+ll} \oplus l$, & par consequent $2cd-2ab+ll \oplus ll$, ou $2cd \oplus 2ab$, ou $cd \oplus ab$. Determination.

XXII.

Trouuer deux Nombres, dont la somme jointe à la difference de leurs quarrez, & la difference jointe à la somme de leurs quarrez, soient égales à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

en sorte que la somme $lx+ly+xx-yy$ de leur somme $x+y$, & de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, soit égale au Nombre donné $18 \sim ab$, & que la somme $lx-ly+xx+yy$ de leur difference $x-y$, & de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, soit égale au nombre donné $22 \sim cd$.

Canon. Si on ôte la moitié de l'Vnité de la Racine quarrée de la somme de la moitié des deux Nombres donnez & du quart de l'Vnité, on aura le plus grand des deux nombres qu'on cherche: & si on ajoute la moitié de l'Vnité à la Racine quarrée de l'excez de la moitié du second Nombre donné augmentée du quart de l'Vnité sur la moitié du premier, on aura le plus petit.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$lx+ly+xx-yy \sim ab.$$
$$lx-ly+xx+yy \sim cd.$$

dont la somme & la difference donneront ces deux autres Equations,

$$2lx+2xx \sim ab+cd.$$
$$2ly-2yy \sim ab-cd.$$

Dans la premiere $2lx+2xx \sim ab+cd$, ou $xx+lx \sim \frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}cd$, on trouvera $x \sim \sqrt{\frac{1}{2}cd+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}ll}-\frac{1}{2}l$, & dans la seconde $2ly-2yy \sim ab-cd$, ou $yy-ly \sim \frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}ab$, on trouuera $y \sim \sqrt{\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}ll}+\frac{1}{2}l$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2cd+2ab+ll}-\tfrac{1}{2}l.$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2cd-2ab+ll}+\tfrac{1}{2}l.$$

Parceque Nous auons supposé

$$ab \sim 18.$$
$$cd \sim 22.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$4.$$
$$2.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez ab, cd, est que le premier ab doit être moindre que $cd+\frac{1}{2}ll$, à cause du terme irrationnel $\sqrt{2cd-2ab+ll}$, qui se rencontre dans chaque Nombre trouué, où l'on a $2cd+ll \oplus 2ab$, & par consequent $cd+\frac{1}{2}ll \oplus ab$.

Lorsque le premier Nombre donné ab sera plus grand que le second cd, comme si ab vaut $\frac{10}{9}$, & que cd vaille $\frac{50}{81}$ on pourra encore exprimer y, en cette sorte, $\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}\sqrt{2cd-2ab+ll}$, & alors les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2cd+2ab+ll}-\tfrac{1}{2}l.$$
$$\tfrac{1}{2}l-\sqrt{2cd-2ab+ll}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$ab \sim \tfrac{10}{9}.$$
$$cd \sim \tfrac{50}{81}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\tfrac{4}{9},\tfrac{5}{9}.$$

XXIII.

Trouver deux nombres, tels que le Solide sous leur Somme & celle de leurs quarrez, & le Solide sous leur difference & celle de leurs quarrez, soient égaux à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que le Solide $x^3+xxy+xyy+y^3$ sous leur somme $x+y$ & la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, soit égal au Nombre donné $272 \sim abc$, & que le Solide $x^3-xxy-xyy+y^3$ sous leur difference $x-y$, & la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, soit égal au Nombre donné $32 \sim dfg$.

Canon.
Si à la Moitié de la Racine cubique de l'excez du double du premier Nombre donné sur le second, on ajoute & on ôte la Moitié de la Racine quarrée du quotient qui viendra en divisant le second Nombre donné par la même Racine cubique; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x^3+xxy+xyy+y^3 \sim abc.$$

$$x^3-xxy-xyy+y^3 \sim dfg.$$

Si de la premiere $x^3+xxy+xyy+y^3 \sim abc$, on ôte la seconde $x^3-xxy-xyy+y^3 \sim dfg$, on aura cette troisieme Equation, $2xxy+2xyy \sim abc-dfg$, & en divisant par 2, on aura cette quatrieme Equation, $xxy+xyy \sim \frac{1}{2}abc-\frac{1}{2}dfg$, & en multipliant par 3, on aura cette cinquieme Equation, $3xxy+3xyy \sim \frac{3}{2}abc-\frac{3}{2}dfg$.

Si à la premiere $x^3+xxy+xyy+y^3 \sim abc$, on ajoute la deuxieme $x^3-xxy-xyy+y^3 \sim dfg$, on aura cette sixieme Equation $2x^3+2y^3 \sim abc+dfg$, dont la Moitié $x^3+y^3 \sim \frac{1}{2}abc+\frac{1}{2}dfg$ étant ajoutée à la cinquieme $3xxy+3xyy \sim \frac{3}{2}abc-\frac{3}{2}dfg$, on aura cette septieme Equation $x^3+3xxy+3xyy+y^3 \sim 2abc-dfg$, dont la Racine cubique donne cette huitieme Equation, $x+y \sim \sqrt[3]{2abc-dfg}$, par laquelle on divisera la Moitié $x^3+y^3 \sim \frac{1}{2}abc+\frac{1}{2}dfg$, de la sixieme Equation, & aussy la quatrieme $xxy+xyy \sim \frac{1}{2}abc-\frac{1}{2}dfg$, pour avoir cette Neuvieme Equation $xx-xy+yy \sim \frac{abc+dfg}{2\sqrt[3]{2abc-dfg}}$, & cette dixieme $xy \sim \frac{abc-dfg}{2\sqrt[3]{2abc-dfg}}$, laquelle étant ôtée de la Neuvieme $xx-xy+yy \sim \frac{abc+dfg}{2\sqrt[3]{2abc-dfg}}$, on aura cette onzieme Equation, $xx-2xy+yy \sim \frac{dfg}{\sqrt[3]{2abc-dfg}}$, dont la Racine quarrée donne celle-cy, $x-y \sim \sqrt{\frac{dfg}{\sqrt[3]{2abc-dfg}}}$, laquelle étant ajoutée de la huitieme $x+y \sim \sqrt[3]{2abc-dfg}$, on aura $x \sim \frac{1}{2}\sqrt[3]{2abc-dfg}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{dfg}{\sqrt[3]{2abc-dfg}}}$, & $y \sim \frac{1}{2}\sqrt[3]{2abc-dfg}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{dfg}{\sqrt[3]{2abc-dfg}}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2abc-dfg}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{dfg}{\sqrt[3]{2abc-dfg}}}.$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2abc-dfg}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{dfg}{\sqrt[3]{2abc-dfg}}}.$$

Parceque nous auons supposé

$$abc \sim 272.$$

$$dfg \sim 32.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$

$$3.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux nombres donnez abc, dfg, est que le second dfg doit être moindre que le double $2abc$ du premier, comme il est aisé de voir dans le terme irrationnel $\sqrt[3]{2abc-dfg}$.

Pour auoir vn calcul moins embarassé, mettez

$$x+y.$$

$$x-y.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez ces deux Equations à resoudre,

$$4x^3+4xyy \sim abc.$$

$$8xyy \sim dfg.$$

Dans la seconde $8xyy \sim dfg$, on trouuera $x \sim \frac{dfg}{8yy}$, & la premiere $4x^3+4xyy \sim abc$, se changera en celle-cy, $\frac{d^3f^3g^3}{128y^6}+\frac{1}{2}dfg \sim abc$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{dfg}{\sqrt[3]{2abc-dfg}}}$: c'est pourquoy au lieu de $x \sim \frac{dfg}{8yy}$, on aura $x \sim \frac{1}{2}\sqrt[3]{2abc-dfg}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

XXIV.

Trouuer deux Nombres, tels que le Solide sous leur somme & la difference de leurs quarrez, & le Solide sous leur difference & la somme de leurs quarrez soient égaux à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que le Solide $x^3+xxy-xyy-y^3$, sous leur somme $x+y$, & la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit égal au Nombre donné $128 \sim abc$, & que le Solide $x^3-xxy+xyy-y^3$ sous leur difference $x-y$ & la somme $xx+yy$ de leurs quarrez soit égal au Nombre donné $68 \sim dfg$.

Canon. Si à la Moitié de la Racine quarrée du quotient qui viendra en diuisant le premier Nombre donné par la Racine cubique de l'excez du double du second Nombre donné sur le premier, on ajoute & on ôte

la moitié de la même Racine cubique, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x^3+xxy-xyy-y^3 \backsim abc.$$
$$x^3-xxy+xyy-y^3 \backsim dfg.$$

Si on ôte la deuxieme $x^3-xxy+xyy-y^3 \backsim dfg$, de la premiere $x^3+xxy-xyy-y^3 \backsim abc$, on aura cette troisieme Equation $2xxy-2xyy \backsim abc-dfg$, & en divisant par 2 on aura cette quatrieme Equation, $xxy-xyy \backsim \frac{1}{2}abc-\frac{1}{2}dfg$, dont le triple donne cette cinquieme Equation, $3xxy-3xyy \backsim \frac{3}{2}abc-\frac{3}{2}dfg$.

Si on ajoute la premiere Equation $x^3+xxy-xyy-y^3 \backsim abc$, à la seconde $x^3-xxy+xyy-y^3 \backsim dfg$, on aura cette sixieme Equation $2x^3-2y^3 \backsim abc+dfg$, & si de sa moitié $x^3-y^3 \backsim \frac{1}{2}abc+\frac{1}{2}dfg$, on ôte la cinquieme $3xxy-3xyy \backsim \frac{3}{2}abc-\frac{3}{2}dfg$, on aura cette septieme Equation, $x^3-3xxy+3xyy-y^3 \backsim 2dfg-abc$, dont la Racine cubique donne cette huitieme Equation, $x-y \backsim \sqrt[3]{2dfg-abc}$, par laquelle on divisera la moitié $x^3-y^3 \backsim \frac{1}{2}abc+\frac{1}{2}dfg$ de la sixieme, & aussy la quatrieme $xxy-xyy \backsim \frac{1}{2}abc-\frac{1}{2}dfg$, pour avoir cette Neuvieme Equation, $xx+xy+yy \backsim \frac{abc+dfg}{2\sqrt[3]{2dfg-abc}}$, & cette dixieme $xy \backsim \frac{abc-dfg}{2\sqrt[3]{2dfg-abc}}$, laquelle étant ajoutée à la Neuvieme $xx+xy+yy \backsim \frac{abc+dfg}{2\sqrt[3]{2dfg-abc}}$, on aura cette onzieme Equation, $xx+2xy+yy \backsim \frac{abc}{\sqrt[3]{2dfg-abc}}$, dont la Racine quarrée donne celle-cy, $x+y \backsim \sqrt{\frac{abc}{\sqrt[3]{2dfg-abc}}}$ à laquelle ajoutant & ôtant la huitieme $x-y \backsim \sqrt[3]{2dfg-abc}$, on trouvera $x \backsim \frac{1}{2}\sqrt[3]{2dfg-abc}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{abc}{\sqrt[3]{2dfg-abc}}}$, & $y \backsim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{abc}{\sqrt[3]{2dfg-abc}}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2dfg-abc}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{abc}{\sqrt[3]{2dfg-abc}}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{2dfg-abc}.$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{abc}{\sqrt[3]{2dfg-abc}}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{2dfg-abc}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$abc \backsim 128.$$
$$dfg \backsim 68.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez abc, dfg, est que le premier abc, doit être moindre que le double $2dfg$, du second, comme il est aisé de voir dans le terme irrationel $\sqrt[3]{2dfg-abc}$. Determination.

Pour avoir un calcul plus facile, mettez

$$x+y.$$
$$x-y.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, Vous aurez ces deux Equations à resoudre,

$$8xxy \sim abc.$$

$$4xxy + 4y^3 \sim dfg.$$

Dans la premiere $8xxy \sim abc$, on trouvera $y \sim \frac{abc}{8xx}$, & la deuxieme $4xxy + 4y^3 \sim dfg$, se changera en celle-cy, $\frac{1}{2}abc + \frac{a^3b^3c^3}{128x^6} \sim dfg$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{abc}{\sqrt[3]{2dfg - abc}}}$, & au lieu de $y \sim \frac{abc}{8xx}$, on aura $y \sim \frac{1}{2}\sqrt[3]{2dfg - abc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouveront les Mêmes qu'auparavant.

A l'occasion de cette Question, Nous ajouterons icy les suivantes.

I.

Trouver deux nombres, tels que les solides sous chacun & la somme de leurs quarrez, soient égaux à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que le Solide $x^3 + xyy$ sous le premier x, & la somme $xx + yy$ de leurs quarrez, soit égal au Nombre donné $170 \sim abc$, & que le solide $xxy + y^3$ sous le second y, & la somme $xx + yy$ de leurs quarrez, soit égal au Nombre donné $102 \sim dfg$.

Canon. Si on divise chacun des deux Nombres donnez par la Racine cubique de la somme de leurs quarrez, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x^3 + xyy \sim abc.$$

$$y^3 + xxy \sim dfg.$$

Dans la premiere $x^3 + xyy \sim abc$, on trouvera la somme $xx + yy \sim \frac{abc}{x}$, & dans la seconde $y^3 + xxy \sim dfg$, on trouvera la même somme $xx + yy \sim \frac{dfg}{y}$. c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{abc}{x} \sim \frac{dfg}{y}$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{dfgx}{abc}$, & au lieu de $xx + yy \sim \frac{abc}{x}$, ou de $xx + yy \sim \frac{dfg}{y}$, on aura $xx + \frac{ddffggxx}{aabbcc} \sim \frac{abc}{x}$, où l'on trouvera $x \sim \frac{abc}{\sqrt[3]{aabbcc + ddffgg}}$: & au lieu de $y \sim \frac{dfgx}{abc}$, on aura $y \sim \frac{dfg}{\sqrt[3]{aabbcc + ddffgg}}$.

Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abc,\ dfg}{\sqrt[3]{aabbcc + ddffgg}}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$abc \sim 170.$$

$$dfg \sim 102.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

5.

3.

II.

Trouver deux Nombres, tels que les Solides sous châcun & la difference de leurs quarez, soient égaux à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

en sorte que le Solide $x^3 - xyy$ sous le premier x, & la difference $xx - yy$, de leurs quarez, soit égal au Nombre donné $80 \backsim abc$, & que le solide $xxy - y^3$ sous le second y, & la difference $xx - yy$ des mêmes quarez, soit égal au nombre donné $48 \backsim dfg$.

Si on divise chacun des deux Nombres donnez par la Racine cubique de la difference de leurs quarez, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x^3 - xyy \backsim abc.$$

$$xxy - y^3 \backsim dfg.$$

Dans la premiere $x^3 - xyy \backsim abc$, on trouvera la difference $xx - yy \backsim \frac{abc}{x}$, & dans la seconde $xxy - y^3 \backsim dfg$, on trouvera la même difference $xx - yy \backsim \frac{dfg}{y}$: c'est pourquoy on aura cette Equation $\frac{abc}{x} \backsim \frac{dfg}{y}$, dans laquelle on trouvera $y \backsim \frac{dfgx}{abc}$, & au lieu de $xx - yy \backsim \frac{abc}{x}$, ou de $xx - yy \backsim \frac{dfg}{y}$, on aura $xx - \frac{ddffggxx}{aabbcc} \backsim \frac{abc}{x}$, où l'on trouvera $x \backsim \frac{abc}{\sqrt[3]{aabbcc - ddffgg}}$, & au lieu de $y \backsim \frac{dfgx}{abc}$, on aura $y \backsim \frac{dfg}{\sqrt[3]{aabbcc - ddffgg}}$.

Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abc,\ dfg.}{\sqrt[3]{aabbcc - ddffgg},}$$

Parceque Nous avons supposé

$$abc \backsim 80.$$

$$dfg \backsim 48.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

III.

Trouver deux Nombres, tels que les solides sous chacun & le quaré de leur somme soit égaux à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que le Solide $x^3+2xxy+xyy$ sous le premier x, & le quarré $xx+2xy+yy$ de leur somme $x+y$, soit égal au Nombre donné $320 \backsim abc$, & que le Solide $xxy+2xyy+y^3$ sous le second y, & le même quarré $xx+2xy+yy$ soit égal au Nombre donné $192 \backsim dfg$.

Canon. Si on divise chacun des deux Nombres donnez par la Racine cubique du quarré de leur somme, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x^3+2xxy+xyy \backsim abc.$$

$$y^3+2xyy+xxy \backsim dfg.$$

Dans la premiere $x^3+2xxy+xyy \backsim abc$, on trouvera le quarré $xx+2xy+yy \backsim \frac{abc}{x}$, & dans la seconde $y^3+2xyy+xxy \backsim dfg$, on trouvera le même quarré $xx+2xy+yy \backsim \frac{dfg}{y}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{abc}{x} \backsim \frac{dfg}{y}$, dans laquelle on trouvera $y \backsim \frac{dfgx}{abc}$, & au lieu de $xx+2xy+yy \backsim \frac{abc}{x}$, ou de $xx+2xy+yy \backsim \frac{dfg}{y}$, on aura $xx+\frac{2dfgxx}{abc}+\frac{ddffggxx}{aabbcc} \backsim \frac{abc}{x}$, où l'on trouvera $x \backsim \frac{abc}{\sqrt[3]{aabbcc+2abcdfg+ddffgg}}$, & au lieu de $y \backsim \frac{dfgx}{abc}$, on aura $y \backsim \frac{dfg}{\sqrt[3]{aabbcc+2abcdfg+ddffgg}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abc,\ dfg}{\sqrt[3]{aabbcc+2abcdfg+ddffgg}}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$abc \backsim 320.$$

$$dfg \backsim 192.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

IV.

Trouver deux Nombres, tels que les Solides sous châcun & le quarré de leur Difference, soient égaux à des Nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que le Solide $x^3-2xxy+xyy$ sous le premier x, & le quarré $xx-2xy+yy$ de leur difference $x-y$, soit égal au Nombre donné $20 \backsim abc$, & que le Solide $xxy-2xyy+y^3$ sous le second y, & le même quarré $xx-2xy+yy$, soit égal au Nombre donné $12 \backsim dfg$.

Canon. Si on divise chacun des deux Nombres donnez par la Racine cubique du quarré de leur Difference, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x^3 - 2xxy + xyy \sim abc.$$

$$y^3 - 2xyy + xxy \sim dfg.$$

Dans la premiere $x^3 - 2xxy + xyy \sim abc$, on trouvera le quarré $xx - 2xy + yy \sim \frac{abc}{x}$, & dans la seconde $y^3 - 2xyy + xxy \sim dfg$, on trouvera le même quarré $xx - 2xy + yy \sim \frac{dfg}{y}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{abc}{x} \sim \frac{dfg}{y}$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{dfgx}{abc}$, & au lieu de $xx - 2xy + yy \sim \frac{abc}{x}$, ou de $xx - 2xy + yy \sim \frac{dfg}{y}$, on aura $xx - \frac{2dfgxx}{abc} + \frac{ddffggxx}{aabbcc} \sim \frac{abc}{x}$, où l'on trouvera $x \sim \frac{abc}{\sqrt[3]{aabbcc - 2abcdfg + ddffgg}}$, & au lieu de $y \sim \frac{dfgx}{abc}$, on aura $y \sim \frac{dfg}{\sqrt[3]{aabbcc - 2abcdfg + ddffgg}}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abc,\ dfg}{\sqrt[3]{aabbcc - 2abcdfg + ddffgg}}.$$

Parceque nous avons supposé

$$abc \sim 20.$$

$$dfg \sim 12.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

V.

Trouver deux Nombres, tels que le solide sous le premier & le quarré du second, & le solide sous le second & le quarré du premier, soient égaux à des nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres,

x.

y.

en sorte que le Solide xyy sous le premier x, & le quarré yy du second, soit égal au nombre donné $45 \sim abc$, & que le Solide xxy sous le second y, & le quarré xx du premier, soit égal au nombre donné $75 \sim dfg$. Canon.

Les Racines cubiques des deux quotiens qu'on aura en divisant chacun des deux nombres donnez par le quarré de l'autre, donneront les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xyy \sim abc.$$

$$xxy \sim dfg.$$

Dans la premiere $xyy \sim abc$, on trouvera $x \sim \frac{abc}{yy}$, & la seconde $xxy \sim dfg$, se changera en celle-cy, $\frac{aabbcc}{y^3} \sim dfg$, dans laquelle on trouvera $y \sim \sqrt[3]{\frac{aabbcc}{dfg}}$, & au lieu de $x \sim \frac{abc}{yy}$, on aura $x \sim \sqrt[3]{\frac{ddffgg}{abc}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt[3]{\frac{ddffgg}{abc}}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{aabbcc}{dfg}}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$abc \sim 45.$$

$$dfg \sim 75.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

On auroit pû proposer cette Question ainsy; Trouuer deux Nombres, tels que les Solides sous chacun & leur produit, soient égaux à des Nombres donnez.

VI.

Trouuer deux Nombres, tels que le Solide sous leur Somme & leur produit, & le Solide sous leur difference & leur produit, soient égaux à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

en sorte que le Solide $xxy+xyy$ sous leur somme $x+y$, & leur produit xy, soit égal au Nombre donné $120 \sim abc$, & que le Solide $xxy-xyy$ sous leur difference $x-y$, & leur produit xy, soit égal au Nombre donné $30 \sim dfg$.

Canon. Les Racines cubiques des deux quotiens qu'on aura en diuisant le quarré de la somme des deux Nombres donnez par le double de leur difference, & reciproquement le quarré de leur difference par le double de leur somme, donneront les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xxy+xyy \sim abc.$$

$$xxy-xyy \sim dfg.$$

dont la somme & la difference donneront ces deux autres Equations,

$$2xxy \sim abc+dfg.$$

$$2xyy \sim abc-dfg.$$

Dans la premiere $2xxy \sim abc+dfg$, on trouuera $y \sim \frac{abc+dfg}{2xx}$, & la deuxieme $2xyy \sim abc-dfg$, se changera en celle-cy, $\frac{2aabbcc+4abcdfg+2ddffgg}{4x^3} \sim abc-dfg$, dans laquelle on trouuera $x \sim \sqrt[3]{\frac{aabbcc+2abcdfg+ddffgg}{2abc-2dfg}}$, & au lieu de $y \sim \frac{abc+dfg}{2xx}$, on aura $y \sim \sqrt[3]{\frac{aabbcc-2abcdfg+ddffgg}{2abc+2dfg}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt[3]{\frac{aabbcc+2abcdfg+ddffgg}{2abc-2dfg}}.$$

$$\sqrt[3]{\frac{aabbcc-2abcdfg+ddffgg}{2abc+2dfg}}.$$

Parceque Nous auons supposé

$abc \backsim 120.$

$dfg \backsim 30.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

VII.

Trouuer deux Nombres, tels que le Solide sous leur Somme & le quarré de leur difference, & le Solide sous leur difference & le quarré de leur somme, soient égaux à des Nombres donnez.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

en sorte que le Solide $x^3-xxy-xyy+y^3$ sous leur somme $x+y$, & le quarré $xx-2xy+yy$ de leur difference $x-y$, soit égal au Nombre donné $32 \backsim abc$, & que le Solide $x^3+xxy-xyy-y^3$ sous leur difference $x-y$, & le quarré $xx+2xy+yy$ de leur somme $x+y$, soit égal au Nombre donné $128 \backsim dfg$.

Les Moitiez de la somme & de la difference des Racines cubiques des deux quotiens, qu'on aura en diuisant par châcun des deux Nombres donnez le quarré de l'autre, donneront les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x^3-xxy-xyy+y^3 \backsim abc.$$

$$x^3+xxy-xyy-y^3 \backsim dfg.$$

Pour auoir vn calcul plus aisé, supposez

$$x \backsim \tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}\omega.$$

$$y \backsim \tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}\omega.$$

& vous aurez

$$x+y \backsim z.$$

$$x-y \backsim \omega.$$

& les deux Equations precedentes se changeront en ces deux autres,

$$z\omega\omega \backsim abc.$$

$$zz\omega \backsim dfg.$$

Dans la premiere $z\omega\omega \backsim abc$, on trouuera $z \backsim \frac{abc}{\omega\omega}$, & la deuxieme $zz\omega \backsim dfg$, se changera en celle-cy, $\frac{aabbcc}{\omega^3} \backsim dfg$, dans laquelle on trouuera $\omega \backsim \sqrt[3]{\frac{aabbcc}{dfg}}$, & au lieu de $z \backsim \frac{abc}{\omega\omega}$, on aura $z \backsim \sqrt[3]{\frac{ddffgg}{abc}}$,
& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(3)}\,\frac{ddffgg}{abc} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(3)}\,\frac{aabbcc}{dfg}.$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(3)}\,\frac{ddffgg}{abc} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(3)}\,\frac{aabbcc}{dfg}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$abc \sim 32.$$

$$dfg \sim 128.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$5.$$

$$3.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux nombres donnez abc, dfg, est que le premier abc doit être moindre que le second dfg, à cause du second Nombre trouvé $\frac{1}{2}\sqrt{(3)}\,\frac{ddffgg}{abc} - \frac{1}{2}\sqrt{(3)}\,\frac{aabbcc}{dfg}$, où l'on a $\frac{ddffgg}{abc} \oplus \frac{aabbcc}{dfg}$, ou $ddffgg \oplus \frac{a^3b^3c^3}{dfg}$, ou $d^3f^3g^3 \oplus a^3b^3c^3$, & par consequent $dfg \oplus abc$.

Si l'on reduit les deux Nombres trouvez en même denomination, on en aura une expression plus simple, telle qu'est la suiuante,

$$\frac{dfg+abc,\ dfg-abc}{2\sqrt{(3)}\,abcdfg}.$$

De laquelle on tire ce canon, qui est aussy plus simple.

Canon. *Si par le double de la Racine cubique du produit sous les deux Nombres donnez, on diuise leur somme & leur difference, on aura les deux Nombres qu'on cherche.*

où l'on void euidemment la raison de la determination precedente, pour empêcher que le second Nombre trouué ne soit nié, mais il y en a une autre à faire, que Nous auons negligée presque par tout, parcequ'elle est facile, sauoir pour faire que la solution soit rationnelle. On void icy clairement que pour être rationnelle, les deux Nombres donnez abc, dfg, doiuent être tels, que leur produit $abcdfg$ soit un nombre cubique. comme il arriue icy à l'égard des deux nombres donnez 32, 128, dont le produit 4096 a sa Racine cubique 16.

Sans qu'il soit besoin de faire de nouuelles suppositions, on pourra resoudre la Question par le moyen des deux premieres Equations, dont la somme & la difference donnent ces deux autres,

$$2x^3 - 2xyy \sim abc + dfg.$$

$$2y^3 - 2xxy \sim abc - dfg.$$

Dans la premiere $2x^3 - 2xyy \sim abc + dfg$, on trouuera $yy \sim \frac{2x^3 - abc - dfg}{2x}$, & dans la seconde $2y^3 - 2xxy \sim abc - dfg$, on trouuera le même $yy \sim \frac{abc - dfg + 2xxy}{2y}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{2x^3 - abc - dfg}{2x} \sim \frac{abc - dfg + 2xxy}{2y}$, ou $dfgx - abcx \sim abcy + dfgy$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{dfgx - abcx}{abc + dfg}$, &c.

Question XXXIV.

Trouuer deux Nombres, tels que leur raison, & la raison de leur somme à celle de leurs quarrez, soient données.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont le premier x, soit au second y, comme $1 \sim r$, à $3 \sim s$, en sorte que leur somme $x+y$ soit à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim c$, à $5 \sim d$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, c, d, on multiplie le premier & le second par le Plan sous le quatrieme & la somme du premier & du second, & qu'on diuise chaque Solide par le Solide sous le troisieme & la somme des quarrez des deux premiers; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$x, y :: r, s.$$
$$lx+ly, xx+yy :: c, d.$$

desquelles on tire ces deux Equations,

$$sx \sim ry.$$
$$ldx+ldy \sim cxx+cyy.$$

Dans la premiere $sx \sim ry$, on trouuera $x \sim \frac{ry}{s}$, & la deuxieme $ldx+ldy \sim cxx+cyy$, se changera en celle-cy, $ldy+\frac{ldry}{s} \sim cyy+\frac{llccddyy}{ss}$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{ldss+ldrs}{crr+css}$, & au lieu de $x \sim \frac{ry}{s}$, on aura $x \sim \frac{ldrr+ldrs}{crr+css}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{drr+drs,\ dss+drs}{crr+css}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 3.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$2.$$
$$6.$$

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'Vnité, mettez

$$\frac{x, y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, Vous aurez en entiers, ces deux analogies,

$$x, y :: r, s.$$
$$xz+yz, xx+yy :: c, d.$$

Et par consequent ces deux Equations,

$$sx \sim ry.$$
$$dxz + dyz \sim cxx + cyy.$$

Dans la première $sx \sim ry$, on trouvera $x \sim r$, & $y \sim s$, & la deuxieme $dxz + dyz \sim cxx + cyy$, se changera en celle-cy, $drz + dsz \sim crr + css$, dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{crr+css}{dr+ds}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouveront les mêmes qu'auparavant.

Question XXXV.

Trouver deux Nombres, tels que leur raison, & la raison de leur difference à la somme de leurs quarrez, soient égales à celles de deux nombres donnez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que le premier x, soit au second y, comme $1 \sim r$, à $3 \sim s$, & que leur difference $x-y$, soit à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez comme $1 \sim c$, à $10 \sim d$.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, c, d, on multiplie les deux premiers par le Plan sous le quatrieme & la difference des deux premiers, & qu'on divise chaque Solide par le Solide sous le troisieme & la somme des quarrez des deux premiers; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$x, y :: r, s.$$
$$lx - ly, xx + yy :: c, d.$$

Desquelles on tire ces deux Equations,

$$sx \sim ry.$$
$$ldx - ldy \sim cxx + cyy.$$

Dans la premiere $sx \sim ry$, on trouvera $y \sim \frac{sx}{r}$, & la deuxieme $ldx - ldy \sim cxx + cyy$, se changera en celle-cy, $ldx - \frac{ldsx}{r} \sim cxx + \frac{cssxx}{r}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{drr \cdots drs}{crr+css}$, & au lieu de $y \sim \frac{sx}{r}$, on aura $y \sim \frac{dsr \cdots dss}{crr+css}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{drr \cdots drs,\ drs \cdots dss}{crr+css}.$$

Parceque nous avons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 3.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 10.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$2.$

$6.$

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'Vnité, mettez

$\frac{x, y}{z}.$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez ces deux analogies,

$x, y :: r, s.$

$xz - yz, xx + yy :: c, d.$

& par consequent ces deux Equations,

$sx \backsim ry.$

$dxz - dyz \backsim cxx + cyy.$

Dans la premiere $sx \backsim ry$, on trouvera $x \backsim r$, & $y \backsim s$, & la deuxieme $dxz - dyz \backsim cxx + cyy$, se changera en celle-cy, $drz - dsz \backsim crr + css$, dans laquelle on trouvera $z \backsim \frac{crr + css}{dr - ds}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouveront les mêmes qu'auparauant.

Question XXXVI.

Trouuer deux Nombres, tels que leur raison & la raison de leur somme à la difference de leurs quarrez soient données.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

en sorte que le premier x, soit au second y, comme $1 \backsim r$, à $3 \backsim s$, & que leur somme $x + y$, soit à la difference $xx - yy$ de leurs quarrez, comme $1 \backsim c$, à $6 \backsim d$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, c, d, on multiplie les deux premiers, chacun par le quatrieme, & qu'on diuise chaque Plan par le Plan sous le troisieme & la difference des deux premiers, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$x, y :: r, s.$

$1x + 1y, xx - yy :: c, d.$

desquelles on tire ces deux Equations,

$sx \backsim ry.$

$1dx + 1dy \backsim cxx - cyy.$

Dans la premiere $sx \backsim ry$, on trouvera $y \backsim \frac{sx}{r}$, & la deuxieme $1dx + 1dy \backsim cxx - cyy$, se changera en celle-cy, $1dx + \frac{1dsx}{r} \backsim cxx - \frac{cssxx}{rr}$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{dr}{cr - cs}$, & au lieu de $y \backsim \frac{sx}{r}$, on aura $y \backsim \frac{ds}{cr - cs}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ds,\ ds}{cr - cs}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 3.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 6.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$3.$$
$$9.$$

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'unité, mettez

$$\frac{x,\ y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, Vous aurez en entiers, ces deux analogies,

$$x,\ y :: r,\ s.$$
$$xz + yz,\ xx - yy :: c,\ d,$$

& par consequent ces deux Equations,

$$sx \sim ry.$$
$$dxz + dyz \sim cxx - cyy.$$

Dans la premiere $sx \sim ry$, on trouvera $x \sim r$, & $y \sim s$, & la seconde $dxz + dyz \sim cxx - cyy$, se changera en celle-cy, $drz + dsz \sim crr - css$, dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{cr - cs}{d}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouveront les mêmes qu'auparavant.

Question XXXVII.

Trouver deux nombres, tels que leur raison, & la raison de leur difference à la difference de leurs quarrez soient données.

On propose de trouver deux nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que le premier x, soit au second y, comme $1 \sim r$, à $3 \sim s$, & que leur difference $x - y$, soit à la difference $xx - yy$, de leurs quarrez, comme $1 \sim c$, à $12 \sim d$.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, c, d, on multiplie chacun des deux premiers par le quatrieme, & qu'on divise chaque Plan par le Plan sous le troisieme & la somme des deux premiers; on aura les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$x,\ y :: r,\ s.$$
$$lx - ly,\ xx - yy :: c,\ d.$$

desquelles on tire ces deux Equations,

$$sx \sim ry.$$

$$dlx - dly \sim cxx - cyy.$$

Dans la premiere $sx \sim ry$, on trouvera $x \sim \frac{ry}{s}$, & la deuxieme $ldx - ldy \sim cxx - cyy$, se changera en celle-cy, $\frac{ldry}{s} - ldy \sim \frac{crryy}{ss} - cyy$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{ds}{cr+cs}$, & au lieu de $x \sim \frac{ry}{s}$, on aura $x \sim \frac{dr}{cr+cs}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{dr,\ ds}{cr+cs}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 3.$$

$$c \sim 1.$$

$$d \sim 12.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$3.$$

$$9.$$

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'Unité, mettez

$$\frac{x,\ y}{z}.$$

pour les deux nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, Vous aurez en entiers, ces deux analogies,

$$x,\ y :: r,\ s.$$

$$xz - yz,\ xx - yy :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations,

$$sx \sim ry.$$

$$dxz - dyz \sim cxx - cyy.$$

Dans la premiere $sx \sim ry$, on trouvera $x \sim r$, & $y \sim s$, & la deuxieme $dxz - dyz \sim cxx - cyy$, se changera en celle-cy, $drz - dsz \sim crr - css$, dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{cr+cs}{d}$, & les deux nombres qu'on cherche, se trouveront les mêmes qu'auparavant.

Corollaire.

C'est de la même façon que l'on resoudra la Question suivante;

Trouver deux Nombres, tels que leur raison, & la raison de leur difference à leur produit, soient données.

Comme si on veut que le premier soit au second comme $1 \sim r$, à $3 \sim s$, & que leur difference soit à leur produit comme $1 \sim c$, à $6 \sim d$. ces deux Nombres seront tels,

$$\frac{ds - dr}{cs}.$$

$$\frac{ds - dr}{cr}.$$

Parceque Nous avons supposé

$r \sim 1.$

$s \sim 3.$

$c \sim 1.$

$d \sim 6.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.

12.

On tire de cette solution indefinie, le Canon suiuant;

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, c, d, on diuise separément le Plan sous le quatrieme & la difference des deux premiers, par le Plan sous le second & le troisieme, & aussy par le le Plan sous le premier & le troisieme; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

C'est aussy de la même façon, que l'on resoudra cette Question;

Trouuer deux Nombres, tels que leur raison, & la raison de leur somme à leur produit, soient données.

Comme si on veut que le premier soit au second, comme $1 \sim r$, à $3 \sim s$, & que leur somme soit à leur produit comme $1 \sim c$, à $6 \sim d$. ces deux Nombres seront tels,

$$\frac{dr+ds}{cs}.$$

$$\frac{dr+ds}{cr}.$$

Parceque nous auons supposé

$r \sim 1.$

$s \sim 3.$

$c \sim 1.$

$d \sim 6.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

8.

24.

On tire de cette solution indefinie, le Canon suiuant;

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, c, d, on diuise separément le Plan sous le quatrieme & la somme des deux premiers, par le Plan sous le second & le troisieme, & aussy par le Plan sous le premier & le troisieme; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Question XXXVIII.

Trouuer deux Nombres, tels que leur raison, & la raison du plus grand au quarré du plus petit, soient données.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

en sorte que le premier x, soit au second y, comme $1 \sim r$, à $3 \sim s$, & que le plus grand y, soit au quarré xx du plus petit x, comme $1 \sim c$, à $6 \sim d$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, c, d, on diuise le Solide sous les deux premiers & le quatrieme, & le Solide sous le quatrieme & le quarré du second, chacun par le Solide sous le troisieme & le quarré du premier; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$x, y :: r, s.$$
$$y, xx :: c, d.$$

desquelles on tire ces deux Equations,

$$sx \sim ry.$$
$$dy \sim cxx.$$

Dans la premiere $sx \sim ry$, on trouuera $x \sim \frac{ry}{s}$, & la deuxieme $dy \sim cxx$, se changera en celle-cy, $dy \sim \frac{crryy}{ss}$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{dss}{crr}$, & au lieu de $\frac{ry}{s}$, pour le plus petit Nombre x, on aura $\frac{drs}{crr}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{drs,\ dss}{crr}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 3.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 6.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

18.

54.

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'vnité, mettez

$$\frac{x,\ y,}{z}$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & en supposant que le premier x, soit le plus petit, on aura ces deux analogies,

$$x, y :: r, s.$$
$$yz, xx :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations,

$$sx \sim ry.$$
$$dyz \sim cxx.$$

Dans la premiere $sx \sim ry$, on trouuera $x \sim r$, & $y \sim s$, & la seconde $dyz \sim cxx$, se changera en celle-cy, $dsz \sim crr$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{crr}{ds}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Question XXXIX.

Trouver deux Nombres, tels que leur raison, & la raison du plus petit à son quarré, soient données.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

en sorte que le premier x, soit au second y, comme $1 \sim r$, à $3 \sim s$, & que le plus petit x, soit à son quarré xx, comme $1 \sim c$, à $6 \sim d$.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, c, d, on divise les deux Plans sous le premier & le quatrieme, & sous le second & le quatrieme, chacun par le Plan sous le premier & le troisieme; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$x, y :: r, s.$$
$$1, x :: c, d.$$

desquelles on tire ces deux Equations,

$$sx \sim ry.$$
$$1d \sim cx.$$

Dans la premiere $sx \sim ry$, on trouvera $x \sim \frac{ry}{s}$, & la deuxieme $1d \sim cx$, se changera en celle-cy, $1d \sim \frac{cry}{s}$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{ds}{r}$, & au lieu de $x \sim \frac{ry}{s}$, on aura $x \sim \frac{d}{c}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels

$$\frac{dr.\ ds.}{cr}$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 3.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 6.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$6.$$

$$18.$$

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'Unité, mettez

$$x, y.$$
$$z$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & en supposant que le premier est le plus petit, on aura ces deux analogies,

$$x, y :: r, s.$$
$$z. x :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations,

$$sx \sim ry.$$
$$dz \sim cx.$$

Dans la premiere $sx \sim ry$, on trouuera $x \sim r$, & $y \sim s$, & la deuxieme $dz \sim cx$, se changera en celle-cy, $dz \sim cr$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{cr}{d}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Question XL.

Trouuer deux Nombres, tels que leur raison, & la raison de leur somme au quarré du plus petit, soient données.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que le premier x, soit au second y, comme $1 \sim r$, à $3 \sim s$, & que leur somme $x+y$ soit au quarré xx du plus petit x, comme $1 \sim c$, à $2 \sim d$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, c, d, on diuise le Solide sous la somme des deux premiers & le Plan du premier & du dernier, & le Solide sous la somme des deux premiers & le Plan du second & du quatrieme, par le Solide sous le troisieme & le quarré du premier; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$x, y :: r, s.$$

$$lx+ly, xx :: c, d.$$

desquelles on tire ces deux Equations,

$$sx \sim ry.$$

$$ldx+ldy \sim cxx.$$

Dans la premiere $sx \sim ry$, on trouuera $x \sim \frac{ry}{s}$, & la deuxieme $ldx+ldy \sim cxx$, se changera en celle-cy, $\frac{ldry}{s}+ldy \sim \frac{crryy}{ss}$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{drs+dss}{crr}$, & au lieu de $x \sim \frac{ry}{s}$, on aura $x \sim \frac{drs+drr}{crr}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{drs+drr,\ drs+dss}{crr}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 3.$$

$$c \sim 1.$$

$$d \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$8.$$

$$24.$$

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'vnité, mettez

$$\frac{x,\ y}{z}.$$

pour les deux nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez en entiers, ces deux analogies,

$$x,\ y :: r,\ s.$$

$$xz + yz,\ xx :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations,

$$sx \backsim ry.$$

$$dxz + dyz \backsim cxx.$$

Dans la premiere $sx \backsim ry$, on trouuera $x \backsim r$, & $y \backsim s$, & la deuxieme $dxz + dyz \backsim cxx$, se changera en celle-cy, $drz + dsz \backsim crr$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{dss - drs}{crr}$: & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Question XLI. & XLII.

Trouuer deux Nombres, tels que leur raison, & la raison de leur difference au quarré du plus petit, soient données.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que le premier x, soit au second y, comme $1 \backsim r$, à $3 \backsim s$, & que leur difference $x - y$ soit au quarré xx du plus petit x, comme $1 \backsim c$, à $6 \backsim d$.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, c, d, on diuise le Solide sous la difference des deux premiers & le Plan du premier & du dernier, & le Solide sous la difference des deux premiers & le Plan du second & du quatrieme, par le Solide sous le troisieme & le quarré du premier; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$x,\ y :: r,\ s.$$

$$1y - 1x,\ xx :: c,\ d.$$

desquelles on tire ces deux Equations,

$$sx \backsim ry.$$

$$1dy - 1dx \backsim cxx.$$

Dans la premiere $sx \backsim ry$, on trouuera $x \backsim \frac{ry}{s}$, & la deuxieme $1dy - 1dx \backsim cxx$, se changera en celle-cy, $1dy - \frac{1dry}{s} \backsim \frac{crryy}{ss}$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{dss - drs}{crr}$, & au lieu de $x \backsim \frac{ry}{s}$, on aura $x \backsim \frac{drs - drr}{crr}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{drs - drr,\ dss - drs}{crr}.$$

Parceque nous auons supposé

$r \backsim 1.$

$r \sim 1.$

$s \sim 3.$

$c \sim 1.$

$d \sim 6.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

12.

36.

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'vnité, mettez

$\frac{x, y}{z}.$

pour les deux nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez en entiers, ces deux Equations,

$x, y :: r, s.$

$yz - xz, xx :: c, d.$

& par consequent ces deux Equations,

$sx \sim ry.$

$dyz - dxz \sim cxx.$

Dans la premiere $sx \sim ry$, on trouuera $x \sim r$, & $y \sim s$, & la deuxieme $dyz - dxz \sim cxx$, se changera en celle-cy, $dsz - drz \sim crr$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{crr}{ds - dr}$, & les deux nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Corollaire.

C'est de la même façon que l'on resoudra la Question suiuante;

Trouuer deux Nombres, tels que leur raison, & la raison du plus petit au quarré du plus grand, soient données.

Comme si on veut que le premier soit au second comme $1 \sim r$, à $3 \sim s$, & que le plus petit soit au quarré du plus grand comme $1 \sim c$, à $9 \sim d$. Ces deux Nombres se trouueront tels,

$\frac{drr, drs}{css}.$

Parceque nous auons supposé

$r \sim 1.$

$s \sim 3.$

$c \sim 1.$

$d \sim 9.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

1.

3.

On tire de cette solution indefinie, le Canon suiuant;

Si des quatre Nombres donnez r, s, c, d, on diuise le solide sous

Canon. le premier & le Plan des deux derniers, & le Solide sous le second & le Plan des deux derniers, par le Solide sous le troisieme & le quarré du second; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

C'est aussy de la même Maniere que l'on resoudra la Question suiuante;

> Trouuer deux nombres, tels que leur raison, & la raison de leur somme au quarré du plus grand, soient données.

Comme si on veut que le premier soit au second dans la raison du Nombre donné $1 \sim r$, au Nombre donné $3 \sim s$, & que leur somme soit au quarré du plus grand comme $1 \sim c$, à $9 \sim d$. ces deux Nombres se trouueront tels,

$$\frac{drs+drr,\ drs+dss}{css}.$$

Parceque Nous auons supposé

$r \sim 1.$

$s \sim 3.$

$c \sim 1.$

$d \sim 9.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.

12.

On tire de cette solution indefinie, le Canon suiuant;

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, c, d, on diuise le Solide sous la somme des deux premiers & le Plan du premier & du dernier, & le Solide sous la somme des deux premiers & le Plan du second & du quatrieme, par le Solide sous le troisieme & le quarré du second; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

C'est encore par le même Moyen que l'on pourra resoudre la Question suiuante;

> Trouuer deux nombres, tels que leur raison, & la raison de leur difference au quarré du plus grand, soient données.

Comme si on veut que le premier soit au second dans la raison du Nombre donné $1 \sim r$, au Nombre donné $3 \sim s$, & que leur difference soit au quarré du plus grand, comme $1 \sim c$, à $9 \sim d$. Ces deux Nombres se trouueront tels,

$$\frac{drs-drr,\ dss-drs}{css}.$$

Parceque Nous auons supposé

$r \sim 1.$

$s \sim 3.$

$c \sim 1.$

$d \sim 9.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

2.

6.

On tire de cette solution indefinie, le canon suivant;

Si des quatre Nombres donnez r, s, c, d, on divise le Solide sous la difference des deux premiers & le Plan du premier & du dernier, & le Solide sous la difference des deux premiers & le Plan du second & du quatrieme, par le Solide sous le troisieme & le quarré du second; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Question XLIII.

Deux Nombres étant donnez, en trouver un troisieme, tel que si on Multiplie la somme de deux quelconques par celuy qui restera, les trois produits soient en proportion arithmetique.

On donne les deux Nombres

$5 \sim a.$

$3 \sim b.$

& il est proposé d'en trouver un troisieme

$x.$

en sorte que si on multiplie la somme $a+b$ des deux premiers par le troisieme x, la somme $b+x$ des deux derniers par le premier a, & la somme $a+x$ des deux extrêmes par le second b, les trois produits

$ax+bx.$

$ab+ax.$

$ab+bx.$

soient en proportion arithmetique.

Si on divise le Plan sous les deux Nombres donnez par la Moitié de leur somme, on aura le troisieme Nombre qu'on cherche. Canon.

Pour donner aux trois Plans precedens la proportion arithmetique, on égalera la somme des deux derniers au double du premier, par cette Equation, $2ab+ax+bx \sim 2ax+2bx$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{2ab}{a+b}$. Ainsy le troisieme nombre qu'on cherche, sera tel,

$\frac{2ab}{a+b}.$

Parceque nous avons supposé

$a \sim 5.$

$b \sim 3.$

le troisieme Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur;

Ou bien on égalera la somme des deux extrêmes au double du Moyen, par cette Equation, $ab+ax+2bx \sim 2ab+2ax$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{ab}{2b-a}$. Ainsy le troisieme Nombre qu'on cherche, sera tel,

Seconde Solution.

$$\frac{ab}{2b-a}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 5.$$
$$b \sim 3.$$

le troisieme Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur;

$$15.$$

Determination.

Cette seconde seconde solution a besoin d'Vn determination à l'égard des deux Nombres donnez a, b, qui est que le premier a doit être Moindre que le double 2b du second b, à cause du denominateur 2b−a du troisieme Nombre trouué.

On tire de cette seconde solution, le Canon suiuant;

Canon.

Si on diuise le Plan des deux Nombres donnez par l'excez du double du second sur le premier, on aura le troisieme Nombre qu'on cherche.

Ou bien encore on égalera la somme des deux premiers au double du troisieme, par cette Equation, $ab+2ax+bx \sim 2ab+2bx$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{ab}{2a-b}$. Ainsy le troisieme Nombre qu'on cherche, sera tel,

Troisieme Solution.

$$\frac{ab}{2a-b}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 3.$$
$$b \sim 5.$$

le troisieme Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur;

$$2\frac{1}{7}.$$

Determination.

Cette troisieme solution demande aussy Vne determination à l'égard des deux Nombres donnez a, b, qui est que le second b, doit être Moindre que le double 2a du premier a, à cause du denominateur 2a−b, du troisieme Nombre trouué.

On tire de cette troisieme solution, ce troisieme canon.

Canon.

Si on diuise le Plan des Deux Nombres donnez par l'excez du double du premier sur le second, on aura le troisieme Nombre qu'on cherche.

Auparauant que de finir ce Liure, Nous ajouterons icy les Questions suiuantes.

1.

Deux nombres étant donnez, en trouver un troisieme, tel que si on multiplie la somme des deux quelconques par celuy qui restera, les trois produits soient en proportion geometrique.

On donne les deux Nombres

$$4 \backsim a.$$
$$28 \backsim b.$$

& il est proposé d'en trouver un troisieme

$$x.$$

en sorte que si on multiplie la somme $a+b$ des deux premiers par le troisieme x, la somme $b+x$ des deux derniers par le premier a, & la somme $a+x$ des deux extrêmes par le second b, les trois produits

$$ax+bx.$$
$$ab+ax.$$
$$ab+bx.$$

soient en proportion geometrique.

Si au produit sous le Plan des deux nombres donnez & la Racine quarée de l'excez de la somme du double du Plan des deux Nombres donnez & du quintuple du quarré du second sur le triple du quarré du premier, on ajoute le solide sous le second & le quarré du premier, & que de la somme on ôte le Solide sous le premier & le quarré du second; le reste étant divisé par le double de l'excez du Plan sous la somme des deux Nombres donnez & le second sur le quarré du premier, donnera le troisieme Nombre qu'on cherche. Canon.

Pour donner aux trois produits precedens la proportion geometrique, on égalera le quarré du Moyen au produit des deux extrêmes, par cette Equation, $aabx+abbx+abxx+bbxx \backsim aabb+2aabx+aaxx$, ou $xx-\frac{aabx+abbx}{bb+ab-aa} \backsim \frac{aabb}{bb+ab-aa}$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{aab-abb+ab\sqrt{5bb+2ab-3aa}}{2bb+2ab-2aa}$. Ainsy le troisieme Nombre qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{aab-abb+ab\sqrt{5bb+2ab-3aa}}{2bb+2ab-2aa}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \backsim 4.$$
$$b \backsim 28.$$

le troisieme Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$2\frac{6}{11}.$$

Determination.

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, b, est que le premier a doit être moindre que $\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{5bb}$, à cause du denominateur $2bb+2ab-2aa$, où l'on a cette inégalité $aa-ab \ominus bb$, dans laquelle on trouue $a \ominus \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{5bb}$.

Mais il y a vne autre determination à faire, quand on veut vne solution rationnelle, qui est que $5bb+2ab-3aa$ doit être vn nombre quarré, ce qui arriuera, si on l'égale à vn Nombre quarré. Pour cette fin, supposez $b \sim z+a$, & vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré $4aa+12az+5zz$, pour le côté duquel prenant $2a-\frac{cz}{d}$, on trouuera en entiers

$$z \sim 4cd+12dd.$$
$$a \sim cc-5dd$$
$$b \sim cc+4cd+7dd.$$

c'est pourquoy si l'on suppose

$$c \sim 3.$$
$$d \sim 1.$$

on trouuera

$$a \sim 4.$$
$$b \sim 28.$$

tels qu'ils ont été supposez dans la Question.

II.

Etant donnez deux Nombres, en trouuer vn troisieme, ensorte que si on multiplie la difference de deux quelconques par celuy qui restera, les trois produits soient en proportion arithmetique.

On donne les deux Nombres

$$5 \sim a.$$
$$3 \sim b.$$

& il est proposé d'en trouuer vn troisieme

$$x,$$

en sorte que si on multiplie la difference $a-b$ des deux premiers par le troisieme x, la difference $b-x$ des deux derniers par le premier a, & la difference $a-x$ des deux extrêmes par le second b, les trois produits

$$ax-bx.$$
$$ab-ax.$$
$$ab-bx.$$

soient en proportion arithmetique.

Si on diuise le Plan des deux Nombres donnez par l'excez

du triple du premier sur le double du second, on aura le troisieme Nombre qu'on cherche. Canon.

Pour donner aux trois produits precedens la proportion arithmetique, on égalera la somme des deux extrêmes au double du moyen, par cette Equation, $ax-2bx+ab \sim 2ab-2ax$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{ab}{3a-2b}$. Ainsy le troisieme Nombre qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{ab}{3a-2b}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 5.$$
$$b \sim 3.$$

le troisieme Nombre qu'on cherche sera de cette grandeur,

$$1.\tfrac{2}{3}.$$

La determination de cette Question ainsy resolue, à l'egard des deux Nombres donnez a, b, est que le triple du premier doit être plus grand que le double du second, c'est à dire que $3a$ doit être plus grand que $2b$, à cause du denominateur $3a-2b$. Determination.

Ou bien on égalera la somme des deux derniers au double du premier, par cette Equation, $2ab-ax-bx \sim 2ax-2bx$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{2ab}{3a-b}$. Ainsy le troisieme Nombre qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{2ab}{3a-b}.$$

Seconde Solution.

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 5.$$
$$b \sim 3.$$

le troisieme Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$2.\tfrac{1}{2}.$$

On tire de cette Solution indefinie, le Canon suiuant.

Si on diuise le Plan des deux Nombres donnez par la Moitié de l'excez du triple du premier sur le second, on aura le troisieme Nombre qu'on cherche. Canon.

III.

Etant donnez deux Nombres, en trouuer Vn troisieme, en sorte que si on multiplie la difference de deux quelconques par celuy qui restera, les trois produits soient en proportion geometrique.

On donne les deux Nombres

$$2 \sim a.$$
$$b \sim 1$$

& il est proposé d'en trouuer Vn troisieme

$$x.$$

en sorte que si on multiplie la difference $a-b$ des deux premiers par le troisieme x, la difference $b-x$ des deux derniers par le premier a, & la difference $a-x$ des deux extrêmes par le second b, les trois produits

$$ax-bx.$$
$$ab-ax.$$
$$ab-bx.$$

soient en proportion geometrique.

Canon. Si du triple Solide sous le second Nombre donné & le quarré du premier, on ôte le Solide sous le premier & le quarré du second, & encore le Solide sous les deux Nombres donnez & la Racine quarée du quintuple du quaré de leur difference, & qu'on diuise le reste par le double de l'excez du Plan sous la somme des deux Nombres donnez & le premier sur le quarré du second; on aura le troisieme Nombre qu'on cherche.

Pour donner aux trois produits precedens la proportion geometrique, on égalera le produit des deux extrêmes au quarré du Moyen, par cette Equation $aabx-abbx-abxx+bbxx \backsim aabb-2aabx+aaxx$, ou $xx-\frac{3aabx+abbx-aabb}{aa+ab-bb}$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{3aab-abb-ab\sqrt{5aa-10ab+5bb}}{2aa+2ab-2bb}$. Ainsy le troisieme Nombre qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{3aab-abb-ab\sqrt{5aa-10ab+5bb}}{2aa+2ab-2bb}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$

le troisieme Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$1-\sqrt{\tfrac{1}{5}}.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, b, est que le premier a doit être plus grand que $\frac{1}{2}\sqrt{5bb}-\frac{1}{2}b$, à cause du denominateur $2aa+2ab-2bb$, où l'on trouue cette inégalité $2aa+2ab \oplus 2bb$, ou $aa+ab \oplus bb$, dans laquelle on trouuera $a \oplus \frac{1}{2}\sqrt{5bb}-\frac{1}{2}b$.

Il est éuident que la solution ne peut pas être rationnelle, parcequ'il faudroit égaler au quarré cette Puissance $5aa-10ab+5bb$, laquelle ne peut pas essentiellement être quarée, parcequ'elle est produite par le quarré $aa-2ab+bb$, de la difference $a-b$, & par le Nombre 5, qui n'est pas quarré.

Liure II.

De l'Arithmetique de Diophante d'Alexandrie.

Question 1.

Trouuer deux Nombres, tels que la raison de leur somme à la somme de leurs quarrez soit donnée.

On propose de trouuer deux nombres

$x.$

$y.$

dont la somme $x+y$, soit à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $10 \sim s$.

Si on multiplie le Plan sous la somme de deux Nombres quelconques & le second terme de la raison donnée par chacun de ces mêmes Nombres, & qu'on diuise chaque Solide par le Solide sous le premier terme & la somme des quarrez des deux mêmes Nombres; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx+ly,\ xx+yy :: r,\ s.$$

de laquelle on tire cette Equation,

$$lsx+lsy \sim rxx+ryy.$$

dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{ls}{r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}$: & pour auoir une solution rationnelle, il faudra égaler au quarré cette Puissance, $\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx$, pour le côté duquel prenant $\frac{ls}{2r}-\frac{ax}{b}$, ou mieux $\frac{ax}{b}-\frac{ls}{2r}$, pour auoir $y \sim \frac{ax}{b}$, on trouuera $x \sim \frac{abs+bbs}{aar+bbr}$, & au lieu de $y \sim \frac{ax}{b}$, on aura $y \sim \frac{abs+aas}{aar+bbr}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abs+bbs,\ abs+aas}{aar+bbr}.$$

Parceque Nous auons supposé

$r \sim 1.$

$s \sim 10.$

Si l'on suppose

$a \sim 1.$

$b \sim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

12.

6.

& si l'on suppose

$a \sim 2.$

$b \sim 3.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$11\frac{7}{13}$.

$7\frac{2}{13}$.

Mais si l'on suppose

$a \backsim 3$.

$b \backsim 1$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

12.

Si au lieu de prendre $\frac{ax}{b} - \frac{ls}{2r}$ pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance $\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx$, on prend $\frac{ls}{2r} - \frac{ax}{b}$, pour avoir $y \backsim \frac{ls}{r} - \frac{ax}{b}$, on trouvera $x \backsim \frac{bbs + abs}{aar + bbr}$, & au lieu de $y \backsim \frac{ls}{r} - \frac{ax}{b}$, on aura $y \backsim \frac{bbs - abs}{aar + bbr}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{bbs + abs,\ bbs - abs}{aar + bbr}.$$

Parceque Nous avons supposé

$r \backsim 1$.

$s \backsim 10$.

Si l'on suppose

$a \backsim 3$.

$b \backsim 4$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$11\frac{1}{5}$.

$1\frac{3}{5}$.

& si l'on suppose

$a \backsim 1$.

$b \backsim 3$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

12.

6.

Mais si l'on suppose

$a \backsim 1$.

$b \backsim 2$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

12.

4.

Canon.

On tire de cette seconde solution indefinie, le Canon suivant;

Si on ajoute & qu'on ôte le Solide sous le second terme de la raison donnée & deux Nombres quelconques, du Solide sous le second terme & le quarré du plus grand des deux mêmes Nombres, & qu'on divise la somme & le reste chacun par le Solide sous le

premier terme & la somme des quarrez des deux mêmes Nombres; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

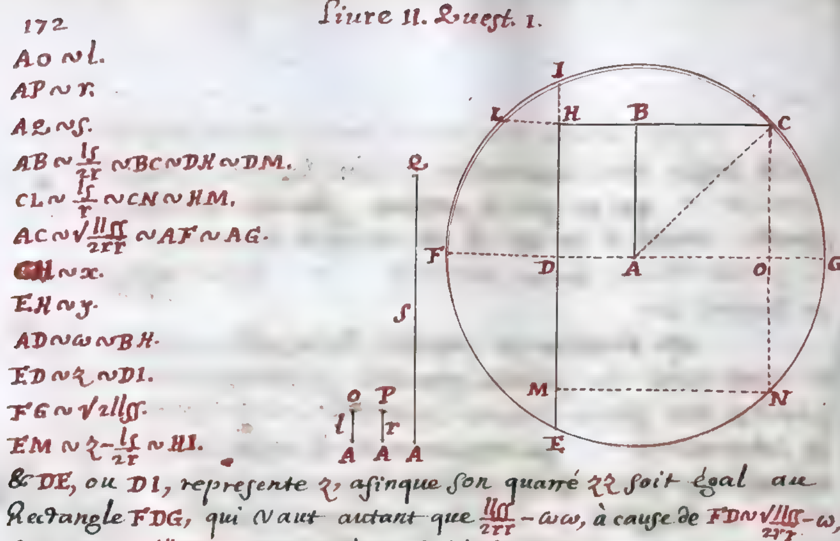
Cette seconde Solution n'est pas si generale que la premiere, puisqu'elle soufre une determination à l'égard des deux quantitez indeterminées a, b, qui est que la premiere a doit être moindre que la seconde b, comme il est aisé de voir dans le Numerateur $bbs - abs$, du second Nombre trouué, où l'on a $abs \ominus bbs$, & par consequent $a \ominus b$, en diuisant par bs. Determination.

Comme cette Question est proposée Vniuersellement, aussy Nous en auons donné Vne Solution generale, qui Nous fait connoitre qu'on luy peut ajouter d'autres conditions, à cause des deux quantitez indeterminées a, b, qui expriment icy la raison des deux Nombres trouuez. C'est pourquoy la condition la plus commode qu'on peut ajouter à cette Question, est de faire que les deux Nombres qu'on cherche soient dans Vne raison donnée, comme fait Diophante, qui leur donne icy la raison double, & alors on Verra que cette Question est toutafait la même que la XXIVe du Liure precedent, dont la solution est facile, comme Vous auez Vû.

Puisque donc cette Question est indeterminée, parcequ'on en peut donner Vne infinité de Solutions differentes, elle doit être Vn Lieu, comme Vous dans l'Equation constitutiue $lsx + lsy \backsim rxx + ryy$, ou $xx - \frac{lsx}{r} \backsim \frac{lsy}{r} - yy$, qui est Vn Lieu au Cercle; & pour en connoitre le rayon, supposez $x \backsim \omega + \frac{ls}{2r}$, ou $x - \frac{ls}{2r} \backsim \omega$, pour auoir cette autre Equation $\omega\omega - \frac{llss}{4rr} \backsim \frac{lsy}{r} - yy$, ou $yy - \frac{lsy}{r} \backsim \frac{llss}{4rr} - \omega\omega$. Supposez encore $y \backsim z + \frac{ls}{2r}$, ou $y - \frac{ls}{2r} \backsim z$, pour auoir cette derniere Equation $zz - \frac{llss}{4rr} \backsim \frac{llss}{4rr} - \omega\omega$, ou $zz \backsim \frac{llss}{2rr} - \omega\omega$, qui apartient à Vn cercle, dont le rayon est $\sqrt{\frac{llss}{2rr}}$.

Mais pour décrire ce Cercle, faites le triangle rectangle ABC, dont chaque côté AB, BC, soit $\frac{ls}{2r}$; ou quatrieme proportionnel aux trois lignes $2r, l, s$, c'est à dire aux trois lignes 2AP, AO, AQ, & decriuez du centre A, par le point C, Vne circonference de cercle, qui sera le Lieu qu'on cherche: & pour y determiner en lignes les deux Nombres qu'on cherche, tirez le diametre FG, parallele à la ligne BC, & prenez sur ce diametre FG, Vn point quelconque D, par où Vous tirerez au diametre FG, la perpendiculaire EH, qui se trouuera terminée en E, par la circonference du cercle, & en H, par la ligne BC: & les lignes EH, CH, representeront les deux Nombres qu'on cherche; de sorte que CH representera x, & EH representera y, à cause de $x \backsim \frac{ls}{2r} + \omega$, & de $y \backsim \frac{ls}{2r} + z$. Car BH, ou AD, represente ω, Construction geometrique.

$AO \sim l.$
$AP \sim r.$
$AQ \sim s.$
$AB \sim \frac{ls}{2r} \sim BC \sim DH \sim DM.$
$CL \sim \frac{ls}{r} \sim CN \sim HM.$
$AC \sim \sqrt{\frac{llss}{2rr}} \sim AF \sim AG.$
$CH \sim x.$
$EH \sim y.$
$AD \sim \omega \sim BH.$
$ED \sim z \sim DI.$
$FG \sim \sqrt{2llss}.$
$EM \sim z - \frac{ls}{2r} \sim HI.$



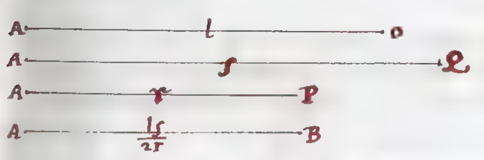
& DE, ou DI, represente z, afinque son quarré zz soit égal au Rectangle FDG, qui vaut autant que $\frac{llss}{2rr} - \omega\omega$, à cause de $FD \sim \sqrt{\frac{llss}{2rr}} - \omega$, & de $DG \sim \sqrt{\frac{llss}{2rr}} + \omega$, comme il est aisé à demontrer.

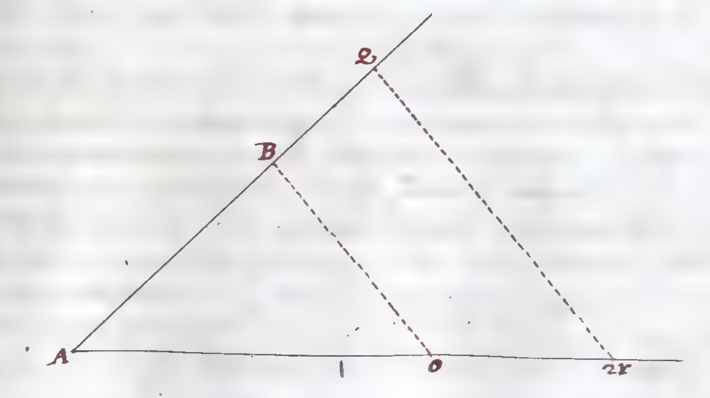
Demonstration. Pour demontrer que les deux nombres representez par les lignes EH, CH, satisfont à la Question, c'est à dire que leur somme $EH + CH$, multipliée par l'Vnité AO, sauoir $AOEH + AOCH$, est à la somme $EHq + CHq$ de leurs quarez, comme AP, est à AQ, prolongez les lignes EH, CH, jusqu'à la circonference du cercle en I, & en L, & tirez par le point C, à la ligne EH, la parallele CN, qui sera terminée par la circonference du cercle en N, par où vous tirerez la droite MN, parallele au diametre FG.

Cette preparation étant faite, on considerera premierement que la ligne HI, est égale à $EH - CL$. Car si des deux lignes égales DE, DI, on ôte les deux égales OC, ON, ou DH, DM, il restera $HI \sim EM$, & à cause de $EM \sim EH - HM$, on aura $HI \sim EH - HM$, & à cause de $HM \sim 2DH$, on aura $HI \sim EH - 2DH$, & encore à cause de $DH \sim AB$, & de $AB \sim BC$, on aura $HI \sim EH - 2BC$, & enfin à cause de $2BC \sim CL$, on aura $HI \sim EH - CL$. Ce qu'il faloit demontrer.

On considerera en second lieu, que le double du Rectangle ABAP, est égal au Rectangle AOAQ. Car puisque les quatre lignes 2AP, AO, AQ, AB, sont proportionnelles par la construction, le Rectangle 2ABAP, sera égal au Rectangle AOAQ. Ce qu'il faloit demontrer.

Cela étant supposé, puisque l'on a $HI \sim EH - CL$, on pourra faire cette analogie, $LH, HI :: LH, EH - CL$, & si à la place des deux premiers termes LH, HI, on met les deux EH, CH, qui sont en même raison, par la nature du cercle, on aura cette autre analogie, $EH, CH :: LH, EH - CL$, & par consequent cette égalité, $EHq - CLEH \sim$


A
l
o
A
s
Q
A
r
P
A
ls
2r
B


Q
B
A
l
o
2r

E E E E E E E E E E

G D D D D D A D D D D D F

C H H H H H B H H H H H L

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

A l o

A f Q

A r P

A $\frac{lf}{2r}$ B Q

B

A P o Q 2r

CHLH, ou EHq − CLEH ~ CLCH − CHq, à cause de LH ~ CL − CH, & par l'antitheze on aura celle-cy, CLEH + CLCH ~ EHq + CHq, ou 2ABEH + 2ABCH ~ EHq + CHq, à cause de CL ~ 2AB, & si on donne à chaque Plan la hauteur commune AP, on aura 2ABAPEH + 2ABAPCH ~ APEHq + APCHq, & si à la place du Plan 2ABAP, on met le Plan AOAQ, qui luy a été demontré égal, on aura cette derniere Equation, AOAQEH + AOAQCH ~ APEHq + APCHq, & par consequent cette analogie, AOEH + AOCH, EHq + CHq :: AP, AQ. Ce qu'il faloit demontrer.

Nous auons icy, comme dans beaucoup d'autres Questions du Liure precedent, emprunté l'Vnité l, pour obseruer la loy des Homogenes; mais on se peut passer d'emprunter l'Vnité l, & resoudre la Question plus élegamment, sans qu'il soit besoin d'égaler au quarré aucune Puissance, pour auoir vne Solution rationnelle: sauoir en faisant pour les deux Nombres qu'on cherche, vne position qui soit plus conforme à la Nature de la Question. Car quand on a mis les deux lettres x, y, pour les deux Nombres qu'on demande, comme ces deux lettres x, y, peuuent representer aussy-bien des lignes que des Nombres, & que cette Question ne se peut point apliquer aux lignes sans emprunter l'Vnité, la position sera plus naturelle, & toutafait conforme à la Nature du Probleme, en mettant deux fractions, comme par exemple

$$\frac{a,\ b}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, car ainsy ils ne peuuent pas representer des lignes, & alors on aura selon la condition de la Question, cette analogie,

$$az + bz,\ aa + bb :: r,\ s,$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$asz + bsz \sim aar + bbr.$$

dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{aar + bbr}{as + bs}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

On void aisément que par cette maniere on ajoute vne condition à la Question, qui est qu'on leur donne vne raison à volonté, laquelle est icy exprimée par la raison des deux lettres a, b, ausquelles on peut attribuer telle valeur que l'on voudra.

Question II.

Trouuer deux Nombres, tels que la raison de leur difference à la difference de leurs quarrez soit donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$, soit à la difference $xx-yy$, de leurs quarrez comme $1 \sim r$, à $6 \sim s$.

Canon. Ayant pris Vn nombre tel que l'on voudra pour le premier des deux que l'on cherche, ôtez-le du quotient qui viendra en diuisant le second terme de la raison donnée par le second, pour auoir l'autre Nombre qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx-ly,\ xx-yy :: r,\ s;$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$lsx-lsy \sim rxx-ryy.$$

dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{ls}{r}-x$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

x.

$\frac{ls}{r}-x$.

Parceque Nous auons supposé

$r \sim 1$.

$s \sim 6$.

Si l'on suppose

$x \sim 2$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

2.

4.

& si on suppose

$x \sim 1$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

1.

5.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez r, s, est que le premier Nombre x doit être moindre que $\frac{ls}{r}$, à cause du second $\frac{ls}{r}-x$.

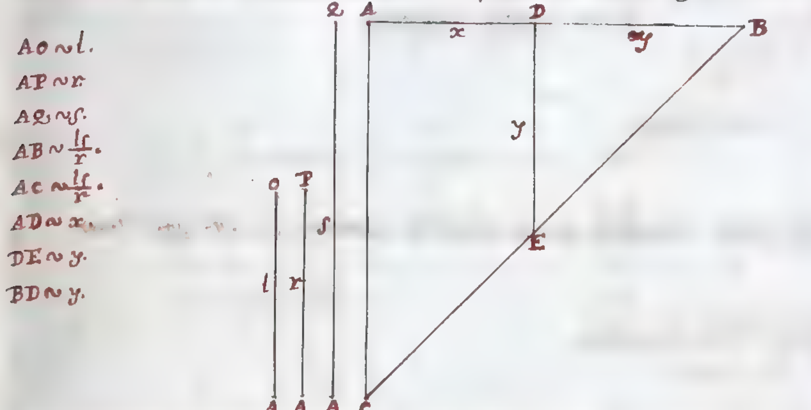
Parcequ'il reste icy la lettre indeterminée x, cela Nous fait premierement connoitre qu'on peut ajouter Vne autre condition à la Question. Diophante leur donne icy la raison double, & alors cette

Question

Question devient entierement la même que la XXXVII. de Liure precedent.

Cela nous fait aussy connoitre que cette Question est un Lieu, & que ce Lieu est une ligne droite; comme l'on connoit en divisant par $x-y$, l'Equation constitutive $lsx - lsy \sim rxx - ryy$, car il vient cette autre Equation $ls \sim rx + ry$, qui est un lieu à la Ligne droite, dont la construction est telle.

Ayant fait à volonté l'angle BAC, par les deux lignes AB, AC, *Construction Geometrique*



dont chacune soit égale à $\frac{ls}{r}$, ou quatrieme proportionnelle aux trois AP, AQ, AO, menez la droite BC, qui sera le Lieu qu'on cherche, de sorte qui si on prend entre B, & C, un point à discretion, comme D, par lequel on tire la droite DE, parallele à la ligne AC, & terminée en E, par la ligne Locale BC, les deux lignes AD, DE, representeront les deux nombres qu'on cherche: de sorte que leur difference AD -- DE, multipliée par l'Unité AO, savoir AOAD -- AODE, sera à la difference ADq -- DEq; de leurs quarez, comme AP, à AQ.

Car puisque nous avons DB ∾ DE, à cause de AB ∾ AC, par la construction, nous aurons AB ∾ AD + DE, à cause de AB ∾ AD + DB, & l'on pourra faire cette analogie, AO, AD+DE :: AO, AB, & si à la place des deux derniers termes AO, AB, on met les deux AP, AQ, qui sont en même raison, par la construction, on aura celle-cy, AO, AD + DE :: AP, AQ, & si on donne aux deux premiers termes AO, AD + DE, la hauteur commune AD - DE, on aura cette derniere analogie, AOAD - AODE :: ADq - DEq, AP, AQ. Ce qu'il faloit demontrer. *Demonstration.*

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'Unité, mettez

$\frac{x,b}{z}$.

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon la condition de la Question, Vous aurez en entiers, cette analogie,

$$az-bz, aa-bb :: r, s,$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$asz-bsz \sim aar-bbr.$$

dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{aar-bbr}{as-bs}$: & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{as, bs}{ar+br}.$$

Parceque Nous auons supposé

$r \sim 1.$

$s \sim 6.$

si l'on suppose

$a \sim 1.$

$b \sim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

2.

4.

& si l'on suppose

$a \sim 5.$

$b \sim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

1.

On tire de cette seconde Solution, ce Canon plus general.

Canon. Si on Multiplie deux Nombres quelconques, chacun par le second terme de la raison donnée, & qu'on diuise chaque Plan par le Plan sous le premier terme & la somme de ces deux mêmes Nombres; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

La position sera plus Naturelle, en mettant

$$\frac{a+b, a-b}{2}$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, afinqu'ils soient inégaux, & selon la condition de la Question, Vous aurez en entiers, cette analogie,

$$2bz, 4ab :: r, s,$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$2bsz \sim 4abr.$$

dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{2ar}{s}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{as+bs, as-bs}{2ar}.$$

Parceque Nous auons supposé

$r \backsim 1.$

$s \backsim 6.$

Si l'on suppose

$a \backsim 3.$

$b \backsim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

1.

& si l'on suppose

$a \backsim 2.$

$b \backsim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$4\frac{1}{2}.$

$1\frac{1}{2}.$

On tire de cette troisieme solution, le Canon suiuant.

Si on multiplie la somme & la difference de deux Nombres quelconques, chacune par le second terme de la raison donnée, & qu'on diuise chaque Plan par le double du Plan sous le premier terme & le plus grand des deux mêmes Nombres; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon

Ou bien en mettant

$$\frac{a,\ a+b}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$bz,\ 2ab+bb :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$bsz \backsim 2abr+bbr.$$

dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{2ar+br}{s}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{as,\ as+bs}{2ar+br}.$$

Parceque Nous auons supposé

$r \backsim 1.$

$s \backsim 6.$

Si l'on suppose

$a \backsim 1.$

$b \backsim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$1\frac{1}{2}.$

$4\frac{1}{2}.$

& si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$2\tfrac{4}{7}.$$
$$4\tfrac{2}{7}.$$

On tire de cette quatrieme solution, le canon suiuant.

Canon. Si on multiplie le premier de deux nombres quelconques & leur somme, chacun par le second terme de la raison donnée, & qu'on diuise chaque Plan par le Plan sous le premier terme & la somme du second des deux mêmes nombres & du double du premier; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Question II.

Trouuer deux nombres, tels que la raison de leur somme ou de leur difference à leur produit, soit égale à la raison de deux nombres donnez.

Premierement si l'on demand deux nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la somme $x+y$, soit à leur produit xy, comme $1 \sim r$, à $6 \sim s$.

Canon. Ayant pris tel nombre qu'on voudra pour le premier des deux que l'on cherche, multipliez-le par le second terme de la raison donnée, & diuisez le produit par l'excez du Plan sous le premier terme & ce premier nombre sur le second terme, pour auoir l'autre nombre.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$1x+1y,\ xy :: r,\ s$$

& par consequent cette Equation,

$$1sx+1sy \sim rxy.$$

dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1sx}{rx-1s}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$
$$\frac{sx}{rx-1s}.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 6.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$9.$$
$$18.$$

en supposant $x \sim 9$, & en supposant $x \sim 7$, les deux Nombres seront tels,

7.

42.

Determination. La determination de cette Question suivant ce premier cas, est que le premier Nombre x doit être plus grand que $\frac{s}{r}$, à cause du second $\frac{lsx}{rx-ls}$.

On void aisément que puisqu'il reste icy la lettre indeterminée x, la Question est un Lieu selon ce premier cas. Diophante la determine, en donnant la raison double aux deux Nombres qu'on cherche.

La Nature de ce Lieu se connoitra dans l'Equation constitutive $lsx+lsy \sim rxy$, ou $\frac{lsx}{r} \sim xy - \frac{lsy}{r}$, qui est un Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes, comme l'on connoitra en supposant $x-\frac{ls}{r} \sim z$, pour avoir cette autre Equation, $\frac{lsz}{r}+\frac{llss}{rr} \sim yz$, ou $\frac{llss}{rr} \sim yz-\frac{lsz}{r}$, dans laquelle on supposera encore $y-\frac{ls}{r} \sim \omega$, ou $y \sim \omega+\frac{ls}{r}$, pour avoir cette derniere Equation, $\frac{llss}{rr} \sim z\omega$, qui apartient à une Hyperbole entre ses asymptotes, où le Rectangle commun est $\frac{llss}{rr}$. Cette Hyperbole a deja été decrite dans la Quest. XIV. du Livre precedent, laquelle est la même que celle-cy à l'égard de ce premier cas.

Secondement si l'on demande deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à leur produit xy, comme $1 \sim r$, à $6 \sim s$.

Canon. Ayant pris un Nombre tel que l'on voudra pour le premier des deux que l'on cherche, multipliez-le par le second terme de la raison donnée, & divisez le produit par le second terme augmenté du Plan sous le premier & ce premier Nombre, pour avoir l'autre Nombre.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx-ly, \; xy :: r, s,$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$lsx-lsy \sim rxy.$$

dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{lsx}{rx+ls}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

x.

$\frac{lsx}{rx+ls}$.

Parceque Nous avons supposé

$r \sim 1$.

$s \sim 6$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

6.

3.

en supposant $x \backsim 6$, & en supposant $x \backsim 3$, les deux Nombres seront tels,

3.

2.

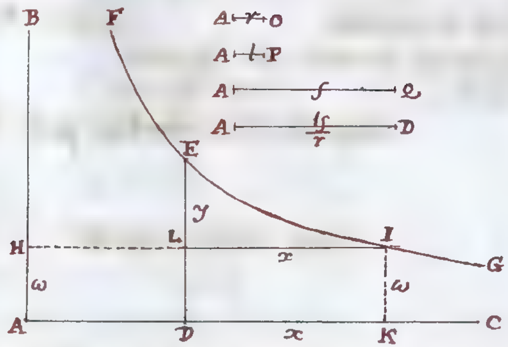
On Void aussy que ce second cas est Vn Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes: car dans l'Equation constitutiue $lsx - lsy \backsim rxy$, ou $\frac{lsx}{r} \backsim xy + \frac{lsy}{r}$, si l'on suppose $x + \frac{ls}{r} \backsim z$, on aura cette autre Equation, $\frac{lsz}{r} - \frac{llss}{rr} \backsim yz$, ou $\frac{lsz}{r} - yz \backsim \frac{llss}{rr}$, dans laquelle supposant $\frac{ls}{r} - y \backsim \omega$, on aura cette derniere Equation, $z\omega \backsim \frac{llss}{rr}$, qui apartient à Vne Hyperbole entre ses asymptotes, où le Rectangle commun est $\frac{llss}{rr}$.

Construction geometrique. Pour decrire cette Hyperbole, faites vn angle quelconque BAC, par les lignes AB, AC, qui seront les asymptotes de l'Hyperbole qu'on veut decrire. Prenez sur l'vne de ces asymptotes, comme sur AC, la ligne AD, égale à $\frac{ls}{r}$, ou quatrieme proportionnelle aux trois lignes données r, s, l, c'est à dire aux trois lignes AO, AQ, AP, & tirez par le point D, la droite DE, parallele à l'autre asymptote AB, & égale à la ligne AD.

Aprez cela decriuez par le point E, entre les asymptotes AB, AC, l'Hyperbole FEG, qui sera le Lieu qu'on cherche: de sorte que si on prend sur l'asymptote AC, depuis D, vers C, Vn point à Volonté, comme K, & que par ce point K, on tire la droite KI, parallele à l'autre asymptote AB, & terminée en I, par l'Hyperbole FEG, & par le point I, la droite HI, parallele à l'asymptote AC, les deux lignes LI, LE, representeront les deux nombres qu'on cherche, c'est à dire que leur difference LI-LE, multipliée par l'vnité AP, sauoir APLI-APLE, sera à leur Plan ELI, comme AO, à AQ.

Demonstration. Car puisque par la Nature de l'Hyperbole, on a cette analogie, AK, AD :: DE, KI, ou AK, AD :: AD, KI, en diuisant on aura celle-cy, DK, AD :: AD-KI, KI, ou LI, AD :: LE, KI, & en permutant on aura celle-cy, LI, LE :: AD, KI, & en diuisant on aura celle-cy, LI, LI-LE :: AD, AD-KI, ou LI, LI-LE :: AD, LE, & par consequent cette égalité, ELI ∾ ADLI - ADLE, c'est pourquoy on pourra faire cette analogie, ADLI-ADLE, ADq :: ELI, ADq, & en retranchant des deux premiers termes la hauteur commune AD, on aura celle-cy, LI-LE, AD :: ELI, ADq, & en donnant aux deux premiers termes la hauteur commune AP, on aura celle-cy, APLI-APLE, APAD :: ELI, ADq, & en permutant on aura celle-cy, APLI-APLE, ELI :: APAD, ADq, & en retranchant des deux derniers termes la hauteur commune AD, on aura celle-cy, APLI-APLE, ELI :: AP, AD,

AO $\backsim$ r.
AP $\backsim$ l.
AQ $\backsim$ s.
AD $\backsim \frac{ls}{r} \backsim$ DE.
LI $\backsim$ x $\backsim$ DK.
LE $\backsim$ y.
AK $\backsim$ z $\backsim$ HI.
KI $\backsim$ ω $\backsim$ DL.



& si on change les deux derniers termes AP, AD, en ces deux AO, AQ, qui sont en même raison, par la construction, on aura cette derniere analogie, APLI - APLE, ELI :: AO, AQ. Ce qu'il faloit demontrer.

Nous resoudrons cette Question conjointement dans ses deux cas, pour la rendre determinée, comme vous alez voir dans la Question suivante, à laquelle nous en ajouterons deux autres, qui sont de Bachet.

I.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur somme à leur produit, & la raison de leur difference à leur même produit, soient données.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$, soit à leur produit xy, comme $r \backsim 1$, à $s \backsim 2$, & dont la difference $x-y$, soit à leur même produit xy, comme $1 \backsim a$, à $3 \backsim b$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ajoute & on ôte le Plan sous les deux Moyens du Plan sous les deux extrêmes, & que par la somme & par le reste on divise le double du Plan sous le second & le quatrieme; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx+ly,\ xy :: r,\ s.$$
$$lx-ly,\ xy :: a,\ b.$$

& par consequent ces deux Equations,

$$lsx+lsy \backsim rxy.$$
$$lbx-lby \backsim axy.$$

Dans la premiere $lsx+lsy \backsim rxy$, on trouvera $y \backsim \frac{lbx}{ax+lb}$, &

dans la seconde $lbx - lby \sim axy$, on trouuera le même $y \sim \frac{lbx}{ax+lb}$; c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{lsx}{rx-ls} \sim \frac{lbx}{ax+lb}$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{2lbs}{br-as}$, & au lieu de $y \sim \frac{lsx}{rx-ls}$, ou de $y \sim \frac{lbx}{ax+lb}$, on aura $y \sim \frac{2lbx}{as+br}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2bs}{br-as}.$$
$$\frac{2bs}{br+as}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$
$$a \sim 1.$$
$$b \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$2\tfrac{2}{5}.$$
$$12.$$

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'vnité, mettez

$$\frac{x+y,\ x-y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question vous aurez en entiers, ces deux analogies,

$$2xz,\ xx-yy :: r,\ s.$$
$$2yz,\ xx-yy :: a,\ b.$$

& par consequent ces deux Equations,

$$2sxz \sim rxx - ryy.$$
$$2byz \sim axx - ayy.$$

Dans la premiere $2sxz \sim rxx - ryy$, on trouuera $z \sim \frac{rxx-ryy}{2sx}$, & dans la seconde $2byz \sim axx - ayy$, on trouuera le même $z \sim \frac{axx-ayy}{2by}$. c'est pourquoy on aura cette Equation $\frac{rxx-ryy}{2sx} \sim \frac{axx-ayy}{2by}$, dans laquelle on trouuera

$$x \sim br.$$
$$y \sim as.$$

& au lieu de $z \sim \frac{rxx-ryy}{2sx}$, ou de $z \sim \frac{axx-ayy}{2by}$, on aura $z \sim \frac{bbrr-aass}{2bs}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux raisons données $\frac{r}{s}, \frac{a}{b}$, est qu'elles ne doiuent pas être égales entre elles, à cause du denominateur $br-as$, du premier Nombre trouué, où l'on a $br \oplus as$, & par consequent $\frac{br}{s} \oplus a$, ou $\frac{r}{s} \oplus \frac{a}{b}$. Ainsy on void que pour vne parfaite determination, la premiere raison donnée $\frac{r}{s}$ doit être plus grande que la deuxieme $\frac{a}{b}$, ce qui est deja assez euident par la Nature de la Question.

II.

II.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur produit à la somme de leurs quarrez soit donnée.

On propose de trouver deux nombres

$x.$

$y.$

dont le produit xy soit à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme 2 ∾ a, à 5 ∾ b.

Le double du premier terme de la raison donnée est le premier des deux Nombres qu'on cherche: & si du second terme on ajoute ou qu'on ôte la Racine quarée de l'excez du quarré du second sur le double du quarré du premier, on aura en la moitié de la somme ou du reste le second Nombre. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$xy, xx+yy :: a, b.$

& par consequent cette Equation constitutive,

$bxy \sim axx+ayy.$

dans laquelle on trouvera en entiers,

$x \sim 2a.$

$y \sim b \mp \sqrt{bb-4aa}.$

pour les deux nombres qu'on cherche.

Parceque Nous avons supposé

$a \sim 2.$

$b \sim 5.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront en Moindres temes de cette grandeur,

1.

2.

La Determination de cette Question à l'égard des deux Nombres donnez a, b, est que le second b, doit être plus grand que le double 2a du premier, à cause du terme irrationnel $\sqrt{bb-4aa}$, où l'on a $bb \oplus 4aa$, & par consequent $b \oplus 2a$. Determination.

Cette Question est la même que celle-cy;

Trouver Un Parallelograme rectangle, dont l'aire soit au quarré de la diagonale en raison donnée.

Car les côtez de ce Rectangle representeront les deux Nombres qu'on cherche: Mais ces côtez se peuvent trouver geometriquement en cette sorte, lorsque les deux termes de la raison donnée seront des lignes, comme AB, AC.

Pour donc trouver Un Rectangle, dont l'aire soit au quarré

construction geometrique.

de sa diagonale, comme la ligne donnée AB, à la ligne donnée AC, faites de ces deux lignes données AB, AC, l'angle droit CAB, & ayant decrit alentour de AC, le demicercle ADEC, élevez du point B, sur AB, la perpendiculaire BDE, & des poins E, D, sur AC, les perpendiculaires EF, DG, & le Rectangle ABDG, sera celuy qu'on cherche: de sorte que ce Rectangle ABDG, sera au quarré de sa diagonale AD, comme AB, à AC.

Demonstration.

Car à cause de AG ∾ CF, on aura AF ∾ AC−AG, ou BE ∾ AC−BD, & si on donne a chaque ligne la hauteur commune BD, on aura BEBD ∾ ACBD−BDq, & à cause de BEBD ∾ ABq, par 36.3. on aura ABq ∾ ACBD−BDq, & en ajoutant BDq, on aura ABq+BDq, ou ADq ∾ ACBD, & en donnant à chaque Plan la hauteur commune AB, on aura ABADq ∾ ABACBD, & par 34.11. on aura cette analogie, ABBD, ADq :: AB, AC. Ce qu'il faloit demontrer.

Le Rectangle ABEF, satisfait aussy à la Question, c'est à dire que ce Rectangle ABEF, est au quarré de sa diagonale AE, comme AB, à AC. Car à cause de AG ∾ CF, on aura AG ∾ AC−AF, ou BD ∾ AC−BE: c'est pourquoy si à chaque ligne on donne la hauteur commune BE, on aura BEBD, ou ABq ∾ ACBE−BEq, & ajoutant BEq, on aura ABq+BEq, ou AEq ∾ ACBE, & si on donne à chaque Plan la hauteur commune AB, on aura ABAEq ∾ ABACBE, & par 34.11. on aura cette analogie, ABBE, AEq :: AB, AC. Ce qu'il faloit demontrer.

Ainsy vous voyez que les deux nombres qu'on cherche, sont representez par les deux lignes AB, BD, & aussy par les deux AB, BE; d'où il suit que les deux Rectangles ABDG, ABEF, sont semblables, aussy-bien que les deux triangles ABD, ABE, & que par consequent l'angle BAD, est égal à l'angle AEB, ce qui est évident par 32.3.

III.

Trouuer deux nombres, tels que la raison de leur produit à la difference de leurs quarrez, soit donnée.

On propose de trouuer deux nombres

x.

y.

dont le produit xy soit à la difference xx−yy de leurs quarrez, comme 3 ∾ a, à 8 ∾ b.

Le double du premier terme de la raison donnée est le premier des deux Nombres qu'on cherche, dont le quarré étant ajouté au quarré du second terme, & la Racine quarrée de la somme étant diminuée du même second terme, on aura l'autre Nombre. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$xy, xx-yy :: a, b.$$

& par consequent cette Equation constitutive.

$$bxy \sim axx-ayy.$$

dans laquelle on trouvera en entiers

$$x \sim 2a.$$

$$y \sim \sqrt{bb+4aa}-b.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche.

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 3.$$

$$b \sim 8.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront en Moindres termes de cette grandeur,

3.

1.

Cette Question est tout à fait la même que celle-cy;

Trouver Un Parallelograme rectangle, dont l'aire soit à la difference des quarrez de ses deux côtez en raison donnée.

Car les côtez de ce Rectangle representeront les deux Nombres qu'on cherche. Nous pourrions trouver ces deux côtez par le moyen d'Un cercle, comme dans la Question precedente, qui est de même nature que celle-cy: Mais comme la Question est Un Lieu à la Ligne droite, la construction sera plus élegante, si Nous decrivons ce Lieu à la ligne droite, que Nous trouverons premierement en cette sorte.

Dans l'Equation constitutive $bxy \sim axx-ayy$, ou $yy+\frac{bxy}{a} \sim xx$, supposez $y \sim z-\frac{bx}{2a}$, pour avoir cette autre Equation, $zz \sim \frac{bbxx+4aaxx}{4aa}$, dans laquelle mettant cc, à la place de $bb+4aa$, on aura $zz \sim \frac{ccxx}{2a}$, & par consequent $z \sim \frac{cx}{2a}$, & à cause de $y \sim z-\frac{bx}{2a}$, on aura $y \sim \frac{cx-bx}{2a}$, qui est Un Lieu à la Ligne droite, dont la construction sera telle.

Ayant fait des deux lignes données AB, AC, l'angle droit BAC, & ayant fait la ligne ABD, double de la ligne AB, menez la droite CD, Aprez cela élevez du point E, pris à discretion sur la ligne AD, Construction geometrique.

$AB \backsim a$.
$AC \backsim b$.
$AD \backsim 2a$.
$FI \backsim x$.
$FG \backsim y$.
$EG \backsim z$.

la droite EFG, perpendiculaire à la ligne AD, & égale à la ligne DF, & faites des deux lignes DE, FG, le Rectangle FGHI, qui sera celuy qu'on cherche: de sorte que son aire FIH sera à la difference $FIq - HIq$, comme AB, à AC.

Demonstration. Car puisque par la construction, nous avons $DF \backsim DH$, & par consequent $DFq \backsim DHq$, nous aurons $FIq + DIq \backsim DIq + HIq + 2DIH$, par 47.1. & par 4.2. & en ôtant $DIq + HIq$, nous aurons $FIq - HIq \backsim 2DIH$, & l'on pourra faire cette analogie, $2FIH, FIq - HIq :: 2FIH, 2DHI$, & en retranchant des deux derniers termes la hauteur commune 2HI, on aura cette autre analogie, $2FIH, FIq - HIq :: FI, DI$, & si à la place des deux derniers termes FI, DI, on met les deux AD, AC, qui sont en même raison, à cause des deux triangles semblables FID, CAD, on aura celle-cy, $2FIH, FIq - HIq :: AD, AC$, & en prenant les Moitiez des antecedens, on aura celle-cy, $FIH, FIq - HIq :: AB, AC$. Ce qu'il faloit demontrer.

A l'ocasion de ces deux Questions de Bachet, nous ajouterons encore icy la suivante.

IV.

Trouuer deux Nombres, tels que la difference de leurs quarrez soit à la somme des mêmes quarrez en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

en sorte que la difference $xx - yy$ de leurs quarrez, soit à la somme $xx + yy$ des mêmes quarrez comme $4 \backsim a$, à $5 \backsim b$.

Canon. Les Racines quarées de la somme & de la difference des deux termes de la raison donnée, sont les deux Nombres qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$xx - yy, xx + yy :: a, b.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$bxx - byy \backsim axx + ayy.$$

dans laquelle on trouuera

$$x \backsim \sqrt{a+b}.$$

$$y \backsim \sqrt{b-a}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche.

Parceque Nous auons supposé

$a \backsim 4.$

$b \backsim 5.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

3.

1.

Si vous voulez que l'Vn des deux Nombres qu'on cherche, soit rationnel, multipliez chacun des deux Nombres trouuez par l'Vn de ces deux mêmes Nombres, comme par le premier $\sqrt{a+b}$, & alors les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$a+b.$

$\sqrt{bb-aa}.$

Parceque Nous auons supposé

$a \backsim 4.$

$b \backsim 5.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

9.

3.

On tire de cette seconde solution, le canon suiuant.

La somme des deux termes de la raison donnée, & la Racine quarrée de la difference de leurs quarrez, sont les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Si on multiplie chacun des deux premiers Nombres trouuez par le second $\sqrt{b-a}$, on aura ces deux autres Nombres,

$b-a.$

$\sqrt{bb-aa}.$

Parceque Nous auons supposé

$a \backsim 4.$

$b \backsim 5.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

1.

3.

On tire de cette troisieme solution, le canon suiuant;

La difference des deux termes de la raison donnée, & la Racine quarrée de la difference de leurs quarrez, sont les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Cette Question est entierement la même que celle-cy;

Trouuer vn triangle rectangle, tel, que la difference des

quarrez de l'hypotenuse & d'un côté soit à leur somme, en raison donnée.

Car l'hypotenuse & le côté de ce triangle rectangle representeront les deux nombres qu'on cherche.

Pour trouver geometriquement ce triangle rectangle on considerera que la Question proposée est un lieu à la ligne droite, comme l'on connoit dans son Equation constitutive $bxx - byy \sim axx + ayy$, ou $xx \sim \frac{ayy+byy}{b-a}$, dont la fraction $\frac{ayy+byy}{b-a}$, étant multipliée par $a+b$, tant son numerateur que son denominateur, on aura cette autre fraction équivalente $\frac{aayy+2abyy+bbyy}{bb-aa}$, ou $\frac{aayy+2abyy+bbyy}{cc}$, c'est pourquoy au lieu de l'Equation precedente $xx \sim \frac{ayy+byy}{b-a}$, on aura celle-cy, $xx \sim \frac{aayy+2abyy+bbyy}{cc}$, & par consequent celle-cy, $x \sim \frac{ay+by}{c}$, qui est un lieu à la ligne droite, qui se construira ainsy, en mettant les deux lignes AB, AC, à la place des deux nombres donnez a, b.

Construction geometrique. Ayant fait des deux lignes données AB, AC, une ligne droite BC, & ayant fait AD $\sim$ AB, decrivez alentour du diametre BC, le demi-cercle CEB, qui terminera en E, la droite DE, perpendiculaire au diametre BC, & menez les droites BE, CE, entre lesquelles tirant comme l'on voudra la droite FG, parallele au diametre BC, la triangle FEG sera celuy qu'on cherche: de sorte que la difference FGq − EFq, sera à la somme FGq + EFq, comme AB, à AC.

AB $\sim a$.
AC $\sim b$.
AD $\sim a$.
CD $\sim b-a$.
FG $\sim x$.
EF $\sim y$.

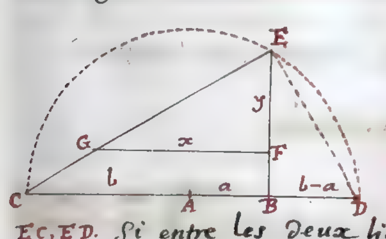
Demonstration. Car à cause du triangle rectangle CEB semblable au triangle rectangle CDE, on connoit que les trois lignes BC, CE, CD, sont proportionnelles: c'est pourquoy on aura cette analogie, BC, CD :: BCq, CEq, & si à la place des deux derniers termes BCq, CEq on met les deux FGq, FEq qui sont en même raison, à cause des triangles semblables BCE, EFG, on aura cette autre analogie, BC, CD :: FGq, FEq, ou AB + AC, AC − AB :: FGq, FEq, & par consequent cette égalité, ABFEq + ACFEq $\sim$ ACFGq − ABFGq, & par l'antitheze on aura celle-cy, ABFGq + ABFEq $\sim$ ACFGq − ACFEq, de laquelle on tire cette analogie, FGq − FEq, FGq + FEq :: AB, AC. Ce qu'il faloit demontrer.

Cette Question est aussy la même que la suivante;

a Trouver un triangle rectangle, tel que la difference des quarrez des deux côtez soit au quarré de l'hypotenuse, en raison donnée.

Car ces deux côtez representeront les deux nombres qu'on cherche.

Pour trouver ce triangle, ayant fait comme auparavant, des deux lignes données AB, AC, la ligne droite CB, & ayant decrit du centre A, par l'extremité C, de la ligne AC ∾ b, le demicercle CED, tirez du point B, sur le diametre CD, la perpendiculaire BE, & menez les droites EC, ED. Si entre les deux lignes EC, EB, on tire à volonté la droite FG, parallele à la ligne BC, le triangle EFG, sera celuy qu'on cherche: de sorte que la difference FGq−EFq, sera à EGq, comme AB, à AC. Construction geometrique.



AB ∾ a.
AC ∾ b.
BC ∾ a+b.
BD ∾ b−a.
FG ∾ x.
EF ∾ y.

Car à cause du triangle rectangle CED, on connoit que les trois lignes BC, BE, BD, sont proportionnelles, & que par consequent on a cette analogie, BC, BD :: BCq, BEq: c'est pourquoy si à la place des deux derniers termes BCq, BEq, on met les deux FGq, EFq, qui sont en même raison, à cause des triangles semblables EBC, EFG, on aura cette autre analogie, BC, BD :: FGq, EFq, ou AB+AC, AC−AB :: FGq. EFq, d'où l'on tire cette égalité, ABEFq+ACEFq ∾ ACFGq−ABFGq, & par l'antitheze on aura celle-cy, ABFGq+ABEFq ∾ ACFGq−ACEFq, ou ABEGq ∾ ACFGq−ACEFq, & par consequent cette analogie, FGq−EFq, EGq :: AB, AC. Ce qu'il faloit demontrer. Demonstration.

Ces deux Questions se peuvent reduire à cette seule;

Trouver un triangle rectangle, tel que le quarré de l'une de ses lignes soit à la somme des quarrez des deux autres, en raison donnée.

Lorsque la premiere ligne sera un côté, la premiere construction resoudra le Probleme, & quand il sera l'hypotenuse, le Probleme se resoudra par la Metode precedente.

Question IV.

Trouver deux nombres, tels que la raison de leur difference à la somme de leurs quarrez soit donnée.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$, soit à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme 1 ∾ r, à 10 ∾ s.

Canon. Si on Multiplie le Plan sous la difference de deux Nombres quelconques & le second terme de la raison donnée, par chacun de ces deux Mêmes Nombres, & qu'on divise chaque Solide par le Solide sous le premier terme & la somme des quarrez des deux Mêmes Nombres; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx - ly,\ xx + yy :: r, s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$lsx - lsy \sim rxx + ryy.$$

dans laquelle on trouvera $y \sim \sqrt{\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx} - \frac{ls}{2r}$. Ainsy on aura cette cette Puissance $\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx$ à égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $\frac{ls}{2r} + \frac{ax}{b}$, on trouvera $x \sim \frac{bbs - abs}{aar + bbr}$, & au lieu de $y \sim \sqrt{\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx} - \frac{ls}{2r}$, on aura $y \sim \frac{aas - abs}{aar + bbr}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bbs - abs,\ aas - abs}{aar + bbr}.$$

Parceque Nous avons supposé

$r \sim 1.$

$s \sim 10.$

Si l'on suppose

$a \sim 1.$

$b \sim 2.$

ou

$a \sim 2.$

$b \sim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

& Si l'on suppose

$a \sim 1.$

$b \sim 3.$

ou

$a \sim 3.$

$b \sim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

2.

6.

Comme cette Question est indeterminée, Diophante luy ajoute Une condition, en donnant la raison double aux deux Nombres qu'on cherche, & alors cette Question devient la même que la XXXV. du Livre precedent.

On

$AO \backsim l.$

$AP \backsim r.$

$AQ \backsim s.$

$AB \backsim \frac{ls}{2r} \backsim BC \backsim DH \backsim DM.$

$CL \backsim \frac{ls}{r} \backsim CN \backsim HM.$

$AC \backsim \sqrt{\frac{llss}{2rr}} \backsim AF \backsim AG.$

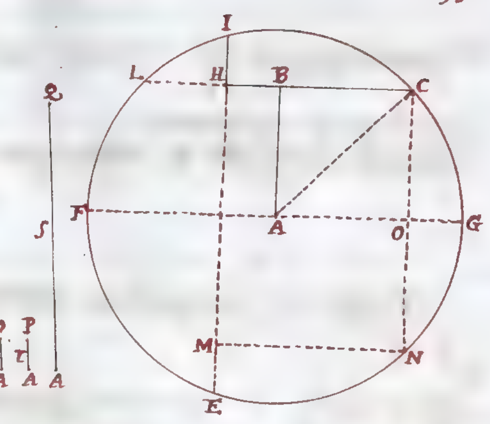
$CH \backsim x.$

$HI \backsim y.$

$ED \backsim z \backsim DI.$

$AD \backsim \omega \backsim BH.$

$FG \backsim \sqrt{2llss}.$



On connoitra comme dans la Quest. I. que cette Question est Vn Lieu à Vn cercle donné, sauoir dont le rayon est $\sqrt{\frac{llss}{2rr}}$: & la construction sera toutafait la même, laquelle par consequent Nous ne repeterons pas icy, & alors les deux lignes IH, CH, representeront les deux Nombres qu'on cherche, de sorte que leur difference $CH-IH$ Multipliée par l'Vnité AO, sauoir $AOCH-AOIH$, sera à la somme $CHq+IHq$, de leurs quarez, comme AP, à AQ. *Construction geometrique.*

Car comme il a été demontré dans la Quest. I. que la ligne HI, est égale à $EH-CL$, par l'antithese on aura $EH \backsim HI+CL$, & l'on pourra faire cette analogie, $LH, EH :: LH, HI+CL$, c'est pourquoy si à la place des deux premiers termes LE, EH, on met les deux HI, CH, qui sont en même raison par la Nature du cercle, on aura celle-cy, $HI, CH :: LH, HI+CL$, & par consequent cette égalité, $HIq+CLHI \backsim CHLH$, ou $HIq+CLHI \backsim CLCH-CHq$, à cause de $LH \backsim CL-CH$, & par l'antithese on aura celle-cy, $CLCH-CLHI \backsim CHq+HIq$, ou $2ABCH-2ABHI \backsim CHq+HIq$, à cause de $CL \backsim 2AB$, & si on donne à chaque Plan la hauteur commune AP, on aura cette autre égalité, $2ABAPCH-2ABAPHI \backsim APCHq+APHIq$, & si à la place du Plan $2ABAP$, on met le Plan $AOAQ$, qui luy est égal, comme il a été demontré dans la Quest. I. on aura cette derniere égalité, $AOAQCH-AOAQHI \backsim APCHq+APHIq$, laquelle étant reduite en proportion donne cette analogie, $AOCH-AOHI, CHq+HIq :: AP, AQ$. Ce qu'il faloit demontrer. *Demonstration.*

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'Vnité, ny d'égaler au quarré ~~un quarré~~ aucune Puissance, mettez

$$\frac{a, b}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon la condition de la Question, Vous aurez en entiers cette analogie,

$$az-bz,\ aa+bb :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$asz-bsz \sim aar+bbr.$$

dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{aar+bbr}{as-bs}$: & les deux nombres qu'on cherche, se trouveront les mêmes qu'auparavant.

Question V.

Trouver deux Nombres, dont la somme soit à la difference de leurs quarrez en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la somme $x+y$, soit à la difference $xx-yy$, de leurs quarrez comme $1 \sim r$, à $6 \sim s$.

Canon. On peut prendre tel Nombre que l'on voudra pour le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, auquel ajoutant le second terme de la raison donnée, divisé par le premier, on aura le plus grand.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$1x+1y,\ xx-yy :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$1sx+1sy \sim rxx-ryy.$$

dans laquelle on trouvera $y \sim x+\frac{1s}{r}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$

$$x+\frac{1s}{r}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 6.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 6.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

6.

12.

& Si l'on suppose

$$x \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

1.

7.

On void que la solution se fera toujours en nombres entiers,

parceque le premier terme r, de la raison donnée $\frac{r}{s}$, est égal à l'Unité. Ainsy supposant

$x \sim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

2.

8.

& supposant

$x \sim 3.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

3.

9.

On Void aussy comme dans la Quest. II. que cette Question est Un lieu à la ligne droite, dont la construction est toutafait la même, excepté qu'au lieu de prendre le point E, sur la ligne Locale BC, entre B, & C, il le faut prendre au delà de B, ou au delà de C, la ligne BC, prolongée, & les deux lignes AD, DE, representeront les deux Nombres qu'on cherche; de sorte que leur somme AD+DE, multipliée par l'Unité AO, sauoir AOAD + AODE, est à la difference ADq-DEq, de leurs quarez, comme AP, à AQ. Construction geometrique.

Car puisque Nous auons DB ∾ DE, à cause de AB ∾ AC, par la construction, Nous aurons AB ∾ AD-DE, à cause de AB ∾ AD-BD, & l'on pourra faire cette analogie, AO, AD-DE :: AO, AB, & si à la place des deux derniers termes AO, AB, on met les deux AP, AQ, qui sont en même raison, par la construction, on aura celle-cy, AO, AD-DE :: AP, AQ, & si on donne aux deux premiers termes AO, AD-DE, la hauteur commune AD+DE, on aura cette derniere analogie, AOAD+AODE, ADq-DEq :: AP, AQ. Ce qu'il faloit demontrer. Demonstration.

AO ∾ l.
AP ∾ r.
AQ ∾ s.
AB ∾ $\frac{ls}{r}$.
AC ∾ $\frac{ls}{r}$.
DE ∾ x.
BD ∾ x.
AD ∾ y.

En comparant de deux en deux ces cinq Questions indeterminées de Diophante, on en peut former plusieurs Questions determinées, que Nous ajouterons icy, excepté Une qui a deja été resolue, parcequ'elle est la premiere des quatre qui ont été ajoutées à la Quest. III.

I.

Trouuer deux Nombres, tels que la raison de leur difference à la difference de leurs quarrez, & la raison de leur somme à la somme de leurs quarrez soient données.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$, soit à la difference $xx-yy$ de leurs quarrez comme $1 \sim r$, à $6 \sim s$, & dont la somme $x+y$, soit à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez comme $3 \sim a$, à $10 \sim b$.

Canon. Si des quatre nombres donnez r, s, a, b, on ajoute & on ôte du second diuisé par le double du premier, la Racine quarrée de l'excez du Plan du second & du quatrieme diuisé par le double du Plan du premier & du troisieme, sur le quarré du second diuisé par le quadruple du quarré du premier; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly, xx-yy :: r, s.$$

$$lx+ly, xx+yy :: a, b.$$

desquelles on tire ces deux Equations,

$$lsx-lsy \sim rxx-ryy.$$

$$lbx+lby \sim axx+ayy.$$

Dans la premiere $lsx-lsy \sim rxx-ryy$, on trouuera $y \sim \frac{ls}{r}-x$, & dans la seconde $lbx+lby \sim axx+ayy$, on trouuera le même $y \sim \frac{lb}{2a}+\sqrt{\frac{llbb}{4aa}+\frac{lbx}{a}-xx}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{ls}{r}-x \sim \frac{lb}{2a}+\sqrt{\frac{llbb}{4aa}+\frac{lbx}{a}-xx}$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{ls}{2r}+\sqrt{\frac{llbs}{2ar}-\frac{llss}{4rr}}$, & au lieu de $y \sim \frac{ls}{r}-x$, ou de $y \sim \frac{lb}{2a}+\sqrt{\frac{llbb}{4aa}+\frac{lbx}{a}-xx}$, on aura $y \sim \frac{ls}{2r}-\sqrt{\frac{llbs}{2ar}-\frac{llss}{4rr}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{s}{2r}+\sqrt{\frac{bs}{2ar}-\frac{ss}{4rr}}.$$

$$\frac{s}{2r}-\sqrt{\frac{bs}{2ar}-\frac{ss}{4rr}}.$$

Parceque Nous auons supposé

$r \sim 1$.

$s \sim 6$.

$a \sim 3$.

$b \sim 10$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

La determination de cette Question, à l'égard des quatre nombres donnez r, s, a, b, est que le troisieme a, doit être plus grand que $\frac{br}{s}$, & moindre que $\frac{2br}{s}$, c'est à dire que a, doit être entre $\frac{br}{s}$ & $\frac{2br}{s}$. Determination.

Car dans le terme irrationnel $\sqrt{\frac{bs}{2ar}-\frac{ss}{rr}}$, on a $\frac{bs}{2ar} \oplus \frac{ss}{4rr}$: c'est pourquoy en divisant par $\frac{ss}{4arr}$, ou en multipliant par $\frac{4arr}{ss}$, on aura $\frac{2br}{s} \oplus a$. Ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit demontrer. Demonstration.

Dans le second nombre trouvé $\frac{s}{2r}-\sqrt{\frac{bs}{2ar}-\frac{ss}{4rr}}$, on a $\frac{s}{2r} \oplus \sqrt{\frac{bs}{2ar}-\frac{ss}{4rr}}$, & par consequent $\frac{ss}{4rr} \oplus \frac{bs}{2ar}-\frac{ss}{4rr}$, c'est pourquoy en ajoutant $\frac{ss}{4rr}$, on aura $\frac{ss}{2rr} \oplus \frac{bs}{2ar}$, & en multipliant par $\frac{2arr}{ss}$, ou en divisant par $\frac{ss}{2arr}$, on aura $a \oplus \frac{br}{s}$. Ce qui restoit à demontrer.

On connoit que la deuxieme Equation $lbx+lby \backsim axx+ayy$, ou $xx-\frac{lbx}{a} \backsim \frac{lby}{a}-yy$, est un lieu à un cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{llbb}{2aa}}$, & dont nous avons donné la construction dans la Quest. I. En divisant la premiere Equation $lsx-lsy \backsim rxx-ryy$, par $x-y$, on a celle-cy, $ls \backsim rx+ry$, qui est un lieu à la ligne droite, que nous avons construit dans la Quest. II. C'est pourquoy si l'on joint ensemble ces deux lieux, on aura une construction tres facile pour la solution geometrique du Probleme, lorsque les quatre nombres donnez r, s, a, b, seront exprimez par des lignes, comme vous alez voir.

Ayant fait le triangle isoscele rectangle OCP, dont chacun des côtez CO, CP, soit égal à $\frac{ls}{r}$, ou quatrieme proportionnel aux trois lignes AP, AQ, AO, faites encore le triangle isoscele rectangle ABC, dont chacun des côtez AB, BC, soit égal à $\frac{lb}{2a}$, ou quatrieme proportionnel aux trois lignes 2AR, AS, AO, & decrivez du centre A, par le point C, une circonference de cercle, qui coupe icy la ligne locale OP, au point E, duquel vous tirerez la droite EH, perpendiculaire à la ligne OC; & les deux lignes OH, CH, representeront les deux nombres qu'on cherche, comme il a été demontré dans la Quest. I. & II. sans qu'il soit besoin d'en parler davantage. Construction geometrique.

$AO \backsim l$.
$AP \backsim r$.
$AQ \backsim s$.
$AR \backsim a$.
$AS \backsim b$.
$AB \backsim \frac{lb}{2a} \backsim BC$.
$OC \backsim \frac{ls}{r} \backsim CP$.
$CH \backsim x$.
$EH \backsim y \backsim OH$.

II.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur difference à la difference ~~à la difference~~ de leurs quarrez, & la raison de leur somme à la même difference de leurs quarrez, soient données.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$, soit à la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $6 \sim s$, & dont la somme $x+y$, soit à la même difference $xx-yy$, de leurs quarrez, comme $1 \sim a$, à $2 \sim b$.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ajoute & on ôte le Plan sous les deux extrêmes du Plan sous les deux moyens, & qu'on divise la somme & le reste, chacun par le double du Plan sous le premier & le troisieme; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$1x-1y,\ xx-yy :: r, s.$$
$$1x+1y,\ xx-yy :: a, b.$$

desquelles on tire ces deux Equations,

$$1sx-1sy \sim rxx-ryy.$$
$$1bx+1by \sim axx-ayy.$$

dont la premiere étant divisée par $x-y$, & la deuxieme par $x+y$, on aura ces deux autres Equations constitutives,

$$1s \sim rx+ry.$$
$$1b \sim ax-ay.$$

Dans la premiere $1s \sim rx+ry$, on trouvera $y \sim \frac{1s}{r}-x$, & la deuxieme $1b \sim ax-ay$, se changera en celle-cy, $1b \sim 2ax-\frac{las}{r}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{1b}{2a}+\frac{1s}{2r}$: c'est pourquoy au lieu de $y \sim \frac{1s}{r}-x$, on aura $y \sim \frac{1s}{2r}-\frac{1b}{2a}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{as+br,\ as-br}{2ar}.$$

Parceque nous avons supposé

$r \sim 1.$

$s \sim 6.$

$a \sim 1.$

$b \sim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur.

Determination. La determination de cette Question à l'égard des quatre Nombres donnez r, s, a, b, est que le Plan as, doit être plus grand que le Plan br, à cause du Numerateur du second Nombre trouvé $as-br$.

On connoit aisément que la premiere Equation $ls \backsim rx+ry$, est Vn Lieu à la Ligne droite, dont Nous auons donné la construction dans la Quest. II. & que la seconde Equation $lb \backsim ax-ay$, est aussy Vn Lieu à la Ligne droite, que Nous auons construit dans la Quest. V. C'est pourquoy si on joint ensemble ces deux lieux, on aura Vne construction tres facile, pour la solution geometrique de cette Question, en substituant des lignes à la place des quatre Nombres donnez r, s, a, b, comme Vous alez Voir.

Ayant tiré à Vn angle quelconque les deux lignes AG, CF, faites les deux lignes AF, AG, égales chacune à $\frac{ls}{r}$, ou quatrieme proportionnelle aux trois AP, AQ, AO, & tirez les deux lignes locales FG, CB, qui se coupent icy au point E, par où Vous *Construction Geometrique.*

AO ∾ l.
AP ∾ r.
AQ ∾ s.
AR ∾ a.
AS ∾ b.
AG ∾ $\frac{ls}{r}$ ∾ AF.
AB ∾ $\frac{lb}{a}$ ∾ AC.
AD ∾ x.
DE ∾ y ∾ BD ∾ DG.

C
A B D G
E
F

A — l — O
A — r — P
A — s — Q
A — a — R
A — b — S

tirerez la droite DE, parallele à la ligne CF, en Vous souuenant que chacune des deux lignes AB, AC, doit être égale à $\frac{lb}{a}$, ou quatrieme proportionnelle aux trois AR, AS, AO: & les deux lignes AD, DE, representeront les deux Nombres qu'on cherche, comme il a été demontré dans la Quest. II. & V.

III.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à la difference & à la somme de leurs quarrez en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$, soit à la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \backsim r$, à $6 \backsim s$, & à la somme $xx+yy$ des mêmes quarrez, comme $1 \backsim a$, à $10 \backsim b$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ôte de la somme du Plan sous les deux extrêmes & du Plan sous les deux Moyens, la Racine quarrée de l'excez du quarré du premier Plan sur le *Canon.*

quarré du second Plan, & qu'on ajoute la même Racine quarrée à la difference des mêmes Plans, il viendra deux Nombres, dont chacun étant divisé par le double du Plan sous le premier & le troisieme Nombre donné; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ xx-yy :: r,\ s.$$
$$lx-ly,\ xx+yy :: a,\ b.$$

desquelles on tire ces deux Equations constitutives,

$$lsx-lsy \sim rxx-ryy.$$
$$lbx-lby \sim axx+ayy.$$

Dans la premiere $lsx-lsy \sim rxx-ryy$, on trouvera $y \sim \frac{ls}{r}-x$, & dans la seconde $lbx-lby \sim axx+ayy$, ou $xx-\frac{lbx}{a} \sim -yy-\frac{lby}{a}$, on trouvera le même $y \sim \sqrt{\frac{llbb}{4aa}+\frac{lbx}{a}-xx}-\frac{lb}{2a}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{ls}{r}-x \sim \sqrt{\frac{llbb}{4aa}+\frac{lbx}{a}-xx}-\frac{lb}{2a}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{lb}{2a}-\frac{ls}{2r}-\sqrt{\frac{llbb}{4aa}-\frac{llss}{4rr}}$, & au lieu de $y \sim \frac{ls}{r}-x$, ou de $y \sim \sqrt{\frac{llbb}{4aa}+\frac{lbx}{a}-xx}-\frac{lb}{2a}$, on aura $y \sim \frac{ls}{2r}-\frac{lb}{2r}+\sqrt{\frac{llbb}{4aa}-\frac{llss}{4rr}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{as+br-\sqrt{bbrr-aass},\quad as-br+\sqrt{bbrr-aass}}{2ar}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 6.$$
$$a \sim 1.$$
$$b \sim 10.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

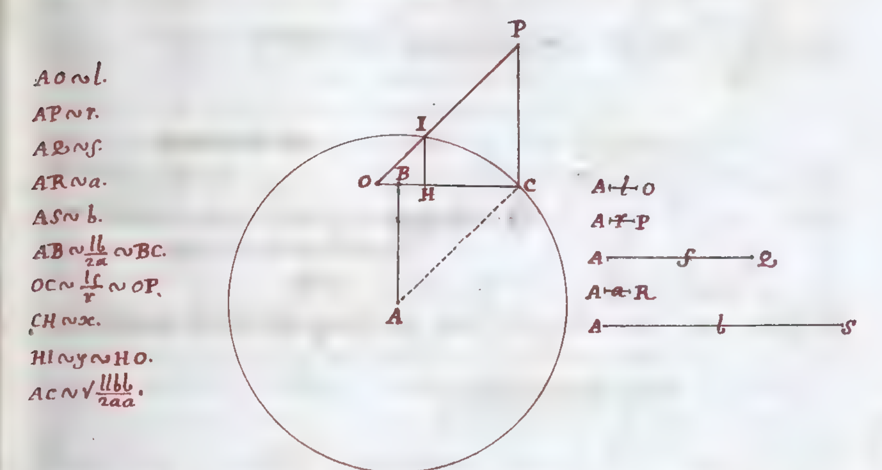
Determination. La determination de cette Question, à l'égard des quatre Nombres donnez r, s, a, b, est que le Plan as doit être moindre que le Plan br, à cause du terme irrationnel $\sqrt{bbrr-aass}$, qui se rencontre dans chacun des deux Nombres trouvez, où l'on a $bbrr \oplus aass$, & par consequent $br \oplus as$.

La premiere Equation $lsx-lsy \sim rxx-ryy$, étant divisée par $x-y$, donne cette autre Equation $ls \sim rx+ry$, qui est un Lieu à la Ligne Droite, dont Nous avons donné la description dans la Quest. II. & comme la seconde Equation $lbx-lby \sim axx+ayy$, ou $yy+\frac{lby}{a} \sim \frac{lbx}{a}-xx$, est un Lieu à un cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{llbb}{2aa}}$, & dont Nous avons enseigné la description dans la Quest. IV. si on joint ensemble ces deux Lieux, on aura une construction tres facile pour la Solution geometrique de cette Question, en substituant

des

des lignes à la place des quatre Nombres donnez r, s, a, b, comme vous alez voir.

Ayant fait le triangle isoscele rectangle OCP, dont chacun des côtez CO, CP, soit égal à $\frac{ls}{r}$, ou quatrieme proportionnel aux trois lignes AP, AQ, AO, faites encore le triangle isoscele rectangle ABC, dont chacun des côtez AB, BC, soit égal à $\frac{lb}{2a}$, ou quatrieme Construction geometrique.



proportionnel aux trois lignes 2AR, AS, AO, & decrivez du centre A, par le point C, une circonference de cercle, qui coupe icy la ligne Locale OP, au point I, duquel vous tirerez la droite HI, perpendiculaire à la ligne CO, & les deux lignes HC, HI, representeront les deux Nombres qu'on cherche, comme il a été demontré dans la Quest. II. & IV.

IV.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur somme à la somme de leurs quarrez, & la raison de leur difference à la même somme de leurs quarrez, soient données.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la somme $x+y$ soit à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme $3 \backsim r$, à $10 \backsim s$, & dont la difference $x-y$, soit à la même somme $xx+yy$, de leurs quarrez, comme $1 \backsim a$, à $10 \backsim b$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ajoute & on ôte du Plan sous les deux extrêmes le Plan sous les deux moyens, & qu'on Canon.

divise la somme & le reste par la somme des quarrez de ces deux mêmes Plans, il viendra deux Nombres, dont chacun étant Multiplié par le Plan sous le second & le quatrieme Nombre donné; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx+ly,\ xx+yy :: r,\ s.$$

$$lx-ly,\ xx+yy :: a,\ b.$$

desquelles on tire ces deux Equations constitutives,

$$lsx+lsy \sim rxx+ryy.$$

$$lbx-lby \sim axx+ayy.$$

Dans la premiere $lsx+lsy \sim rxx+ryy$, on trouvera $y \sim \frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}$, & dans la seconde $lbx-lby \sim axx+ayy$, on trouvera le même $y \sim \sqrt{\frac{llbb}{4aa}+\frac{lbx}{a}-xx} - \frac{lb}{2a}$. Ainsy on aura cette Equation, $\frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx} \sim \sqrt{\frac{llbb}{4aa}+\frac{lbx}{a}-xx} - \frac{lb}{2a}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{bbrs+abss}{aass+bbrr}$, & au lieu de $y \sim \frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}$ ou de $y \sim \sqrt{\frac{llbb}{4aa}+\frac{lbx}{a}-xx} - \frac{lb}{2a}$, on aura $y \sim \frac{bbrs-abss}{aass+bbrr}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bbrs+abss,\ bbrs-abss}{aass+bbrr}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 3.$$

$$s \sim 10.$$

$$a \sim 1.$$

$$b \sim 10.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$4.$$

$$2.$$

La determination de cette Question, à l'égard des quatre Nombres donnez r, s, a, b, est que le Plan as, doit être moindre que le Plan br, à cause du numerateur $bbrs-abss$, du second Nombre trouvé, où l'on a $bbrs \oplus abss$, ou $br \oplus as$.

On connoit que la premiere Equation, $lsx+lsy \sim rxx+ryy$, est Un Lieu à Un cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{llss}{2r}}$, & dont Nous avons donné la construction dans la Quest. I. On connoit aussy que la seconde Equation $lbx-lby \sim axx+ayy$, est Un Lieu à Un cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{llbb}{2aa}}$, & dont Nous avons enseigné la description dans la Quest. IV. C'est pourquoy en joignant ensemble ces deux Lieux, on aura la construction suivante pour la solution geometrique de cette Question, en mettant des lignes à la place des quatre Nombres donnez r, s, a, b, & aussy Une ligne à la place de l'Unité.

Ayant fait le triangle isoscele rectangle ABC, dont chacun des côtez AB, BC, soit égal à $\frac{ls}{2r}$, ou quatrieme proportionnel aux trois lignes 2AP, AQ, AO, & le triangle isoscele rectangle COP, dont

$AO \backsim l.$
$AP \backsim r.$
$AQ \backsim s.$
$AR \backsim a.$
$AS \backsim b.$
$AB \backsim \frac{ls}{2r} \backsim BC.$
$CO \backsim \frac{lb}{2a} \backsim OP.$
$PC \backsim \sqrt{\frac{llbb}{2aa}}.$
$AC \backsim \sqrt{\frac{llss}{2rr}}.$
$CH \backsim x.$
$IH \backsim y.$

chacun des côtez OP, OC, soit égal à $\frac{lb}{2a}$, ou quatrieme proportionnel aux trois lignes 2AR, AS, AO, decrivez des centres A, P, par le point commun C, deux circonferences de cercle, qui se coupent icy au point I, duquel vous tirerez la droite HI, perpendiculaire à la ligne CO, & les deux lignes CH, HI, representeront les deux Nombres qu'on cherche, comme il a été demontré dans la Quest. I. & IV.

V.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur somme à la somme de leurs quarrez, & la raison de leur même somme à la difference des mêmes quarrez, soient données.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la somme $x+y$ soit à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme $3 \backsim r$, à $10 \backsim s$, & à la difference $xx-yy$ des mêmes quarrez, comme $1 \backsim a$, à $2 \backsim b$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ajoute à la somme & à la difference du Plan sous les deux moyens, & du Plan sous les deux extremes, la Racine quarrée de l'excez du quarré du premier Plan sur le quarré du second, & qu'on divise chaque somme par le double du Plan sous le premier & le troisieme Nombre Canon.

donné; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx+ly,\ xx+yy :: r,\ s.$$
$$lx+ly,\ xx-yy :: a,\ b.$$

desquelles on tire ces deux Equations constitutives,

$$lsx+lsy \sim rxx+ryy.$$
$$lbx+lby \sim axx-ayy.$$

Dans la premiere $lsx+lsy \sim rxx+ryy$, on trouvera $y \sim \frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}$, & dans la seconde $lbx+lby \sim axx-ayy$, on trouvera le même $y \sim x-\frac{lb}{a}$. c'est pourquoy on aura cette Equation, $x-\frac{lb}{a} \sim \frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{ls}{2r}+\frac{lb}{2a}+\sqrt{\frac{llss}{4rr}-\frac{llbb}{4aa}}$, & au lieu de $y \sim \frac{ls}{2r}+\sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}$, ou de $y \sim x-\frac{lb}{a}$, on aura $y \sim \frac{ls}{2r}-\frac{lb}{2a}+\sqrt{\frac{llss}{4rr}-\frac{llbb}{4aa}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{as+br+\sqrt{aass-bbrr},\ as-br+\sqrt{aass-bbrr}}{2ar}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 2.$$
$$r \sim 3.$$
$$s \sim 10.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

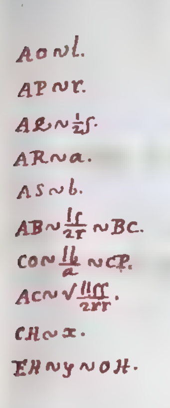
4.

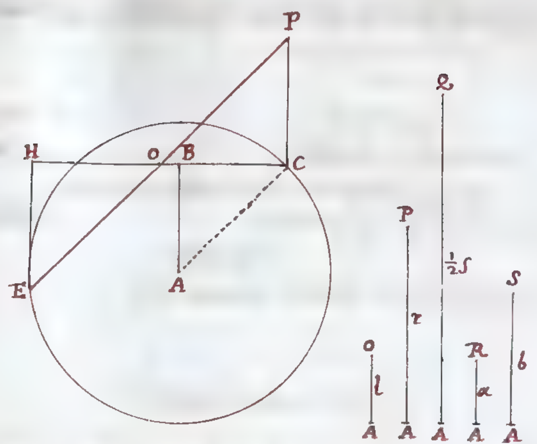
2.

La determination de cette Question, à l'égard des quatre Nombres donnez a, b, r, s, est que le Plan as, doit être plus grand que le Plan br, à cause du terme irrationel $\sqrt{aass-bbrr}$, ou l'on a $aass \oplus bbrr$, & par consequent $as \oplus br$.

On connoit que la premiere Equation $lsx+lsy \sim rxx+ryy$, ou $xx-\frac{lsx}{r} \sim \frac{lsy}{r}-yy$, est Un Lieu à Un cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{llss}{2rr}}$, & dont Nous avons donné la construction dans la Quest. I. On connoit aussy que la deuxieme Equation $lbx+lby \sim axx-ayy$, est Un Lieu à la Ligne droite, parceque si on la divise par $x+y$ il Vient cette Equation simple, $lb \sim ax-ay$, qui est Un Lieu à la Ligne droite, dont Nous avons enseigné la description dans la Quest. V. C'est pourquoy si l'on joint ensemble ces deux Lieux, on poura resoudre en lignes cette Question, lors que les quatre Nombres donnez r, s, a, b, & aussy l'Unité, seront representez par des lignes, comme Vous alez Voir.

Construction geometrique. Ayant fait le triangle isoscele rectangle OCP, dont chacun des côtez CO, CP, soit égal à $\frac{lb}{a}$, ou quatrieme proportionnel aux trois





lignes AR, AS, AO, & encore le triangle rectangle isoscele ABC, dont chacun des côtez soit égal à $\frac{ls}{2r}$, ou quatrieme proportionnel aux trois lignes 2AP, 2AQ, AO, ou aux trois AP, AQ, AO, decrivez du centre A, par le point commun C, une circonference de cercle, qui coupe icy la ligne locale OP, prolongée au point E, duquel vous tirerez la droite EH, perpendiculaire à la ligne CBO, prolongée, & les deux lignes CH, EH, representeront les deux nombres qu'on cherche, comme il a été demontré dans la Quest. I. & V.

VI.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur difference à la somme de leurs quarrez, & la raison de leur somme à la difference de leurs quarrez soient données.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme 1∾r, à 1∾s, & dont la somme $x+y$ soit à la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme 1∾a, à 2∾b.

Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ajoute & ôte le quatrieme divisé par le double du troisieme, de la Racine quarrée de l'excez du Plan sous le second & le quatrieme divisé par le Plan sous le premier & le double du troisieme, sur le quarré du quatrieme divisé par le double du troisieme; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question on aura ces deux analogies,

$$lx-ly, xx+yy :: r, s.$$
$$lx+ly, xx-yy :: a, b.$$

desquelles on tire ces deux Equations constitutives,

$$lsx - lsy \sim rxx + ryy.$$

$$lbx + lby \sim axx - ayy.$$

Dans la premiere $lsx - lsy \sim rxx + ryy$, on trouvera $y \sim \sqrt{\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx} - \frac{ls}{2r}$, & dans la seconde $lbx + lby \sim axx - ayy$, on trouvera le même $y \sim x - \frac{lb}{a}$. C'est pourquoy on aura cette Equation, $x - \frac{lb}{a} \sim \sqrt{\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx} - \frac{ls}{2r}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \sqrt{\frac{bs}{2ar} - \frac{bb}{4aa}} + \frac{b}{2a}$, & au lieu de $y \sim x - \frac{lb}{a}$, ou de $y \sim \sqrt{\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx} - \frac{ls}{2r}$, on aura $y \sim \sqrt{\frac{bs}{2ar} - \frac{bb}{4aa}} - \frac{b}{2a}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\frac{bs}{2ar} - \frac{bb}{4aa}} + \frac{b}{2a}.$$

$$\sqrt{\frac{bs}{2ar} - \frac{bb}{4aa}} - \frac{b}{2a}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 10.$$

$$a \sim 1.$$

$$b \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

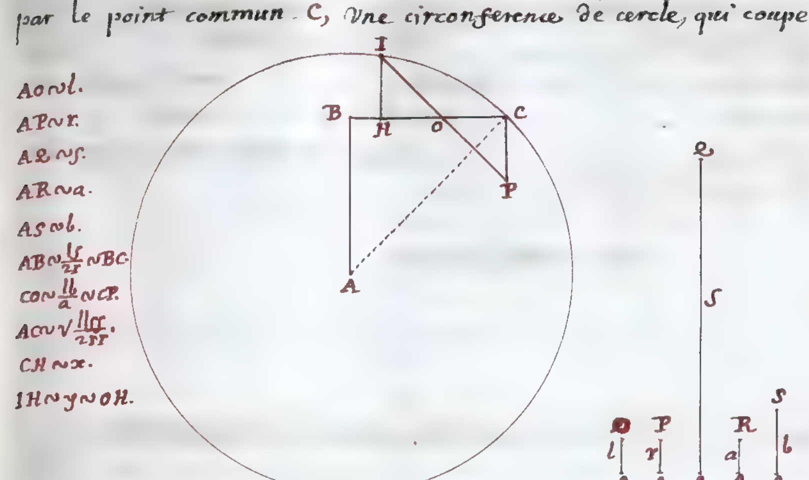
2.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des quatre Nombres donnez r, s, a, b, est que le Plan as doit être plus grand que le Plan br, à cause du second Nombre trouvé $\sqrt{\frac{bs}{2ar} - \frac{bb}{4aa}} - \frac{b}{2a}$, où l'on a $\sqrt{\frac{bs}{2ar} - \frac{bb}{4aa}} \oplus \frac{b}{2a}$, & par consequent $\frac{bs}{2ar} - \frac{bb}{4aa} \oplus \frac{bb}{4aa}$, ou $\frac{bs}{2ar} \oplus \frac{bb}{2aa}$, ou $\frac{s}{r} \oplus \frac{b}{a}$, ou enfin $as \oplus br$.

On void aisément que la premiere Equation $lsx - lsy \sim rxx + ryy$, ou $yy + \frac{lsy}{r} \sim \frac{lsx}{r} - xx$, est un Lieu à un cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{llss}{2rr}}$, & dont Nous avons donné la construction dans la Quest. IV. On void aussy facilement que la deuxieme Equation $lbx + lby \sim axx - ayy$, est un Lieu à la Ligne droite, parceque si on la divise par $x+y$, il vient ce Lieu à la Ligne droite $lb \sim ax - ay$, dont Nous avons enseigné la construction dans la Quest. V. C'est pourquoy si l'on joint ensemble ces deux Lieux, on aura resolu en lignes cette Question, pourvû qu'à la place des quatre Nombres donnez r, s, a, b, & de l'Unité l, on substitue des lignes, comme vous alez voir.

Construction geometrique. Ayant fait le triangle isoscele rectangle OCP, dont chacun des côtez CO, CP, soit égal à $\frac{lb}{a}$, ou quatrieme proportionnel aux trois lignes AR, AS, AO, faites encore le triangle isoscele rectangle ABC, dont chacun des côtez AB, BC, soit égal à $\frac{ls}{2r}$, ou quatrieme proportionnel aux trois lignes 2AP, AQ, AO, & decrivez du centre A,

par le point commun C, vne circonference de cercle, qui coupe



icy la ligne Locale OP, prolongée au point H, duquel on tirera la droite HI, perpendiculaire à la ligne COB, & les deux lignes HC, HI, representeront les deux Nombres qu'on cherche, comme il a été demontré dans la Quest. IV. & V.

VII.

Trouuer deux Nombres, tels que les raisons de leur difference à la difference de leurs quarrez, & à leur produit, soient données.

On propose de trouuer deux nombres

x.

y.

dont la difference x−y, soit à la difference xx−yy, de leurs quarrez, comme 1∾r, à 6∾s. & à leur produit xy, comme 1∾a, à 4∾b.

Si des quatre nombres donnez r, s, a, b, on ôte & ajoute le quatrieme diuisé par le troisieme, au second diuisé par le double du premier; & qu'au reste on ajoute, & que de la somme on ôte la Racine quarrée de la somme des quarrez des deux quotiens precedens; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ xx-yy :: r, s.$$

$$lx-ly,\ xy :: a, b.$$

desquelles on tire ces deux Equations constitutiues,

$$lsx-lsy \sim rxx-ryy.$$

$$lbx-lby \sim axy.$$

Dans la premiere $1sx-1sy \sim rxx-ryy$, on trouvera $y \sim \frac{1s}{r}-x$, & dans la seconde $1bx-1by \sim axy$, on trouvera le même $y \sim \frac{1bx}{ax+1b}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{1s}{r}-x \sim \frac{1bx}{ax+1b}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{1s}{2r}-\frac{1b}{a}+\sqrt{\frac{1ss}{4rr}+\frac{1bb}{aa}}$, & au lieu de $y \sim \frac{1s}{r}-x$, ou de $y \sim \frac{1bx}{ax+1b}$, on trouvera $y \sim \frac{1s}{2r}+\frac{1b}{a}-\sqrt{\frac{1ss}{4rr}+\frac{1bb}{aa}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{as-2br+\sqrt{aass+4bbrr},\quad as+2br-\sqrt{aass+4bbrr}}{2ar}.$$

Parceque Nous avons supposé

$r \sim 1.$

$s \sim 6.$

$a \sim 1.$

$b \sim 4.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

VIII.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur difference à la difference de leurs quarrez, & la raison de leur somme à leur produit, soient données.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit à la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $6 \sim s$, & dont la somme $x+y$ soit à leur produit xy, comme $3 \sim a$, à $4 \sim b$.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ajoute & on ôte du second divisé par le double du premier, la Racine quarrée de l'excez du quarré de ce quotient sur le quotient qu'on aura en divisant le Plan du second & du quatrieme par le Plan du premier & du troisieme; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$1x-1y,\ xx-yy :: r, s.$

$1x+1y,\ xy :: a, b.$

d'où l'on tire ces deux Equations constitutives,

$1sx-1sy \sim rxx-ryy.$

$1bx+1by \sim axy.$

Dans la premiere $1sx-1sy \sim rxx-ryy$, on trouvera $y \sim \frac{1s}{r}-x$, & dans la seconde $1bx+1by \sim axy$, on trouvera le même $y \sim \frac{1bx}{ax-1b}$. c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{1s}{r}-x \sim \frac{1bx}{ax-1b}$, dans laquelle

on

on trouuera $x \sim \frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr} - \frac{llbs}{ar}}$: & au lieu de $y \sim \frac{ls}{r} - x$, ou de $y \sim \frac{lbx}{ax - lb}$, on aura $y \sim \frac{ls}{2r} - \sqrt{\frac{llss}{4rr} - \frac{llbs}{ar}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr} - \frac{llbs}{ar}}.$$
$$\frac{ls}{2r} - \sqrt{\frac{llss}{4rr} - \frac{llbs}{ar}}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 6.$$
$$a \sim 3.$$
$$b \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$4.$$
$$2.$$

La determination de cette Question, à l'égard des quatre Nombres donnez r, s, a, b, est que le Plan as, doit être plus grand que le Plan $4br$, à cause du terme irrationnel $\sqrt{\frac{llss}{4rr} - \frac{llbs}{ar}}$, qui se rencontre dans chaque Nombre trouvé, ou l'on a $\frac{llss}{4rr} \oplus \frac{llbs}{ar}$, & par consequent $\frac{ss}{4rr} \oplus \frac{bs}{ar}$, ou $\frac{s}{4r} \oplus \frac{b}{a}$, ou $as \oplus 4br$. Determination.

IX.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à la somme de leurs quarrez, & à leur produit, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la difference $x - y$ soit à la somme $xx + yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $10 \sim s$, & à leur produit xy, comme $1 \sim a$, à $4 \sim b$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ajoute & on ôte l'excez du Plan sous les deux Moyens sur le double du Plan sous les deux extrêmes, de la Racine quarrée de la difference des quarrez du Plan sous les deux Moyens & du double du Plan sous les deux extrêmes, & qu'on diuise la somme & le reste par le double du Plan sous le premier & le troisieme; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx - ly,\ xx + yy :: r, s.$$
$$lx - ly,\ xy :: a, b.$$

desquelles on tire ces deux Equations,

$$lsx - lsy \sim rxx + ryy.$$
$$lbx - lby \sim axy.$$

Dans la premiere $lsx-lsy \sim rxx+ryy$, on trouvera $y \sim \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}-\frac{ls}{2r}$, & dans la seconde $lbx-lby \sim axy$, on trouvera le même $y \sim \frac{lbx}{ax+lb}$; c'est pourquoy on aura cette Equation, $\sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}-\frac{ls}{2r} \sim \frac{lbx}{ax+lb}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{\sqrt{aass-4bbrr}+as-2br}{2ar}$, & au lieu de $y \sim \frac{lbx}{ax+lb}$, ou de $y \sim \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}-\frac{ls}{2r}$, on aura $y \sim \frac{\sqrt{aass-4bbrr}-as+2br}{2ar}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{\sqrt{aass-4bbrr}+as-2br,\ \sqrt{aass-4bbrr}+as-2br}{2ar}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 10.$$
$$a \sim 1.$$
$$b \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$4.$$
$$2.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des quatre Nombres donnez r, s, a, b, est que le Plan as, doit être plus grand que le Plan $2br$, à cause du terme irrationnel $\sqrt{aass-4bbrr}$, qui se rencontre dans chacun des deux Nombres trouvez, où l'on a $aass \oplus 4bbrr$, & par consequent $as \oplus br$.

X.

Trouver deux nombres, tels que la raison de leur difference à la somme de leurs quarrez, & la raison de leur somme à leur produit, soient données.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la difference $x-y$ soit à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez comme $1 \sim r$, à $10 \sim s$, & dont la somme $x+y$, soit à leur produit xy, comme $3 \sim a$, à $4 \sim b$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ xx+yy :: r, s.$$
$$lx+ly,\ xy :: a, b$$

desquelles on tire ces deux Equations constitutives,

$$lsx-lsy \sim rxx+ryy.$$
$$lbx+lby \sim axy.$$

Dans la premiere $lsx-lsy \sim rxx+ryy$, on trouvera $y \sim \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}-\frac{ls}{2r}$, & dans la seconde $lbx+lby \sim axy$, on trouvera le même $y \sim \frac{lbx}{ax-lb}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}-\frac{ls}{2r} \sim \frac{lbx}{ax-lb}$, ou x^3-

$\frac{lsxx}{r} - \frac{2lbxx}{a} + \frac{2llbbx}{aa} + \frac{3llbsx}{ar} \sim \frac{2l^3bbs}{aar}$, ou $x^3 - \frac{38}{3}xx + \frac{392}{9}x \sim \frac{320}{9}$, dans laquelle on trouuera $x \sim 4$: & au lieu de $y \sim \frac{lbx}{ax-lb}$, on aura $y \sim 2$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

4.

2.

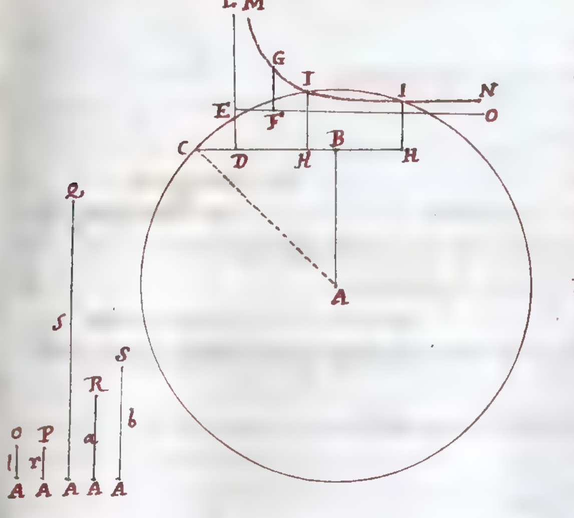
On trouuera aussy $x \sim \frac{1}{3}\sqrt{89} + \frac{13}{3}$, & par consequent $y \sim \frac{2}{3}\sqrt{89} - \frac{14}{3}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{1}{3}\sqrt{89} + \frac{13}{3}$.

$\frac{2}{3}\sqrt{89} - \frac{14}{3}$.

On connoitra aisément que la premiere Equation $lsx - lsy \sim rxx + ryy$, est Vn Lieu à Vn cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{llss}{2rr}}$, & dont Nous auons donné la description dans la Quest. IV. On connoitra aussy que la seconde Equation $lbx + lby \sim axy$, est Vn Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes, où le Rectangle commun est $\frac{llbb}{aa}$, dont Nous auons enseigné la construction dans la Quest. XIV. du Liure precedent. C'est pourquoy comme cette Question est Vn Probleme Solide, on la pourra resoudre en lignes tres élegamment en joignant ensemble ces deux Lieux, comme Vous alez Voir.

Ayant fait le triangle isoscele rectangle ABC, dont chacun des côtez soit égal à $\frac{ls}{2r}$, ou quatrieme proportionnel aux trois lignes 2AP, AQ, AO, faites la ligne CD, égale à $\frac{lb}{a}$, ou quatrieme proportionnelle aux trois lignes AR, AS, AO, & tirez par le point D, la droite DL, perpendiculaire à la ligne CD. Faites ED $\sim$ DC, & par le point E, tirez la droite EO, ~~égale &~~ perpendiculaire à la ligne DL. Enfin Construction geometrique.



$AO \sim l$.
$AP \sim r$.
$AQ \sim s$.
$AR \sim a$.
$AS \sim b$.
$AB \sim \frac{ls}{2r} \sim BC$.
$CD \sim \frac{lb}{a} \sim DE$.
$EF \sim \frac{lb}{a} \sim FG$.
$AC \sim \sqrt{\frac{llss}{2rr}}$.
$CH \sim x$.
$IH \sim y$.

ayant fait $EF \sim DE$, & ayant tiré par le point F, la droite FG, égale & perpendiculaire à la ligne EF, decriuez du centre A, par le point C, une circonference de cercle, & du centre E, par le point G, entre les asymptotes EL, EO, l'Hyperbole MGN, qui coupe icy la circonference du cercle au point I, duquel on tirera la droite HI, perpendiculaire à la ligne BC, & les deux lignes HC, HI, representeront les deux Nombres qu'on cherche, comme il a été demontré dans la Quest. IV. de ce Livre, & dans la Quest. XIV. du Livre precedent.

XI.

Trouuer deux Nombres, tels que les raisons de leur Somme à la somme de leurs quarrez, & à leur produit, soient données.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la somme $x+y$ soit à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez comme $3 \sim r$, à $10 \sim s$, & à leur produit xy, comme $2 \sim a$, à $4 \sim b$.

Canon. Si des quatre nombres donnez r, s, a, b, on ajoute & on ôte de la somme du Plan sous les deux moyens & du double du Plan sous les deux extrêmes, la Racine quarrée de l'excez du quarré du premier Plan sur le quarré du double du second, & qu'on diuise la somme & le reste par le double du Plan sous le premier & le troisieme; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx+ly,\ xx+yy :: r, s.$$

$$lx+ly,\ xy :: a, b.$$

desquelles on tire ces deux Equations,

$$lsx+lsy \sim rxx+ryy.$$

$$lbx+lby \sim axy.$$

Dans la premiere $lsx+lsy \sim rxx+ryy$, on trouuera $y \sim \frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx}$, & dans la seconde $lbx+lby \sim axy$, on trouuera le même $y \sim \frac{lbx}{ax-lb}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{lbx}{ax-lb} \sim \frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx}$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{as+2br+\sqrt{aass-4bbrr}}{2ar}$, & au lieu de $y \sim \frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx}$, ou de $y \sim \frac{lbx}{ax-lb}$, on aura $y \sim \frac{as+2br-\sqrt{aass-bbrr}}{2ar}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, $\frac{as+2br+\sqrt{aass-bbrr},\ as+2br-\sqrt{aass-bbrr}}{2ar}$.

Parceque nous auons supposé

$$r \sim 3.$$

$$s \sim 10.$$

$a \sim 3.$

$b \sim 4.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

La determination de cette Question, à l'égard des quatre Nombres donnez r, s, a, b, est que le Plan as doit être plus grand que le Plan $2br$, à cause du terme irrationnel $\sqrt{aass - 4bbrr}$, qui se rencontre dans chaque Nombre trouué, ou l'on a $aass$ ⊕ $4bbrr$, & par consequent as ⊕ $2br$. Determination.

XII.

Trouuer deux Nombres, tels que la raison de leur somme à la somme de leurs quarrez, & la raison de leur difference à leur produit, soient données.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la somme $x+y$ soit à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme $3 \sim r$, à $10 \sim s$, & dont la difference $x-y$, soit à leur produit xy, comme $1 \sim a$, à $4 \sim b$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$lx+ly,\ xx+yy :: r, s.$

$lx-ly,\ xy :: a, b.$

desquelles on tire ces deux Equations constitutiues,

$lsx+lsy \sim rxx+ryy.$

$lbx-lby \sim axy.$

Dans la premiere $lsx+lsy \sim rxx+ryy$, on trouuera $y \sim \frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}$, & dans la seconde $lbx-lby \sim axy$, on trouuera le même $y \sim \frac{lbx}{ax+lb}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{ls}{2r}+\sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx} \sim \frac{lbx}{ax+lb}$, ou $x^3 - \frac{lsxx}{r} + \frac{2lbxx}{a} + \frac{2llbbx}{aa} - \frac{2llbsx}{ar} \sim \frac{3l^3bbs}{aar}$, ou $x^3 + \frac{14xx}{3} + \frac{16x}{3} \sim 160$, dans laquelle on trouuera $x \sim 4$, & au lieu de $y \sim \frac{lbx}{ax+lb}$, ou de $y \sim \frac{4x}{x+4}$, on aura $y \sim 2$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

4.

2.

On connoit que la premiere Equation $lsx+lsy \sim rxx+ryy$, est Vn Lieu à Vn cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{llss}{2rr}}$, & dont Nous auons donné la construction dans la Quest. I. On connoit aussy que la deuxieme Equation, $lbx-lby \sim axy$, est Vn Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes, où le Rectangle commun est $\frac{llbb}{aa}$, dont Nous auons enseigné

la description dans la Quest. III. c'est pourquoy comme cette Question est un Probleme solide, on la pourra resoudre en lignes tres élegamment en joignant ensemble ces deux lieux, en cette sorte.

Construction Geometrique. Ayant fait le triangle isoscele rectangle ABC, dont chacun des côtez AB, BC, soit égal à $\frac{ls}{2r}$, ou quatrieme proportionnel aux trois lignes 2AP, AQ, AO, tirez par le point C, la droite CD, perpendiculaire à la ligne BC, & égale à $\frac{lb}{a}$, ou quatrieme proportionnelle aux trois lignes AR, AS, AO, & par le point D, la droite ED, perpendiculaire

AO ∾ l.
AP ∾ r.
AQ ∾ s.
AR ∾ a.
AS ∾ b.
AB ∾ $\frac{ls}{2r}$ ∾ BC.
CD ∾ $\frac{lb}{a}$ ∾ DE.
AC ∾ $\sqrt{\frac{llss}{2rr}}$.
HI ∾ x.
CI ∾ y.

& égale à la ligne CD, à laquelle vous tirerez par le point E, la parallele indefinie EF. Enfin decrivez du centre E, par le point C, entre les asymptotes EF, EDG, l'Hyperbole LCM, & du centre A, par le même point C, une circonference de cercle, qui coupe icy l'Hyperbole au point par où vous tirerez la droite HI, parallele à l'asymptote EG, & les lignes HI, CI, representeront les deux nombres qu'on cherche, comme il a été demontré dans la Quest. I. & III.

Comme nous n'avons pas resolu cette Question indefiniment, pour éviter un long calcul, nous ne pouvons savoir sa determination que par les deux lignes locales, lesquelles ne pouvant jamais se toucher, font connoitre que cette Question ne soufre aucune determination.

XIII.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur somme à la difference de leurs quarrez, & la raison de leur difference à leur produit, soient données.

On propose de trouver deux Nombres,

x.
y.

dont la difference $x-y$, soit à leur produit xy, comme $1 \sim a$, à $4 \sim b$, & dont la somme $x+y$ soit à la difference $xx-yy$, de leurs quarrez comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ajoute & on ôte le second diuisé par le double du premier, de la Racine quarrée de la somme du quotient qu'on aura en diuisant le Plan sous le second & le quatrieme par le Plan sous le premier & le troisieme, & du quarré du premier quotient; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$1x+1y,\ xx-yy :: r, s.$$
$$1x-1y,\ xy :: a, b.$$

desquelles on tire ces deux Equations constitutiues,

$$1sx+1sy \sim rxx-ryy.$$
$$1bx-1by \sim axy.$$

Dans la premiere $1sx+1sy \sim rxx-ryy$, ou $1s \sim rx-ry$, on trouuera $y \sim x-\frac{1s}{r}$, & la seconde $1bx-1by \sim axy$, se changera en celle-cy, $1bx-1bx+\frac{11bs}{r} \sim axx-\frac{1asx}{r}$, ou $xx-\frac{1sx}{r} \sim \frac{11bs}{ar}$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{1s}{2r}+\sqrt{\frac{11ss}{4rr}+\frac{11bs}{ar}}$, c'est pourquoy au lieu de $y \sim x-\frac{s}{r}$, on aura $y \sim \sqrt{\frac{11ss}{4rr}+\frac{11bs}{ar}}-\frac{1s}{2r}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\frac{ss}{4rr}+\frac{bs}{ar}}+\frac{s}{2r}.$$
$$\sqrt{\frac{ss}{4rr}+\frac{bs}{ar}}-\frac{s}{2r}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$
$$a \sim 1.$$
$$b \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

XIV.

Trouuer deux Nombres, tels que les raisons de leur somme à la difference de leurs quarrez, & à leur produit, soient données.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit à la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$, & à leur produit xy, comme $3 \sim a$, à $4 \sim b$.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ajoute & on ôte du quatrieme diuisé par le troisieme, le second diuisé par le double du premier, & qu'à la somme & au reste on ajoute la Racine quarrée de la somme des quarrez des deux quotiens precedens; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$1x+1y,\ xx-yy :: r, s.$$
$$1x+1y,\ xy :: a, b.$$

desquelles on tire ces deux Equations constitutiues,

$$1sx+1sy \backsim rxx-ryy.$$
$$1bx+1by \backsim axy.$$

Dans la premiere $1sx+1sy \backsim rxx-ryy$, on trouuera $y \backsim x-\frac{1s}{r}$, & dans la seconde $1bx+1by \backsim axy$, on trouuera le même $y \backsim \frac{1bx}{ax-1b}$; c'est pourquoy on aura cette Equation, $x-\frac{1s}{r} \backsim \frac{1bx}{ax-1b}$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{1b}{a}+\frac{1s}{2r}+\sqrt{\frac{11bb}{aa}+\frac{11ss}{4rr}}$, & au lieu de $y \backsim x-\frac{1s}{r}$, ou de $y \backsim \frac{1bx}{ax-1b}$, on aura $y \backsim \frac{1b}{a}-\frac{1s}{2r}+\sqrt{\frac{11bb}{aa}+\frac{11ss}{4rr}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2br+as+\sqrt{4bbrr+aass},\ 2br-as+\sqrt{4bbrr+aass}}{2ar}.$$

Parceque Nous auons supposé

$r \backsim 1$.

$s \backsim 2$.

$a \backsim 3$.

$b \backsim 4$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

XV.

Trouuer deux Nombres, tels que la raison de leur somme à la somme de leurs quarrez, & la raison de la difference de leurs quarrez à la somme des mêmes quarrez soient données.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$, soit à la somme $xx+yy$, de leurs quarrez, comme $3 \backsim r$, à $10 \backsim s$, en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit à la somme $xx+yy$ des mêmes quarrez, comme $3 \backsim a$, à $5 \backsim b$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ajoute & on ôte

le

le Plan des deux Moyens du Plan sous le second & le quatrieme, Canon.
& qu'on ajoute à la Somme & au reste la Racine quarrée de l'excez du quarré du second Plan sur le quarré du premier, & qu'on divise chaque Somme par le double du Plan sous les deux extrêmes des quatre Nombres donnez, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx+ly,\ xx+yy :: r,\ s.$$
$$xx-yy,\ xx+yy :: a,\ b.$$

desquelles on tire ces deux Equations constitutives,

$$lsx+lsy \backsim rxx+ryy.$$
$$bxx-byy \backsim axx+ayy.$$

Dans la premiere $lsx+lsy \backsim rxx+ryy$, on trouvera $y \backsim \frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}$, & dans la seconde $bxx-byy \backsim axx+ayy$, on trouvera le même $y \backsim \sqrt{\frac{bxx-axx}{a+b}}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx} \backsim \sqrt{\frac{bxx-axx}{a+b}}$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{bs+as+\sqrt{bbss-aass}}{2br}$, & au lieu de $y \backsim \frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}$, ou de $y \backsim \sqrt{\frac{bxx-axx}{a+b}}$, on aura $y \backsim \frac{bs-as+\sqrt{bbss-aass}}{2br}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bs+as+\sqrt{bbss-aass},\ bs-as+\sqrt{bbss-aass}}{2br}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \backsim 3.$$
$$s \backsim 10.$$
$$a \backsim 3.$$
$$b \backsim 5.$$

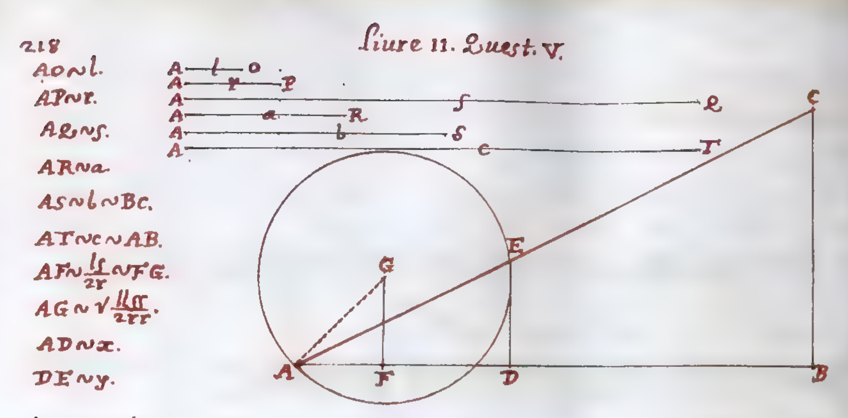
les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.

2.

On connoit aisément que la premiere Equation $lsx+lsy \backsim rxx+ryy$, ou $yy-\frac{lsy}{r} \backsim \frac{lsx}{r}-xx$, est un Lieu à un cercle donné, dont le rayon est $\sqrt{\frac{llss}{2rr}}$, & dont Nous avons donné la construction dans Quest. 1. On connoit aussy que la seconde Equation $bxx-byy \backsim axx+ayy$, ou $xx \backsim \frac{byy+ayy}{b-a}$ est un Lieu à la Ligne droite, car si on reduit cette Equation en proportion, on aura cette analogie, $b-a,\ b+a :: yy,\ xx$, & si à la place des deux premiers termes $b-a,\ b+a$, on met deux quarrez qui soient en même raison, comme $bb,\ cc$, on aura cette autre analogie, $bb,\ cc :: yy,\ xx$, & par consequent celle-cy, $b,\ c :: y,\ x$, d'où l'on tire cette Equation, $y \backsim \frac{bx}{c}$, qui est un Lieu à la Ligne droite, dont la construction sera telle.

Ayant tiré la ligne $AB \backsim c$, c'est à dire quatrieme proportionnelle



Construction geometrique.

à trois lignes, dont la premiere soit moyenne proportionnelle entre la somme & la difference des deux lignes données AR, AS, la deuxieme soit la somme des deux mêmes lignes AR, AS; & la troisieme soit AS, ou dont la premiere soit la difference des deux lignes données AR, AS, la seconde soit moyenne proportionnelle entre la somme & la difference des deux mêmes lignes AR, AS, & la troisieme soit AS; tirez par son extremité B, à un angle quelconque la ligne BC∾b, & menez la droite AC, qui sera le Lieu qu'on cherche: de sorte que si on y prend un point à discretion, comme E, & qu'on en tire la droite DE, parallele à la ligne BC, les deux lignes AD, DE, representeront les deux nombres qu'on cherche, & satisferont à la seconde condition de cette Question, qui est conforme à ce Lieu, c'est à dire que la difference ADq−DEq; sera à la somme ADq+DEq, comme la ligne donnée AR, à la ligne donnée AS.

Demonstration.

Car à cause des triangles semblables ABC, ADE, on a cette analogie, ADq, DEq :: ABq, BCq, c'est pourquoy si à la place des deux derniers termes ABq, BCq, on met les deux AS+AR, AS−AR, qui sont en même raison, par la construction, on aura cette autre analogie, ADq, DEq :: AS+AR, AS−AR, & en composant & en divisant, on aura ces deux autres,

ADq+DEq, DEq :: 2AS, AS−AR.

ADq−DEq, DEq :: 2AR, AS−AR.

desquelles on tire aisément cette troisieme analogie, ADq+DEq, ADq−DEq :: 2AS, 2AR, & par consequent celle-cy, ADq−DEq, ADq+DEq :: AR, AS. ce qu'il faloit demontrer.

Pour satisfaire à la premiere condition de la Question, on joindra ce Lieu à la ligne droite avec le Lieu precedent au cercle, en cette sorte.

Ayant pris sur la ligne AB, laquelle à cause du cercle, doit

être perpendiculaire à la ligne BC, la ligne AF, égale à $\frac{ls}{2r}$, ou quatrieme proportionnelle aux trois lignes 2AR, AQ, AO, élevez du point F, la droite FG, égale & perpendiculaire à la ligne AB, & decrivez du centre G, par le point A, une circonference de cercle, qui coupe icy la ligne Locale AC, au point E, duquel on tirera la droite DE, perpendiculaire à la ligne AB, & les deux lignes AD, DE, representeront les deux Nombres qu'on cherche: de sorte que non seulement la difference ADq−DEq, sera à la somme ADq+DEq, comme AR, à AS, mais encore la somme AOAD+AODE, sera à la somme ADq+DEq, comme AP, à AQ, comme il a été demontré dans la Quest. I.

XVI.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur difference à la somme de leurs quarrez & la raison de la somme de leurs quarrez à la difference des mêmes quarrez soient données.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que leur difference $x-y$, soit à la somme $xx+yy$, de leurs quarrez, comme $1\sim r$, à $10\sim s$, & que la somme $xx+yy$, de leurs quarrez soit à la difference $xx-yy$, des mêmes quarrez, comme $5\sim a$, à $3\sim b$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ôte de la somme du Plan sous les deux Moyens, & du Plan sous le second & le quatrieme, la Racine quarrée de l'excez du quarré du premier Plan sur le quarré du second, & qu'on ôte de cette Racine quarrée la difference des mêmes Plans; il viendra deux nombres, dont châcun étant divisé par le double du Plan sous le premier & le troisieme Nombre donné, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ xx+yy :: r, s.$$

$$xx+yy,\ xx-yy :: a, b.$$

desquelles on tire ces deux Equations constitutives,

$$lsx-lsy \sim rxx+ryy.$$

$$bxx+byy \sim axx-ayy.$$

Dans la premiere $lsx-lsy \sim rxx+ryy$, on trouvera $y \sim \sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}-\frac{ls}{2r}$, & dans la seconde $bxx+byy \sim axx-ayy$, on trouvera le même $y \sim \sqrt{\frac{axx-bxx}{a+b}}$. C'est pourquoy on aura cette Equation, $\sqrt{\frac{llss}{4rr}+\frac{lsx}{r}-xx}-\frac{ls}{2r} \sim \sqrt{\frac{axx-bxx}{a+b}}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{bs+as-\sqrt{aass-bbss}}{2ar}$, & au

lieu de $y \backsim \sqrt{\frac{bbss}{4rr} + \frac{bsx}{r} - xx} - \frac{bs}{2r}$, ou de $y \backsim \sqrt{\frac{axx - bxx}{a+b}}$, on aura $y \backsim \frac{bs - as + \sqrt{aass - bbss}}{2ar}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, $\frac{bs + as - \sqrt{aass - bbss},\ bs - as + \sqrt{aass - bbss}}{2ar}$.

Parceque Nous avons Supposé

$r \backsim 1.$

$s \backsim 10.$

$a \backsim 5.$

$b \backsim 3.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.

2.

On connoit aisément que la première Equation $bsx - bsy \backsim rxx + ryy$, ou $yy + \frac{bsy}{r} \backsim \frac{bsx}{r} - xx$ est Un Lieu à Un cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{bbss}{2rr}}$, & dont Nous avons enseigné la construction dans la Quest. IV. on connoit aussy facilement que la seconde Equation, $bxx + byy \backsim axx - ayy$, est Un Lieu à la Ligne droite, car si on la reduit en celle-cy, $xx \backsim \frac{ayy + byy}{a-b}$, on en tirera cette analogie, $a-b, a+b :: yy, xx$, c'est pourquoy si à la place des deux premiers termes $a-b, a+b$, on met à Volonté deux quarrez, qui soient en Même raison, comme bb, cc, on aura cette autre analogie, $bb, cc :: yy, xx$, & par consequent celle-cy, $b, c :: y, x$, d'où l'on tire cette Equation, $y \backsim \frac{bx}{c}$, qui est Un Lieu à la Ligne droite, dont la construction sera telle.

Construction Geometrique. Ayant tiré la ligne $AB \backsim c$, c'est à dire quatrieme proportionnelle à trois lignes, dont la premiere soit Moyenne proportionnelle entre la somme & la difference des deux lignes données AR, AS, & la troisieme soit AS, ou dont la premiere soit la difference des deux lignes données AR, AS, la seconde soit Moyenne proportionnelle entre la somme & la difference des deux Mêmes lignes AR, AS, & la troisieme soit AS, tirez par son extremité B, à Un angle quelconque, la ligne $BC \backsim b$, & menez la droite AC, qui sera le Lieu qu'on cherche, de sorte qui on y prend Un point à discretion, comme E, & qu'on en tire la droite DE, parallele à la ligne BC, les deux lignes AD, DE, representeront les deux Nombres qu'on cherche, & ils satisferont à la seconde condition de la Question, c'est à dire que la somme ADq + DEq, sera à la difference ADq − DEq, comme AR, à AS.

Demonstration. Car dans les triangles semblables ABC, ADE, on a cette analogie, ADq, DEq :: ABq, BCq, c'est pourquoy si à la place des deux derniers termes ABq, BCq, on met les deux AR+AS, AR−AS, qui

AO ∾ l.
AP ∾ r.
AQ ∾ s.
AR ∾ a.
AS ∾ b ∾ BC.
AT ∾ c ∾ AB.
AF ∾ $\frac{ls}{2r}$ ∾ FG.
AG ∾ $\sqrt{\frac{llss}{2rr}}$.
AC ∾ $\sqrt{bb+cc}$.
AD ∾ x.
DE ∾ y.
BD ∾ c−x.
AE ∾ $\sqrt{xx+yy}$.

sont en même raison, par la construction, on aura cette autre analogie, ADq, DEq :: AR+AS, AR−AS, & en composant & en diuisant, on aura ces deux autres,

ADq+DEq, DEq :: 2AR, AR−AS.
ADq−DEq, DEq :: 2AS, AR−AS.

desquelles on tire aisément celle-cy, ADq+DEq, ADq−DEq :: 2AR, 2AS, & par consequent celle-cy, ADq+DEq, ADq−DEq :: AR, AS. Ce qu'il faloit demontrer.

Pour satisfaire à la premiere condition de la Question, on joindra ce Lieu à la Ligne droite, auec le Lieu precedent au cercle, en cette sorte.

Ayant pris sur la ligne AB, la ligne AF, égale à $\frac{ls}{2r}$, ou quatrieme proportionnelle aux trois lignes 2AP, AQ, AO, abaissez du point F, la droite FG, égale & perpendiculaire à la ligne AF, & decriuez du centre G, par le point A, vne circonference de cercle, qui coupe icy la ligne Locale AC, au point E, par lequel on tirera la droite DE, perpendiculaire à la ligne AB, & les deux lignes AD, DE, representeront les deux Nombres qu'on cherche: de sorte que non seulement la somme ADq+DEq, sera à la difference ADq−DEq, comme la ligne AR, à la ligne AS, comme il vient d'être demontré, mais encore la difference AOAD−AODE, sera à la même somme ADq+DEq, comme AP, à AQ, comme il a été demontré dans la Quest. IV.

Acause du terme irrationnel $\sqrt{aass-bbss}$, qui se rencontre dans chacun des deux Nombres trouuez, on void aisément qu'afinque la solution soit rationnelle, il faut que le Nombre donné a, soit l'hypotenuse d'vn triangle rectangle, & b, l'vn des deux côtez.

XVII.

Trouver deux nombres, tels que les raisons de leur difference, & de la somme de leurs quarrez à la difference des mêmes quarrez, soient données.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que leur difference $x-y$ soit à la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $6 \sim s$, & que la somme $xx+yy$ de leurs quarrez soit à la difference $xx-yy$, des mêmes quarrez, comme $5 \sim a$, à $3 \sim b$.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ôte de la somme du Plan sous les deux Moyens & du Plan sous le second & le quatrieme, la Racine quarrée de l'excez du quarré du premier Plan sur le quarré du second, & qu'on divise le reste par le double du Plan sous le premier & le quatrieme; on aura le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du second Nombre donné divisé par le premier, on aura le plus petit.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$1x-1y,\ xx-yy :: r, s.$$

$$xx+yy,\ xx-yy :: a, b.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$1sx-1sy \sim rxx-ryy.$$

$$bxx+byy \sim axx-ayy.$$

Dans la premiere $1sx-1sy \sim rxx-ryy$, on trouvera $y \sim \frac{1s}{r}-x$, & dans la seconde $bxx+byy \sim axx-ayy$, on trouvera le même $y \sim \sqrt{\frac{axx-bxx}{a+b}}$, c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{1s}{r}-x \sim \sqrt{\frac{axx-bxx}{a+b}}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{as+bs-\sqrt{aass-bbss}}{2br}$, & au lieu de $y \sim \frac{1s}{r}-x$, ou de $y \sim \sqrt{\frac{axx-bxx}{a+b}}$, on aura $y \sim \frac{bs-as+\sqrt{aass-bbss}}{2br}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bs+as-\sqrt{aass-bbss},\ bs-as+\sqrt{aass-bbss}}{2br}.$$

Parceque Nous avons supposé

$r \sim 1$.

$s \sim 6$.

$a \sim 5$.

$b \sim 3$.

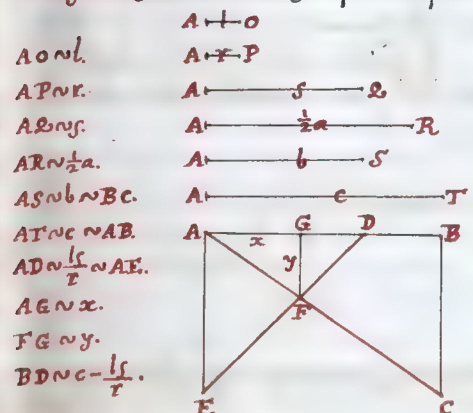
les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

On connoîtra aisément que la premiere Equation, $lsx - lsy \sim rxx - ryy$, est Vn Lieu à la Ligne droite, dont Nous auons enseigné la construction dans la Quest. II. & que la deuxieme Equation $bxx + byy \sim axx - ayy$, est aussy vn Lieu à la Ligne droite, dont Nous auons donné la description dans la Question precedente. C'est pourquoy pour resoudre cette Question geometriquement, on doit joindre ensemble ces deux Lieux, en cette sorte.

Ayant fait à Vn angle quelconque le triangle isoscele ADE, dont chacun des côtez AD, AE, soit égal à $\frac{ls}{r}$, ou quatrieme proportionnel aux trois lignes AP, AQ, AO, prenez sur le côté AB, la ligne $AD \sim c$, & menez par le point B, la droite BC, parallele à la ligne AE, & égale à la ligne AS. Tirez en suite la ligne Locale AC, qui rencontre icy la premiere DE, au point F, par où Vous tirerez la droite FG, parallele à la ligne AE, & les deux lignes AG, FG, representeront les deux Nombres qu'on cherche: de sorte que la difference AOAG - AOFG sera à la difference AGq - FGq, comme AP, à AQ, comme il a été demontré dans la Quest. II. & la somme AGq + FGq sera à la difference AGq - FGq, comme 2AR, à AS, comme il a été demontré dans la Question precedente. Construction geometrique.



XVIII.

Trouuer deux Nombres, tels que les raisons de leur somme à leur difference, & à la difference de leurs quarrez soient données.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$, soit à leur difference $x-y$, comme $3 \sim r$, à $1 \sim s$, & à la difference $xx - yy$, de leurs quarrez comme $1 \sim a$, à $2 \sim b$.

Si des quatre nombres donnez r, s, a, b, on multiplie la somme & la difference des deux premiers par le quatrieme, & qu'on diuise chaque produit par le double du Plan sous les deux moyens; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$x+y,\ x-y :: r, s.$$
$$bx+by,\ xx-yy :: a, b.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$sx+sy \backsim rx-ry.$$
$$bbx+bby \backsim axx-ayy.$$

Dans la premiere $sx+sy \backsim rx-ry$, on trouvera $y \backsim \frac{rx-sx}{r+s}$, & dans la seconde $bbx+bby \backsim axx-ayy$, on trouvera le même $y \backsim x-\frac{bb}{a}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{rx-sx}{r+s} \backsim x-\frac{bb}{a}$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{br+bs}{2as}$, & au lieu de $y \backsim \frac{rx-sx}{r+s}$, ou de $y \backsim x-\frac{bb}{a}$, on aura $y \backsim \frac{br-bs}{r+s}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{br+bs,\ br-bs}{r+s}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \backsim 3.$$
$$s \backsim 1.$$
$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

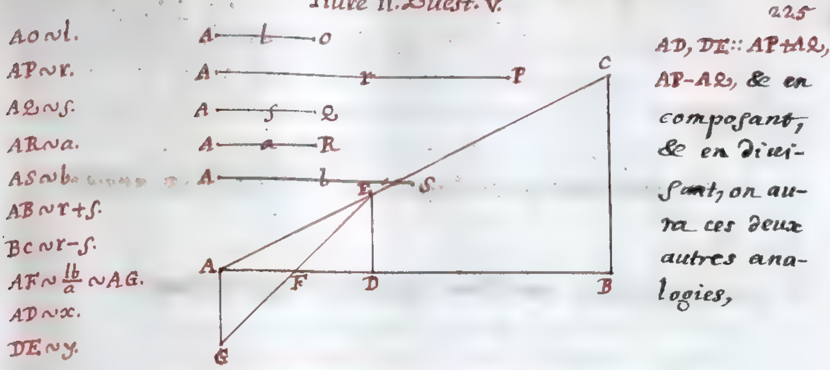
2.

A cause de $y \backsim x-\frac{bb}{a}$, on connoit que cette Equation est Un Lieu à la Ligne droite, dont Nous avons enseigné la construction dans la Quest. V. & à cause de $y \backsim \frac{rx-sx}{r+s}$, on connoit que cette Equation est aussy Un Lieu à la Ligne droite, dont la construction sera telle.

Construction geometrique. Ayant fait à Volonté l'angle ABC, dont Une ligne AB, soit égale à $r+s$, ou à la somme des deux lignes données AP, AQ, & l'autre ligne BC, soit égale à $r-s$, ou à la difference des deux mêmes lignes données AP, AQ, menez la droite AC, qui sera le Lieu qu'on cherche: de sorte que si on y prend Un point à discretion, comme E, & qu'on en tire la droite DE, parallele à la ligne BC, les deux lignes AD, DE, representeront les deux Nombres qu'on cherche, & ils satisferont à la premiere condition de cette Question, qui est conforme à ce Lieu, c'est à dire que leur somme AD+DE, sera à leur difference AD−DE, comme AP, à AQ.

Demonstration. Car dans les triangles semblables ABC, ADE, on a cette analogie, AD, DE :: AB, BC, & à cause de AB ∽ AP+AQ, & de BC ∽ AP−AQ, par la construction, on aura cette autre analogie,

AD,



AD, DE :: AP+AQ, AP−AQ, & en composant, & en divisant, on aura ces deux autres analogies,

AD, AD+DE :: AP+AQ, 2AP.
AD, AD−DE :: AP+AQ, 2AQ.

desquelles on tire cette troisieme analogie, AD+DE, AD−DE :: 2AP, 2AQ, & par consequent celle-cy, AD+DE, AD−DE :: AP, AQ. Ce qu'il faloit demontrer.

Pour satisfaire à la seconde condition de cette Question, on joindra ce Lieu à la Ligne droite, auec le Lieu precedent, qui est aussy à la Ligne droite, en cette sorte,

Ayant tiré par le point A, la droite AG, parallele à la ligne BC, & égale à $\frac{lb}{a}$, ou quatrieme proportionnelle aux trois lignes AR, AS, AO, prenez sur la ligne AB, la ligne AF, égale à la ligne AG, & tirez la ligne Locale FG, laquelle rencontre icy étant prolongée, la premiere AC, au point E, par où vous tirerez la droite DE, parallele à la ligne BC, & les deux lignes AD, DE, representeront les deux Nombres qu'on cherche: de sorte que non seulement la somme AD+DE, sera à la difference AD−DE, comme AP, à AQ, comme il vient d'être demontré, mais encore la somme AOAD + AODE, sera à la difference ADq−DEq, comme AR, à AS, comme il a été demontré dans la Quest. V.

XIX.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit à leur difference, & leur même difference à la difference de leurs quarez, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la somme x+y soit à leur difference x−y, comme 3 ∾ r, à 1 ∾ s, & dont la difference x−y soit à la difference xx−yy de leurs quarez, comme 1 ∾ a, à 6 ∾ b.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on Multiplie la somme & la difference des deux premiers, chacune par le quatrieme, & qu'on divise chaque produit par le double du Plan sous le premier & le troisieme; on aura les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$x+y, x-y :: r, s.$$
$$lx-ly, xx-yy :: a, b.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$sx+sy \sim rx-ry.$$
$$lbx-lby \sim axx-ayy.$$

Dans la premiere $sx+sy \sim rx-ry$, on trouvera $y \sim \frac{rx-sx}{r+s}$, & dans la seconde $lbx-lby \sim axx-ayy$, on trouvera le même $y \sim \frac{lb}{a}-x$. c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{rx-sx}{r+s} \sim \frac{lb}{a}-x$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{br+bs}{2ar}$, & au lieu de $y \sim \frac{rx-sx}{r+s}$, on aura $y \sim \frac{br-bs}{2ar}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{br+bs,\ br-bs}{2ar}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 3.$$
$$s \sim 1.$$
$$a \sim 1.$$
$$b \sim 6.$$

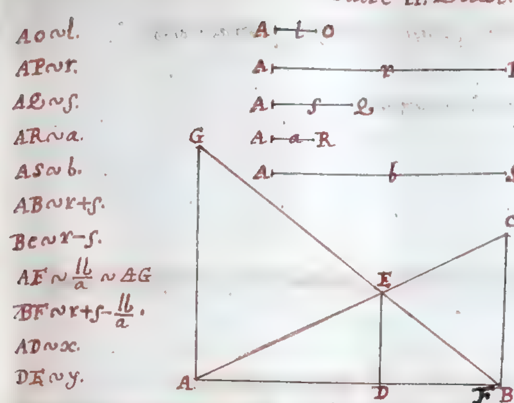
les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.

2.

Acause de $y \sim \frac{rx-sx}{r+s}$, on connoit que cette Equation est Un Lieu à la Ligne droite, dont Nous avons enseigné la construction dans la Question precedente: & à cause de $y \sim \frac{lb}{a}-x$, on connoit que cette Equation est Un autre Lieu à la Ligne droite, dont Nous avons donné la description dans la Quest. II. C'est pourquoy si l'on joint ensemble ces deux Lieux, on aura Une construction tres simple pour la solution geometrique de cette Question, en substituant des lignes à la place de l'Unité l, & des quatre Nombres donnez r, s, a, b, comme Vous alez Voir.

Construction geometrique. Ayant fait à Volonté l'angle ABC, dont Une ligne AB, soit égale à $r+s$, où à la somme des deux lignes données AP, AQ, & l'autre ligne BC, soit égale à $r-s$, ou à la difference des deux mêmes lignes AP, AQ, prenez sur la ligne AB, la ligne AF, égale à $\frac{lb}{a}$, ou quatrieme proportionnelle aux trois lignes AR, AS, AO, & tirez par le point A, la droite AG, parallele à la ligne BC, & égale



à la ligne AF. Enfin tirez les deux lignes Focales AC, FG, qui se coupent icy au point E, par lequel on tirera la droite DE, parallele à la ligne BC, & les deux lignes AD, DE, representeront les deux Nombres qu'on cherche: de sorte que la somme AD+DE, sera à la difference AD−DE, comme AP, à AQ, comme il a été demontré dans la Question precedente; & la difference AOAD−AODE, sera à la difference ADq−DEq, comme AR, à AS, comme il a été demontré dans la Quest. II.

XX.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit à leur difference, & à la somme de leurs quarrez, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$, soit à la somme $xx+yy$, de leurs quarrez comme 3∾a, à 10∾b, & à leur difference $x-y$, comme 3∾r, à 1∾s.

Si des quatre nombres donnez r, s, a, b, on multiplie la somme & la difference des deux premiers par le Plan des deux extrêmes, & qu'on diuise chaque Solide par le Solide sous le troisieme & la Somme des quarrez des deux premiers; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$x+y,\ x-y :: r,\ s.$$

$$lx+ly,\ xx+yy :: a,\ b.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$sx+sy \backsim rx-ry.$$

$$lbx+lby \backsim axx+ayy.$$

Dans la premiere $sx+sy \backsim rx-ry$, on trouuera $y \backsim \frac{rx-sx}{r+s}$, & dans la seconde $lbx+lby \backsim axx+ayy$, on trouuera le même $y \backsim \frac{lb}{2a} - \sqrt{\frac{llbb}{4aa} + \frac{lbx}{a} - xx}$: Ainsy on aura cette Equation, $\frac{lb}{2a} - \sqrt{\frac{llbb}{4aa} + \frac{lbx}{a} - xx} \backsim \frac{rx-sx}{r+s}$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{brr+brs}{arr+ass}$, & au lieu de $y \backsim \frac{rx-sx}{r+s}$, on aura $y \backsim \frac{brr-brs}{arr+ass}$.

Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels, $\frac{brr+brs,\ brr-brs}{arr+ass}$.

Parceque Nous auons supposé

$r \sim 3.$

$s \sim 1.$

$a \sim 3.$

$b \sim 10.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.

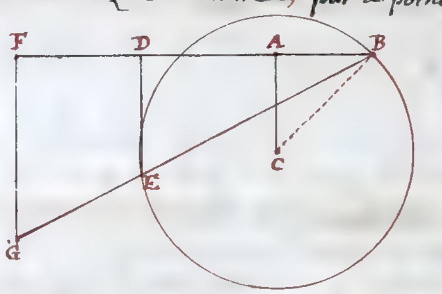
2.

On connoit aisément que la premiere Equation, $sx+sy \sim rx-ry$, est Vn Lieu à la ligne droite, dont Nous auons enseigné la construction dans la Question precedente. On connoit aussy facilement que la seconde Equation $lbx+lby \sim axx+ayy$, ou $yy-\frac{lby}{a} \sim \frac{lbx}{a}-xx$, est Vn Lieu à Vn cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{llbb}{2aa}}$, & dont Nous auons donné la description dans la Quest. 1. C'est pourquoy si l'on joint ensemble ces deux lieux, on aura Vne construction tres facile pour la solution geometrique de cette Question, comme Vous alez Voir.

Construction geometrique.

Ayant fait le triangle isoscele rectangle ABC, dont chacun des côtez AB, AC, soit égal à $\frac{lb}{2a}$, ou quatrieme proportionnel aux trois lignes données 2AR, 2AS, AO, ou aux trois AR, AS, AO, faites le triangle rectangle BFG, en sorte que le côté BF, soit égal à $r+s$, & FG, égal à $r-s$, & decriuez du centre C, par le point commun B,

$AO \sim l.$
$AP \sim r.$
$AQ \sim s.$
$AR \sim a.$
$AS \sim \frac{1}{2}b.$
$AB \sim \frac{lb}{2a} \sim AC.$
$BF \sim r+s.$
$FG \sim r-s.$
$BD \sim x.$
$DE \sim y.$



Vne circonference de cercle, qui coupe icy la ligne Locale BG, au point E, duquel on tirera la droite DE, perpendiculaire à la ligne BF; & les deux lignes BD, DE, representeront les deux Nombres qu'on cherche: de sorte que la somme BD+DE, sera à la difference BD-DE, comme AP, à AQ, comme il a été demontré dans la Question precedente, & la somme AOBD + AODE, sera à la somme BDq+DEq, comme AR, à AS, comme il a été demontré dans la Quest. 11.

XXI.

Trouuer deux Nombres, tels que les raisons de leur somme à leur difference, & de leur difference à leur produit, soient données.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit à leur difference $x-y$, comme $3 \backsim r$, à $1 \backsim s$, & dont la difference $x-y$, soit à leur produit xy, comme $1 \backsim a$, à $4 \backsim b$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on multiplie la somme & la difference des deux premiers par le troisieme, & que par chaque produit on diuise separément le double du Plan sous le second & le quatrieme; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$x+y,\ x-y :: r,\ s.$

$lx-ly,\ xy :: a,\ b.$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$sx+sy \backsim rx-ry.$

$lbx-lby \backsim axy.$

Dans la premiere $sx+sy \backsim rx-ry$, on trouuera $y \backsim \frac{rx-sx}{r+s}$, & la deuxieme $lbx-lby \backsim axy$, se changera en celle-cy, $lbx - \frac{lbrx+lbsx}{r+s} \backsim \frac{arxx-asxx}{r+s}$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{2bs}{ar-as}$, & au lieu de $y \backsim \frac{rx-sx}{r+s}$, on aura $y \backsim \frac{2bs}{ar+as}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{2bs}{ar-as}$.

$\frac{2bs}{ar+as}$,

Parceque nous auons supposé

$r \backsim 3$.

$s \backsim 1$.

$a \backsim 1$.

$b \backsim 4$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.

2.

XXII.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit à leur difference, & à leur produit, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit à leur difference $x-y$, comme $3 \sim r$, à $1 \sim s$, & à leur produit xy comme $3 \sim a$, à $4 \sim b$.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on multiplie la somme & à leur difference des deux premiers par le troisieme, & que par chaque produit on diuise separément le double du Plan sous les deux extrêmes, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$x+y,\ x-y :: r,\ s.$$

$$lx+ly,\ xy :: a,\ b.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$sx+sy \sim rx-ry.$$

$$lbx+lby \sim axy.$$

Dans la premiere $sx+sy \sim rx-ry$, on trouuera $y \sim \frac{rx-sx}{r+s}$, & dans la seconde $lbx+lby \sim axy$, on trouuera le même $y \sim \frac{lbx}{ax-lb}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{rx-sx}{r+s} \sim \frac{lbx}{ax-lb}$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{2br}{ar-as}$, & au lieu de $y \sim \frac{rx-sx}{r+s}$, ou de $y \sim \frac{lbx}{ax-lb}$, on aura $y \sim \frac{2br}{ar+as}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2br}{ar-as}.$$

$$\frac{2br}{ar+as}.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \sim 3.$$

$$s \sim 1.$$

$$a \sim 3.$$

$$b \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

XXIII.

Trouuer deux Nombres, tels que les raisons de leur difference à leur produit, & de la difference de leurs quarrez à la somme des mêmes quarrez, soient données.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit à la somme $xx+yy$ des mêmes quarrez, comme $3 \sim r$, à $5 \sim s$, & que leur difference $x-y$, soit à leur produit xy, comme $1 \sim a$, à $4 \sim b$.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ôte le quotient du quatrieme diuisé par le troisieme, du produit sous le même quotient &

la Racine quarrée de la somme des deux premiers divisée par leur difference; & si du même quotient on ôte le produit sous ce quotient & la Racine quarrée de la difference des deux premiers divisée par leur somme; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$xx-yy,\ xx+yy :: r, s.$$

$$lx-ly,\ xy :: a, b.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$sxx-syy \sim rxx+ryy.$$

$$lbx-lby \sim axy.$$

Dans la premiere $sxx-syy \sim rxx+ryy$, on trouvera $y \sim \sqrt{\frac{sxx-ryy}{s+r}}$, & dans la seconde $lbx-lby \sim axy$, on trouvera le même $y \sim \frac{lbx}{ax+lb}$. c'est pourquoy on aura cette Equation, $\sqrt{\frac{sxx-ryy}{s+r}} \sim \frac{lbx}{ax+lb}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \sqrt{\frac{bbs+bbr}{aas-aar}} - \frac{b}{a}$, & au lieu de $y \sim \sqrt{\frac{sxx-ryy}{s+r}}$, ou de $y \sim \frac{lbx}{ax+lb}$, on aura $y \sim \frac{b}{a} - \sqrt{\frac{bbs-bbr}{aas+aar}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\frac{bbs+bbr}{aas-aar}} - \frac{b}{a}.$$

$$\frac{b}{a} - \sqrt{\frac{bbs-bbr}{aas+aar}}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 3.$$

$$s \sim 5.$$

$$a \sim 1.$$

$$b \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.

2.

XXIV.

Trouver deux Nombres, tels que les raisons de la difference de leurs quarrez à la somme des mêmes quarrez, & de leur somme à leur produit, soient données.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit à la somme $xx+yy$, des mêmes quarrez, comme $3 \sim r$, à $5 \sim s$, & que leur somme $x+y$, soit à leur produit xy, comme $3 \sim a$, à $4 \sim b$.

Si des quatre nombres donnez r, s, a, b, on ajoute separément au quotient du quatrieme divisé par le troisieme, le Plan sous le même quotient & la Racine quarrée de la somme des deux premiers divisée Canon.

par leur difference, & le Plan sous le même quotient & la Racine quarrée de la difference des deux premiers divisée par leur somme, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$xx-yy,\ xx+yy :: r,\ s.$$
$$lx+ly,\ xy :: a,\ b.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$sxx-syy \sim rxx+ryy.$$
$$lbx+lby \sim axy.$$

Dans la premiere $sxx-syy \sim rxx+ryy$, on trouvera $y \sim \sqrt{\frac{sxx-rxx}{s+r}}$, & dans la seconde $lbx+lby \sim axy$, on trouvera le même $y \sim \frac{lbx}{ax-lb}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\sqrt{\frac{sxx-rxx}{s+r}} \sim \frac{lbx}{ax-lb}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{b}{a}+\sqrt{\frac{bbs+bbr}{aas-aar}}$, & au lieu de $y \sim \sqrt{\frac{sxx-rxx}{s+r}}$, ou de $y \sim \frac{lbx}{ax-lb}$, on aura $y \sim \frac{b}{a}+\sqrt{\frac{bbs-bbr}{aas+aar}}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{bbs+bbr}{aas-aar}}.$$
$$\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{bbs-bbr}{aas+aar}}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 3.$$
$$s \sim 5.$$
$$a \sim 3.$$
$$b \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

XXV.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit à leur produit, & la difference de leurs quarrez à leur même produit, en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

en sorte que la difference $xx-yy$, de leurs quarrez soit à leur produit xy, comme $3 \sim r$, à $2 \sim s$, & que leur difference $x-y$, soit à leur même produit xy, comme $1 \sim a$, à $4 \sim b$.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ôte le Plan sous le second & le double du quatrieme, de la Racine quarrée de la somme du quarré de ce même Plan & du quarré du Plan sous les deux extrêmes, & qu'on ajoute & qu'on ôte le reste du Plan sous

les deux extrêmes, & qu'on divise la somme & le reste double du Plan sous les deux moyens, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$xx-yy,\ xy :: r,\ s.$$
$$bx-by,\ xy :: a,\ b.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$sxx-syy \sim rxy.$$
$$bbx-bby \sim axy.$$

Dans la premiere $sxx-syy \sim rxy$, on trouvera $y \sim \frac{rx}{s} + \sqrt{\frac{rrxx}{4ss}+xx}$, & dans la seconde $bbx-bby \sim axy$, on trouvera le même $y \sim \frac{bbx}{ax+bb}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{rx}{s} + \sqrt{\frac{rrxx}{4ss}+xx} \sim \frac{bbx}{ax+bb}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{br-2bs+\sqrt{bbrr+4bbss}}{2as}$, & au lieu de $y \sim \frac{bbx}{ax+bb}$, ou de $y \sim \frac{rx}{s} + \sqrt{\frac{rrxx}{4ss}+xx}$; on aura $y \sim \frac{br+2bs-\sqrt{bbrr+4bbss}}{2as}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{br-2bs+\sqrt{bbrr+4bbss},\ br+2bs-\sqrt{bbrr+4bbss}}{2as}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 3.$$
$$s \sim 2.$$
$$a \sim 1.$$
$$b \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.

2.

XXVI.

Trouver deux Nombres, dont le produit soit à leur somme, & à la difference de leurs quarrez en raison donnée.

On propose de trouver deux nombres

$x.$

$y.$

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit à leur produit xy, comme $3 \sim r$, à $2 \sim s$, & que leur somme $x+y$ soit à leur même produit xy, comme $3 \sim a$, à $4 \sim b$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ajoute au Plan sous le Second & le double du quatrieme, la Racine quarée de la somme des quarrez du Plan precedent & du Plan sous les deux extrêmes, & qu'on ajoute & qu'on ôte de cette Nouvelle somme le Plan sous les deux extremes; il viendra deux Nombres, dont chacun étant divisé par le double du Plan sous les deux moyens, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$xx-yy,\ xy :: r,\ s.$$

$$lx+ly,\ xy :: a,\ b.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$sxx-syy \sim rxy.$$

$$lbx+lby \sim axy.$$

Dans la premiere $sxx-syy \sim rxy$, on trouuera $y \sim \sqrt{xx+\frac{rrxx}{4ss}}-\frac{rx}{2s}$, & dans la seconde $lbx+lby \sim axy$, on trouuera le même $y \sim \frac{lbx}{ax-lb}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\sqrt{xx+\frac{rrxx}{4ss}}-\frac{rx}{2s} \sim \frac{lbx}{ax-lb}$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{br+2bs+\sqrt{bbrr+4bbss}}{2as}$, & au lieu de $y \sim \frac{lbx}{ax-lb}$, on aura $y \sim \frac{2bs-br+\sqrt{bbrr+4bbss}}{2as}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2bs+br+\sqrt{bbrr+4bbss},\ 2bs-br+\sqrt{bbrr+4bbss}}{2as}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 3.$$

$$s \sim 2.$$

$$a \sim 3.$$

$$b \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

XXVII.

Trouuer deux Nombres, dont le produit soit à leur somme, & à la somme de leurs quarrez en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

en sorte que la somme $xx+yy$ de leurs quarrez soit à leur produit xy, comme $5 \sim r$, à $2 \sim s$, & que leur somme $x+y$, soit à leur même produit xy, comme $3 \sim a$, à $4 \sim b$.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ajoute & on ôte de la somme du Plan sous les deux extrêmes & du Plan sous le second & le double du quatrieme, la Racine quarrée de l'excez du quarré du premier Plan sur le quarré du second, & qu'on diuise la somme & le reste par le double du Plan sous les deux Moyens; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$xx+yy,\ xy :: r,\ s.$$

$$lx+ly,\ xy :: a,\ b.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$sxx + syy \sim rxy.$$
$$lbx + lby \sim axy.$$

Dans la premiere $sxx + syy \sim rxy$, on trouuera $y \sim \frac{rx}{2s} - \sqrt{\frac{rrxx}{4ss} - xx}$, & dans la seconde $lbx + lby \sim axy$, on trouuera le même $y \sim \frac{lbx}{ax - lb}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{rx}{2s} - \sqrt{\frac{rrxx}{4ss} - xx} \sim \frac{lbx}{ax - lb}$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{br + 2bs + \sqrt{bbrr - 4bbss}}{2as}$, & au lieu de $y \sim \frac{lbx}{ax - lb}$, on aura $y \sim \frac{br + 2bs - \sqrt{bbrr - 4bbss}}{2as}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{br + 2bs + \sqrt{bbrr - 4bbss},\ br + 2bs - \sqrt{bbrr - 4bbss}}{2as}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 5.$$
$$s \sim 2.$$
$$a \sim 3.$$
$$b \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

XXVIII.

Trouuer deux Nombres, dont le produit soit à leur difference, & à la somme de leurs quarrez en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

en sorte que la somme $xx + yy$ de leurs quarrez soit à leur produit xy, comme $5 \sim r$, à $2 \sim s$; & que leur difference $x - y$, soit à leur même produit xy, comme $1 \sim a$, à $4 \sim b$.

Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on ajoute & on ôte la difference entre le Plan sous les deux extrêmes & le Plan sous le second & le double du quatrieme, de la Racine quarrée de l'excez du quarré du premier Plan sur le quarré du second, & qu'on diuise la Somme & le reste par le double du Plan sous les deux moyens: on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$xx + yy,\ xy :: r, s.$$
$$lx - ly,\ xy :: a, b.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$sxx + syy \sim rxy.$$
$$lbx - lby \sim axy.$$

Dans la premiere $sxx+syy \sim rxy$, on trouvera $y \sim \frac{rx}{2s} - \sqrt{\frac{rrxx}{4ss} - xx}$, & dans la seconde $1bx - 1by \sim axy$, on trouvera le même $y \sim \frac{1bx}{ax-1b}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{rx}{2s} - \sqrt{\frac{rrxx}{4ss} - xx} \sim \frac{1bx}{ax-1b}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{\sqrt{bbrr-4bbss}+br-2bs}{2as}$, & au lieu de $y \sim \frac{1bx}{ax+1b}$, ou de $y \sim \frac{rx}{2s} - \sqrt{\frac{rrxx}{4ss} - xx}$, on aura $y \sim \frac{\sqrt{bbrr-4bbss}-br+2bs}{2as}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{\sqrt{bbrr-4bbss}+br-2bs,\ \sqrt{bbrr-4bbss}-br+2bs}{2as}.$$

Parceque Nous avons supposé

$r \sim 5.$

$s \sim 2.$

$a \sim 1.$

$b \sim 4.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

XXIX.

Trouver deux Nombres, dont le produit soit à leur somme & à leur difference, en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont le produit xy, soit à leur somme $x+y$, comme $4 \sim r$, à $3 \sim s$, & à leur difference $x-y$, comme $4 \sim a$, à $1 \sim b$.

Canon. Si des quatre Nombres donnez r, s, a, b, on divise separément le double du Plan sous le premier & le troisieme par la somme & par la difference du Plan sous les deux Moyens & du Plan sous les deux extrêmes ; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$xy,\ 1x+1y :: r,\ s.$

$xy,\ 1x-1y :: a,\ b.$

& par consequent ces deux Equations, constitutives,

$sxy \sim 1rx+1ry.$

$bxy \sim 1ax-1ay.$

Dans la premiere $sxy \sim 1rx+1ry$, on trouvera $y \sim \frac{1rx}{sx-1r}$, & dans la seconde $bxy \sim 1ax-1ay$, on trouvera le même $y \sim \frac{1ax}{bx+1a}$: c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{1rx}{sx-1r} \sim \frac{1ax}{bx+1a}$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{2ar}{as-br}$, & au lieu de $y \sim \frac{1rx}{sx-1r}$, ou de $y \sim \frac{1ax}{bx+1a}$, on aura $y \sim \frac{2ar}{as+br}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2ar}{as-br}.$$

$$\frac{2ar}{as+br}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 4.$$

$$b \sim 1.$$

$$r \sim 4.$$

$$s \sim 3.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

XXX.

Trouver deux nombres, dont le produit soit à la somme & à la difference de leurs quarrez, en raison donnée.

On propose de trouver deux nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont le produit xy soit à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme $2 \sim r$, à $5 \sim s$, & à la difference $xx-yy$ des mêmes quarrez, comme $2 \sim a$, a $3 \sim b$.

Pour le canon de cette Question, nous dirons qu'elle est impossible, parcequ'elle est trop determinée, comme vous alez voir. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$xy, xx+yy :: r, s.$$

$$xy, xx-yy :: a, b.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$sxy \sim rxx+ryy.$$

$$bxy \sim axx-ayy.$$

Dans la premiere $sxy \sim rxx+ryy$, on trouvera $x \sim \frac{sy}{2r} + \sqrt{\frac{ssyy}{4rr} - yy}$, & dans la seconde $bxy \sim axx-ayy$, on trouvera le même $x \sim \frac{by}{2a} + \sqrt{\frac{bbyy}{4aa} + yy}$; c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{sy}{2r} + \sqrt{\frac{ssyy}{4rr} - yy} \sim \frac{by}{2a} + \sqrt{\frac{bbyy}{4aa} + yy}$, laquelle étant multipliée par $2ar$, on aura cette autre Equation, $asy + a\sqrt{ssyy - 4rryy} \sim by + r\sqrt{bbyy + 4aayy}$, laquelle étant divisée par y, on aura celle-cy, $as + a\sqrt{ss-4rr} \sim br + r\sqrt{bb+4aa}$, où l'on void que la Question n'est possible, que quand $as + a\sqrt{ss-4rr}$ est égal à $br + r\sqrt{bb+4aa}$.

A l'occasion de ces Questions, nous ajouterons encore icy les suivantes, bien qu'elles soient deja comprises dans les precedentes.

XXXI.

Trouuer deux nombres, dont la difference soit égale à leur produit.

On propose de trouuer deux nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit égale à leur produit xy.

Canon. Si on diuise Un nombre quelconque par ce même nombre augmenté de l'Vnité, le quotient & ce nombre pris à Volonté donneront les deux nombres qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$$1x-1y \backsim xy.$$

dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{1x}{x+1}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$

$$\frac{x}{x+1}.$$

Si l'on suppose

$$x \backsim 3.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$3.$$

$$\frac{3}{4}.$$

& si l'on suppose

$$x \backsim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$2.$$

$$\frac{2}{3}.$$

Pour auoir Une solution plus generale, mettez

$$\frac{x,\, y}{z}.$$

pour les deux nombres qu'on cherche, & selon la condition de la Question, Vous aurez en entiers cette Equation constitutiue,

$$xz-yz \backsim xy.$$

Autre Solution. dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{xy}{x-y}$: & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{xx-xy,\, xy-yy}{xy}.$$

Si l'on suppose

$$x \backsim 2.$$

$$y \backsim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{2,\, 1}{2}.$$

& si l'on suppose

$x \sim 3.$

$y \sim 2.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{1}{2}.$

$\frac{1}{3}.$

On tire de cette seconde solution, le canon suivant;

Si on divise le produit de deux nombres quelconques par leur difference, & que par le quotient on divise chacun des deux mêmes nombres, on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Comme cette Question est indeterminée, on connoit qu'elle est un Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes, à cause de $y \sim \frac{lx}{x+l}$, ou de $xy+ly \sim lx$, & l'on pourra resoudre en lignes cette Question, en substituant la ligne AB, à la place de l'Unité l, & en decrivant l'Hyperbole en cette sorte.

Faites à volonté sur la ligne $AB \sim l$, le Rhombe ABCD, & par son angle C, decrivez du centre A, au dedans des asymptotes AB, AD, prolongées autant qu'il en sera besoin, l'Hyperbole LCM, qui sera le Lieu qu'on cherche: de sorte que si on y prend au dela du point C, vers M, un point à volonté, comme G, par lequel on tire la droite GE, parallele à l'asymptote AD, les deux lignes FC, FG, qui se font par la rencontre des deux lignes prolongées CD, EG, representeront les deux nombres qu'on cherche, c'est à dire que leur Rectangle CFG, sera égal au Rectangle sous leur difference CF − FG, & l'Unité AB, savoir au Rectangle ABCF − ABFG. Construction geometrique.

$AB \sim l \sim BC.$
$CF \sim x.$
$FG \sim y.$

Car puisque par la proprieté des asymptotes, on a cette analogie, BC, EG :: AE, AB, ou EF, EG :: DF, CD, en divisant on aura celle-cy, FG, EG :: CF, CD, & en permutant on aura celle-cy, GF, CF :: EG, CD, & encore en divisant, on aura celle-cy, CF − GF, CF :: CD − EG, CD, ou CF − GF, CF :: FG, AB, & par consequent cette égalité, CFG ∼ ABCF − ABGF. Ce qu'il faloit demontrer. Demonstration.

On peut avoir une solution encore plus generale, parcequ'elle ne soufrira aucune determination, en mettant

$x, \frac{x+y}{2}.$

pour les deux nombres qu'on cherche, & selon la condition de la Question, on aura en entiers, cette Equation constitutive,

$$yz \sim xx + xy.$$

dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{xx}{y} + x$. & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Troisieme Solution.

$$\frac{xy,\ yy+xy}{xx+xy}.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 1.$$
$$y \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{1}{2}.$$
$$\frac{2}{3}.$$

& si l'on suppose

$$x \sim 2.$$
$$y \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{3}{5}.$$
$$1.\frac{1}{2}.$$

On tire de cette troisieme solution, le canon suiuant;

Canon. Si on diuise le produit de deux Nombres quelconques, & le produit sous le second Nombre & leur somme, chacun par le produit sous le premier Nombre & leur même somme; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

XXXII.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit égale à leur produit.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la somme $x+y$, soit égale à leur produit xy.

Canon. Si on diuise un Nombre quelconque plus grand que l'Vnité, par l'excez de ce Nombre sur l'Vnité, le quotient & ce Nombre pris à Volonté, donneront les deux Nombres qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$$1x + 1y \sim xy.$$

dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1x}{x-1}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x$$
$$\frac{x}{x-1}.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 3.$$

les

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

3.

$1\frac{1}{2}$.

& si l'on suppose

$x \backsim 4$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.

$1\frac{1}{3}$.

Comme cette Question est indeterminée, & qu'elle est vn Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes, à cause de $y \backsim \frac{lx}{x-l}$, ou de $xy - ly \backsim lx$, on pourra resoudre en lignes cette Question, en substituant la ligne AB, à la place de l'Vnité l, & en decriuant l'Hyperbole en cette sorte.

Ayant fait comme dans la Question precedente, le Rhombe ABCD, & ayant decrit du centre A, par le point C, entre les asymptotes prolongées AB, AD, l'Hyperbole LCM, prolongez AB, en O, en sorte que la ligne AO, soit égale à la ligne AB, & par le point O, tirez la droite OE, parallele & égale à la ligne AD, & par le point E, la ligne indefinie EF, parallele à la ligne OB. Si vous prenez sur cette ligne EF, vn point à discretion, comme F, en sorte que neanmoins la ligne EF, soit plus grande que la ligne EO, & que par le point F, on tire la droite FG, parallele à la ligne EO, & terminée en G, par l'Hyperbole LCM, les deux lignes EF, FG, representeront les deux Nombres qu'on cherche, c'est à dire que leur Rectangle EFG, sera égal au Rectangle ABEF + ABFG, sous leur somme EF + FG, & la ligne AB, qui represente l'Vnité. Construction geometrique.

$AB \backsim l$.
$BC \backsim l$.
$CD \backsim l$.
$AD \backsim l$.
$AO \backsim l$.
$OE \backsim l$.
$EF \backsim x$.
$FG \backsim y$.

Car par la Nature de l'Hyperbole, on a cette analogie, AI, AB :: BC, IG, c'est pourquoy en composant on aura celle-cy, OI, ou EF, AB :: FG, IG, & en permutant on aura celle-cy, EF, FG :: AB, IG, & en composant on aura celle-cy, EF, EF + FG :: AB, FG, & par consequent cette égalité, EFG $\backsim$ ABEF + ABFG. Ce qu'il faloit demontrer. Demonstration.

Si vous voulez vne Solution plus generale, mettez

$\frac{x, y}{2}$.

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon la condition de la Question, Vous aurez cette Equation,

$$xz+yz \sim xy.$$

dans laquelle Vous trouuerez $z \sim \frac{xy}{x+y}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{xx+xy,\ yy+xy}{xy}.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 1.$$
$$y \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$3.$$
$$1\tfrac{1}{2}.$$

& si l'on suppose

$$x \sim 2.$$
$$y \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\tfrac{2}{3}.$$
$$2\tfrac{1}{2}.$$

On tire de cette seconde solution, le Canon suiuant;

Canon.

Si on multiplie deux nombres quelconques, châcun par leur somme, & qu'on diuise chaque produit par le produit des deux mêmes Nombres, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Si Vous voulez Vne troisieme solution, mettez

$$\frac{x+y,\ x-y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon la condition de la Question, Vous aurez en entiers cette Equation constitutiue,

$$2xz \sim xx-yy.$$

dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{xx-yy}{2x}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Troisieme Solution.

$$\frac{2xx+2xy,\ 2xx-2xy}{xx-yy}.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 2.$$
$$y \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$4.$$
$$1\tfrac{1}{3}.$$

& si l'on suppose

$$x \sim 3.$$
$$y \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$6.$$
$$1\tfrac{1}{5}.$$

mais si l'on suppose

$$x \sim 3.$$
$$y \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$3.$$
$$1\tfrac{1}{2}.$$

On tire de cette troisieme solution, ce troisieme Canon.

Si on diuise la somme & la difference de deux Nombres quelconques, chacune par le quotient qui viendra en diuisant le produit de cette somme & de cette difference par le double du plus grand nombre; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Pour auoir une quatrieme solution, mettez

$$x,\ \frac{y-x}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon la condition de la Question, vous aurez en entiers cette Equation constitutiue,

$$yz \sim xy - xx.$$

dans laquelle on trouuera $z \sim x - \frac{xx}{y}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{xy,\ yy-xy}{xy-xx}.$$

Quatrieme Solution.

Si l'on suppose

$$x \sim 1.$$
$$y \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$1\tfrac{1}{2}.$$
$$3.$$

& si l'on suppose

$$x \sim 2.$$
$$y \sim 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$1\tfrac{2}{3}.$$
$$2\tfrac{1}{2}.$$

On tire de cette quatrieme solution, ce quatrieme Canon.

Si de deux Nombres inegaux on multiplie le plus petit & leur difference par le plus grand, & qu'on diuise chaque produit par le Plan sous le plus petit & leur difference; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

XXXIII.

Trouver deux Nombres, dont le produit soit égal à la difference de leurs quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

dont le produit xy, soit égal à la difference $xx-yy$, de leurs quarrez.

Canon. Le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & si on ôte la moitié de ce Nombre de la Racine quarrée de la somme des quarrez de ce même Nombre & de sa moitié, on aura le plus petit.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$xy \sim xx-yy$.

dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{1}{2}\sqrt{5xx}-\frac{1}{2}x$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

x.

$\frac{1}{2}\sqrt{5xx}-\frac{1}{2}x$.

Si l'on suppose

$x \sim 2$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

2.

$\sqrt{5}-1$.

& si l'on suppose

$x \sim 4$.

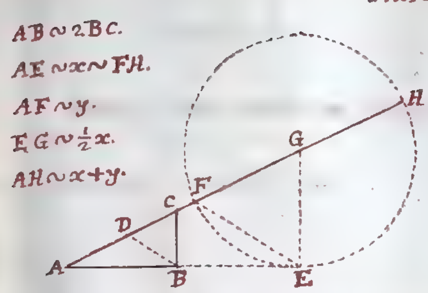
les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

$\sqrt{20}-2$.

qui sont proportionnels aux deux precedens, & ils le seront toujours, quelque valeur que l'on donne à la quantité indeterminée x, comme il est aisé de voir par la solution geometrique de cette Question, qui est un Lieu à la ligne droite, dont la construction sera telle.

Construction geometrique. Faites à volonté le triangle rectangle ABC, dont la base AB soit double de la hauteur BC, & l'hypotenuse AC, étant prolongée autant que l'on voudra, sera le Lieu qu'on cherche: de sorte que si on en retranche la ligne CD, égale à la hauteur BC, & qu'on joigne la droite BD, pour luy tirer par le point F, pris à discretion sur la ligne Locale AC, la parallele EF, terminée en E, par la base AB, prolongée, les deux lignes AE, AF,



representeront les deux Nombres qu'on cherche, c'est à dire que leur Rectangle EAF, sera égal à la difference AEq−AFq, de leurs quarez.

Demonstration. Car si on éleuë du point E, la droite EG, perpendiculaire à la ligne AE, & terminée en G, par la ligne Locale AF, prolongée, & que de ce point G, comme centre, on decriue par le point E, Vne circonference de cercle, elle touchera la ligne AE, au point E, & elle passera par le point F, à cause du triangle isoscele EGF, semblable au triangle BCD, qui a été fait isoscele, ce qui fait que comme la ligne AB, est double de la ligne BC, par la construction, aussy la ligne AE, est double de la ligne EG, ou GF, ou GH, à cause des triangles semblables ABC, AEG, & que par consequent la ligne AE, est égale au diametre FH.

Cela étant supposé, on connoit par 36. 3. que le quarré AE, est égal au Rectangle HAF, & par 17. 6. on aura cette analogie, AF, AE :: AE, AH, ou AF+AE, à cause de FH ∾ AE, & en diuisant on aura celle-cy, AF−AE, AE :: AF, AF+AE, & par consequent cette égalité, AFq−AEq ∾ EAF. Ce qu'il faloit demontrer.

Parceque la difference des quarez de deux quantitez est toujours égale au Rectangle sous leur somme & leur difference, il est aisé de conclure que cette Question est la même que celle-cy;

Trouuer deux Nombres, dont le produit soit égal au produit sous leur somme & leur difference.

Nous n'ajouterons pas icy la Question suiuante;

Trouuer deux Nombres, dont le produit soit égal à la somme de leurs quarez.

parcequ'elle est impossible, comme il est aisé à demontrer.

XXXIV.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à la difference de leurs quarez.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$, ou $1x-1y$, soit égale à la difference $xx-yy$ de leurs quarez.

Canon. Si on partage l'Vnité en deux nombres quelconques, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$$1x - 1y \backsim xx - yy.$$

dans laquelle on trouuera $y \backsim 1 - x$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$
$$1 - x.$$

Si l'on suppose

$$x \backsim \frac{1}{3}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1}{3}.$$
$$\frac{2}{3}.$$

& si l'on suppose

$$x \backsim \frac{1}{4}.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1}{4}.$$
$$\frac{3}{4}.$$

Si vous voulez vne solution plus generale, mettez

$$\frac{x,\ y}{z}.$$

pour les deux nombres qu'on cherche, & selon la cõdition de la Question, vous aurez en entiers, cette Equation,

$$xz - yz \backsim xx - yy.$$

dans laquelle on trouuera $z \backsim x + y$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution. $$\frac{x,\ y}{x+y}.$$

Si l'on suppose

$$x \backsim 2.$$
$$y \backsim 3.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2,\ 3}{5}.$$

& si l'on suppose

$$x \backsim 3.$$
$$y \backsim 4.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,\ 4}{7}.$$

On tire de cette seconde solution, le Canon suiuant,

Canon. Si on diuise deux Nombres quelconques, chacun par leur somme, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Comme cette Question est un Lieu à la Ligne droite, qui est égale à l'Vnité, on la pourra resoudre en lignes en cette sorte.

Ayant pris à volonté la ligne AB, pour l'Vnité, divisez-la en deux également au point C, & entre les poins B, C, prenez un point à volonté, comme D, & les deux lignes AD, BD, representeront les deux Nombres qu'on cherche: de sorte que si l'on fait $DE \backsim DB$, afin que AE, soit la difference des Nombres AD, BD, la difference $ADq - BDq$ des quarrez de ces deux nombres sera égale au Rectangle BAE, sous leur difference AE, & l'Vnité AB. Construction Geometrique.

$AB \backsim 1.$
$AC \backsim \frac{1}{2} 1 \backsim BC.$
$AD \backsim x.$
$BD \backsim y \backsim DE.$
$AE \backsim x - y.$
$BE \backsim 2y.$

B, D, E, C, A

Car puisque la ligne BE, est divisée en deux également au point D, & que la ligne AE, luy est ajoutée, on aura par 6. 2. cette égalité, $BAE + DEq$, ou $BAE + BDq \backsim ADq$, & ôtant BDq, on aura celle-cy, $BAE \backsim ADq - BDq$. Ce qu'il faloit demontrer. Demonstration.

XXXV.

Trouver deux Nombres, dont la somme soit égale à la difference de leurs quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$
$y.$

dont la somme $x + y$ soit égale à la difference $xx - yy$, de leurs quarrez.

Deux Nombres quelconques, dont la difference est égale à l'Vnité, sont les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$$1x + 1y \backsim xx - yy.$$

dans laquelle on trouvera $y \backsim x - 1$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$x.$
$x - 1.$

Si l'on suppose

$$x \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

2.
1.

& si l'on suppose

$$x \backsim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

3.
2.

Pour avoir une solution plus generale, mettez

$$\frac{x, y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon la condition de la Question, vous aurez en entiers cette Equation constitutive,

$$xz + yz \sim xx - yy.$$

dans laquelle on trouvera $z \sim x - y$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{x, y}{x - y}.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 3.$$
$$y \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

3.
2.

& si l'on suppose

$$x \sim 4.$$
$$y \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

2.
1.

Mais si l'on suppose

$$x \sim 8.$$
$$y \sim 6.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.
3.

On tire de cette seconde Solution, le Canon suivant;

Canon.

Si on divise deux Nombres quelconques, chacun par leur difference, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Comme cette Question est un Lieu à la Ligne droite plus grande que l'Unité, on pourra la resoudre en lignes, en cette sorte.

Construction geometrique.

Ayant pris à volonté la ligne AB, pour l'Unité, prolongez-la indefiniment au dela de B, & y prenez un point à discretion, comme C, & les deux lignes AC, BC, representeront les deux Nombres qu'on cherche: de sorte que si l'on fait $CD \sim BC$, afinque la ligne AD, soit la somme des Nombres AC, BC, la difference $ACq - BCq$ des quarrez de ces deux Nombres

$AB \sim 1.$
$AC \sim x.$
$BC \sim y \sim CD.$
$BD \sim 2y.$

AC, BC,

AC, BC, sera égale au Rectangle DAB, sous leur somme AD, & l'Vnité AB.

Car puisque la ligne BD, se trouue coupée en deux également au point C, & que la ligne AB, luy est ajoutée, on aura par 6. 2. cette égalité $DAB + BCq \sim ACq$; c'est pourquoy en ôtant BCq, on aura celle-cy, $DAB \sim ACq - BCq$. Ce qu'il faloit demontrer. Demonstration.

XXXVI.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit égale à la somme de leurs quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit égale à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez.

Si on multiplie deux Nombres quelconques, chacun par leur somme, & que par la somme de leurs quarrez on diuise chaque produit, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$$lx + ly \sim xx + yy.$$

Dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}l - \sqrt{\frac{1}{4}ll + lx - xx}$: & pour auoir vne solution rationnelle, il faudra égaler au quarré cette Puissance, $\frac{1}{4}ll + lx - xx$, pour le côté duquel prenant $\frac{1}{2}l \ldots \frac{ax}{b}$, on trouuera $x \sim \frac{bb+ab}{aa+bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bb+ab,\ aa+ab}{aa+bb}.$$

Si l'on suppose

$a \sim 1$.

$b \sim 2$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{6,\ 3}{5}.$$

& si l'on suppose

$a \sim 3$.

$b \sim 4$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur

$$\frac{28,\ 21}{25}.$$

On trouuera aussy $y \sim \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + lx - xx}$, & si on égale la Puissance $\frac{1}{4}ll + lx - xx$ au quarré $\frac{1}{4}ll - \frac{lax}{b} + \frac{aaxx}{bb}$, dont le côté soit $\frac{1}{2}l - \frac{ax}{b}$, on trouuera que les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bb+ab,\ bb-ab}{aa+bb}.$$ Seconde Solution.

Si l'on suppose

$a \sim 3$.

$b \sim 4$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{28, 4}{25}$.

& si l'on suppose

$a \sim 1$.

$b \sim 2$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{6, 2}{5}$.

On tire de cette seconde Solution, le Canon suivant;

Canon. Si on multiplie la somme & la difference des deux Nombres quelconques, chacune par le plus grand, & qu'on divise chaque produit par la somme des quarrez de ces deux mêmes nombres; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

L'Equation constitutive $lx + ly \sim xx + yy$, fait connoitre que cette Question est un Lieu à un cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{1}{2}ll}$, & dont la description sera telle.

Construction geometrique. Ayant pris à volonté la ligne AB, pour l'Unité, divisez-la en deux également au point C, & luy tirez par ce point C, la perpendiculaire CD, égale à AC, ou à BC, pour decrire du centre C, par les poins A, B, une circonference de cercle, qui sera le Lieu qu'on cherche: de sorte que si on y prend au dessous de la ligne AB, un point à volonté, comme E, duquel on tire la droite EF, perpendiculaire à la ligne AB,

$AB \sim l$.
$AC \sim \frac{1}{2}l$.
$BC \sim \frac{1}{2}l$.
$CD \sim \frac{1}{2}l$.
$DB \sim \sqrt{\frac{1}{2}ll}$.
$DL \sim \sqrt{\frac{1}{2}ll}$.
$DM \sim \sqrt{\frac{1}{2}ll}$.
$LM \sim \sqrt{2ll}$.
$BF \sim x$.
$EF \sim y$.
$AF \sim l - x$.

les deux lignes BF, EF, representeront les deux Nombres qu'on cherche, c'est à dire que le Rectangle ABBF + ABEF, sous leur somme BF + EF, & l'Unité AB, est égal à la somme BFq + EFq, de leurs quarrez.

Demonstration. Car si on prolonge la ligne EF, jusqu'à la circonference du cercle en G, on connoitra comme dans la Quest. I. que la ligne FG, est égale à la difference des deux EF, AB, c'est pourquoy on pourra faire cette analogie, AF, FG :: AF, EF - AB, & si à la place des deux premiers termes AF, FG, on met les deux EF, BF, qui sont en même raison, par la Nature du cercle, on aura cette autre

analogie, EF, BF :: AF, EF−AB, & par consequent cette égalité, EFq−ABEF ∾ AFBF, ou EFq−ABEF ∾ ABBF−BFq, à cause de AF ∾ AB−BF, & ajoutant ABEF+BFq, on aura cette dermiere égalité, ABBF+ABEF ∾ EFq+BFq. Ce qu'il faloit demontrer.

XXXVII.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à la somme de leurs quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$, soit égale à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez.

Si on diuise deux Nombres quelconques, chacun par leur difference, & qu'on diuise chaque produit par la somme des quarrez des mêmes Nombres; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$lx-ly \sim xx+yy$.

dans laquelle on trouuera $y \sim \sqrt{\frac{1}{4}ll+lx-xx} - \frac{1}{2}l$: & pour auoir Vne rationnelle, il faudra égaler au quarré cette Puissance $\frac{1}{4}ll+lx-xx$, pour le côté duquel prenant $\frac{1}{2}l+\frac{ax}{b}$, on trouuera $x \sim \frac{bb-ab}{aa+bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{bb-ab,\ ab-aa}{aa+bb}$.

Si l'on suppose

$a \sim 1$.

$b \sim 2$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{2,\ 1}{5}$.

& si l'on suppose

$a \sim 3$.

$b \sim 4$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{4,\ 3}{25}$.

Pour auoir Vne autre solution, au lieu de prendre $\frac{1}{2}l+\frac{ax}{b}$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance precedente $\frac{1}{4}ll+lx-xx$, prenez $\frac{ax}{b}-\frac{1}{2}l$, & alors Vous trouuerez $x \sim \frac{ab+bb}{aa+bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Seconde Solution.

$\frac{ab+bb,\ ab-bb}{aa+bb}$.

Si l'on suppose

$a \sim 2$.

$b \sim 1$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{3,1}{5}$.

& si l'on suppose

a∾4.

b∾3.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{21,3}{25}$.

On tire de cette seconde solution, le canon suiuant;

Canon. Si on multiplie la somme & la difference de deux nombres quelconques, chacune par le plus petit, & qu'on diuise châque produit par la somme des quarez des deux mêmes Nombres; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

L'Equation constitutiue lx-ly∾xx+yy, fait connoitre que cette Question est Vn Lieu à Vn cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{1}{2}ll}$, & dont la description sera telle.

Construction geometrique. Ayant pris à Volonté la ligne AB, pour l'Vnité, diuisez-la en deux également au point C, & luy tirez par ce point C, la perpendiculaire CD, égale à AC, ou à BC, pour decrire du centre D, par les poins A, B, Vne circonference de cercle, qui sera le Lieu qu'on cherche: de sorte que si on y prend au dessus de la ligne AB, Vn point à Volonté, comme E, & que de ce point E, on tire la droite EF, perpendiculaire à la ligne AB, les deux lignes BF, EF, representeront les deux Nombres qu'on cherche, c'est à dire que le Rectangle ABBF-ABEF, sous leur difference BF-EF, & l'Vnité AB, sera égal à la somme BFq+EFq, de leurs quarez.

AB ∾l.
AC∾$\frac{1}{2}$l.
BC∾$\frac{1}{2}$l.
BD∾$\sqrt{\frac{1}{2}ll}$.
DL∾$\sqrt{\frac{1}{2}ll}$.
DM∾$\sqrt{\frac{1}{2}ll}$.
LM∾$\sqrt{2ll}$.
HF∾$\frac{1}{2}$l.
BF∾x.
EF∾y.
AF∾l-x.
GF∾l+y.

Demonstration. Car si on prolonge la ligne EF, jusqu'à la circonference du cercle en G, on connoitra comme auparauant, que la ligne EF, est égale à FG-AB, c'est pourquoy en ajoutant AB, on aura FG∾AB+EF, & l'on pourra faire cette analogie, AF, FG :: AF, AB+EF, & si à la place des deux premiers termes AF, FG, on met

les deux EF, BF, qui sont en même raison, par la Nature du cercle, on aura celle-cy, EF, BF :: AF, AB + AF, & par consequent cette égalité, ABEF + EFq ∾ AFBF, ou ABEF + EFq ∾ ABBF − BFq, à cause de AF ∾ AB − BF, & par l'antithese on aura celle-cy, ABBF − ABEF ∾ BFq + EFq. Ce qu'il faloit demontrer.

Les deux Solutions precedentes ont chacune sa determination, & si vous en voulez une, qui ne soufre aucune determination, il faudra mettre

$$\frac{x,\ x+y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon la condition de la Question, vous aurez en entiers, cette Equation constitutive,

$$yz \sim 2xx + 2xy + yy.$$

dans laquelle vous trouverez $z \sim \frac{2xx}{y} + 2x + y$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{xy,\ xy+yy}{2xx+2xy+yy}.$$ Troisieme Solution.

Si l'on suppose

$$x \sim 1.$$
$$y \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 2}{5}.$$

& si l'on suppose

$$x \sim 2.$$
$$y \sim 3.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{6,\ 15}{29}.$$

Mais si l'on suppose

$$x \sim 3.$$
$$y \sim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,\ 5}{17}.$$

On tire de cette troisieme Solution, le canon suivant;

Si on multiplie le premier de deux nombres quelconques, & leur somme, chacun par le second, & qu'on divise chaque produit par la somme des quarrez du même premier Nombre & de la même somme; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Si l'on mettoit $\frac{x+y,\ x-y}{z}$, pour les deux Nombres qu'on cherche, on n'auroit point de Puissance à égaler au quarré, ny la necessité d'emprunter l'Unité, mais on trouveroit une solution semblable à la seconde.

XXXVIII.

Trouuer deux nombres, dont la somme soit égale à un nombre donné, & dont le produit soit égal à la difference de leurs quarrez.

On propose de trouuer deux nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit égale au nombre donné $2 \backsim a$, & dont le produit xy soit égal à la difference $xx-yy$ de leurs quarrez.

Canon. Si de la Racine quarrée de la somme du quarré du nombre donné & du quarré de sa moitié, on ôte la même moitié, on aura le plus grand des deux nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du nombre donné, on aura le plus petit.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \backsim a.$$

$$xy \backsim xx-yy.$$

Dans la premiere $x+y \backsim a$, on trouuera $y \backsim a-x$, & par consequent $yy \backsim aa-2ax+xx$, & la seconde $xy \backsim xx-yy$, se changera en celle-cy, $ax-xx \backsim xx-aa+2ax-xx$, ou $xx+ax \backsim aa$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{1}{2}\sqrt{5aa}-\frac{1}{2}a$, & au lieu de $y \backsim a-x$, on aura $y \backsim \frac{3a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5aa}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}\sqrt{5aa}-\frac{1}{2}a.$$

$$\frac{3a}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5aa}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \backsim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\sqrt{5}-1.$$

$$3-\sqrt{5}.$$

Construction geometrique. Si au lieu du nombre a, on donné la ligne AB, on trouuera en lignes les deux nombres qu'on cherche, en coupant la ligne donnée AB, au point C, dans la moyenne & extrême raison, & alors les deux lignes AC, BC, representeront les deux nombres qu'on cherche; c'est à dire que leur somme AC+BC, sera égale à la ligne donnée AB, comme il est euident par la construction, & leur Rectangle ACB, sera égal à la difference ACq-BCq, de leurs quarrez, comme nous alons demontrer.

$AB \backsim a$.
$AC \backsim x$.
$BC \backsim y$.

Puisque par la construction, Nous avons cette égalité, $ABC \sim ACq$, Si on change le Rectangle ABC, en la somme $ACB + BCq$, qui luy est égale, par 3. 2. on aura cette autre égalité, $ACB + BCq \sim ACq$, c'est pourquoy en ôtant BCq, on aura celle-cy, $ACB \sim ACq - BCq$. Ce qu'il faloit demontrer. Demonstration.

XXXIX.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit égale à Un Nombre donné, & dont le produit soit égal à la difference de leurs quarrez.

On propose de trouver deux nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x - y$, soit égale au Nombre donné $2 \sim a$, & dont le produit xy, soit égal à la difference $xx - yy$ de leurs quarrez.

Si à la Racine quarrée de la somme du quarré du Nombre donné & du quarré de sa moitié, on ajoute la Même Moitié, on aura le plus petit des deux nombres qu'on cherche, auquel si on ajoute le Nombre donné, on aura le plus grand. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x - y \sim a.$$

$$xy \sim xx - yy.$$

Dans la premiere $x - y \sim a$, on trouvera $x \sim a + y$, & la seconde $xy \sim xx - yy$, se changera en celle-cy, $ay + yy \sim aa + 2ay$, ou $yy - ay \sim aa$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{5aa}$, c'est pourquoy au lieu de $x \sim a + y$, on aura $x \sim \frac{3a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5aa}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{3a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5aa}.$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{5aa}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$3 + \sqrt{5}.$$

$$1 + \sqrt{5}.$$

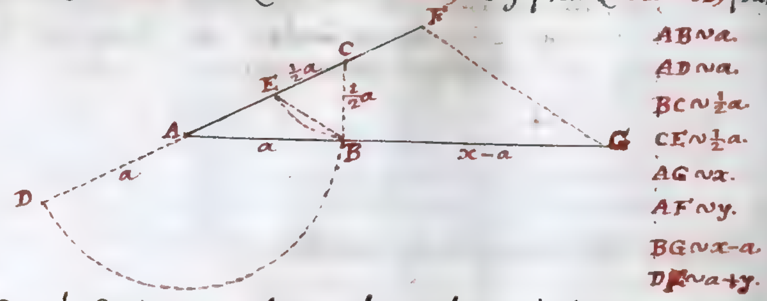
Si au lieu du Nombre a, on donne la ligne AB, on trouvera en lignes les deux Nombres qu'on cherche, en joignant ensemble les deux Lieux à la Ligne droite, qui conviennent aux deux Equations constitutives,

$$x - y \sim a.$$

$$xy \sim xx - yy.$$

en cette sorte.

Construction geometrique. Ayant tiré par l'extremité B, de la ligne donnée AB, la droite BC, perpendiculaire à la ligne AB, & égale à la moitié de la même ligne AB, menez la droite AC, & y prenez CE ∾ CB, pour



joindre la droite BE. Aprez cela prolongez la ligne AF, en D, ensorte que la ligne AD, soit égale à la ligne AB, & ayant pris sur la ligne AC, prolongée, la ligne AF, quatrieme proportionnelle aux trois AB−AE, AE, AD, tirez par le point F, à la ligne BE, la parallele FG, qui rencontre icy la ligne AB, prolongée au point G, & les deux lignes AG, AF, representeront les deux nombres qu'on cherche, c'est à dire que leur Rectangle GAF, sera égal à la difference AGq−AFq, de leurs quarrez comme il a été demontré dans la 33.e de ces Questions ajoutées, & leur difference AG−AF sera égale à la ligne donnée AB, comme nous alons demontrer.

Demonstration. Puisque par la construction, nous avons cette analogie, AB−AE, AE :: AD, AF, en composant on aura celle-cy, AB, AE :: DF, AF, & si à la place des deux premiers termes AB, AE, on met les deux AG, AF, qui sont en même raison, à cause des triangles semblables ABE, AFG, on aura cette autre analogie, AG, AF :: DF, AF, & par consequent cette égalité AG∾DF, c'est pourquoy en ôtant AF, on aura celle-cy, AG−AF∾AD, ou AB. Ce qu'il faloit demontrer.

XL.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit égale à un nombre donné, & dont la somme soit égale à la somme de leurs quarrez.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

dont la difference x−y, soit égale au nombre donné $\frac{3}{5}$ ∾ a, & dont la somme x+y soit égale à la somme xx+yy de leurs quarrez.

Si

Si à la Somme de l'Vnité & de la Racine quarrée de l'excez de l'Vnité sur le quarré du Nombre donné, on ajoute & on ôte le Nombre donné; les moitiez de la somme & du reste donneront les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x - y \backsim a.$$
$$lx + ly \backsim xx + yy.$$

Dans la premiere $x - y \backsim a$, on trouuera $x \backsim a + y$, & la deuxieme $lx + ly \backsim xx + yy$, se changera en celle-cy, $la + 2ly \backsim aa + 2ay + 2yy$, ou $yy + ay - ly \backsim \frac{1}{2}la - \frac{1}{2}aa$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{1}{2}l - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{ll - aa}$: c'est pourquoy au lieu de $x \backsim a + y$, on aura $x \backsim \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{ll - aa}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}l + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{ll - aa}.$$
$$\frac{1}{2}l - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{ll - aa}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim \frac{3}{5}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{6,\ 3}{5}.$$

Comme la premiere Equation constitutiue $x - y \backsim a$, est Vn Lieu à la Ligne droite, & la deuxieme $lx + ly \backsim xx + yy$, Vn Lieu à Vn cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{1}{2}ll}$, dont Nous auons donné la construction dans la 36.e de ces Questions ajoutées, si l'on joint ensemble ces deux Lieux, en mettant la ligne AO, à la place du Nombre donné a, & la ligne AB, à la place de l'Vnité l, on resoudra geometriquement la Question en cette sorte.

Ayant decrit le cercle GLEM, comme il a été enseigné dans la 36.e de ces Questions ajoutées, prenez sur son diametre LM, qui doit être parallele à la ligne AB, la ligne DN, égale à la ligne donnée AO, & tirez par le point N, à la ligne DB, la parallele NE, qui coupe icy la circonference du cercle au point E, par où Vous tirerez la droite EF, perpendiculaire à la ligne AB; & les deux lignes EF, BF, representeront les deux Nombres qu'on cherche, c'est à dire que le Rectangle ABEF + ABBF, sous l'Vnité AB, & leur somme EF + BF, sera égal à la somme EFq + BFq, de

Construction geometrique.

$AB \backsim l.$
$AO \backsim a \backsim DN.$
$AC \backsim \frac{1}{2}l \backsim CD.$
$DB \backsim \sqrt{\frac{1}{2}ll}.$
$LM \backsim \sqrt{2ll}.$
$EF \backsim x.$
$BF \backsim y.$
$EH \backsim x - \frac{1}{2}l \backsim HN.$

de leurs quarez, comme il a été demontré dans la 36e de ces Questions ajoutées, & leur difference $EF-BF$, sera égale à la ligne donnée AO, comme Nous alons demontrer.

Demonstration. Acause de $DC \sim CB$, par la construction, on aura $EH \sim HN$, $EH \sim DH+DN$, & à cause de $DH \sim CF$, & de $DN \sim AO$, par la construction, on aura $EH \sim CF+AO$: & en ajoutant $HF \sim BC$, on aura $EF \sim BF+AO$, & par consequent $EF-BF \sim AO$. Ce qu'il faloit demontrer.

XLI.

Trouver deux Nombres, dont la somme soit égale à Un Nombre donné, & dont la difference soit égale à la somme de leurs quarez.

On propose de trouver deux nombres,

$$x.$$
$$y.$$

dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $\frac{3}{5} \sim a$, & dont la difference $x-y$ soit égale à la somme $xx+yy$ de leurs quarez.

Canon. Si du Nombre donné augmenté de l'Unité, on ôte la Racine quarée de l'excez de l'Unité sur le quarré du Nombre donné, on aura en la moitié du reste le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du Nombre donné, on aura le plus petit.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \sim a.$$
$$lx-ly \sim xx+yy$$

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouvera $y \sim a-x$, & la deuxieme $lx-ly \sim xx+yy$, se changera en celle-cy, $2lx+la \sim aa-2ax+2xx$, ou $xx-ax-lx \sim \frac{1}{2}la-\frac{1}{2}aa$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}\sqrt{ll-aa}$: c'est pourquoy au lieu de $y \sim a-x$, on aura $y \sim \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}l+\sqrt{ll-aa}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}\sqrt{ll-aa}.$$
$$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}\sqrt{ll-aa}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim \frac{3}{5}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

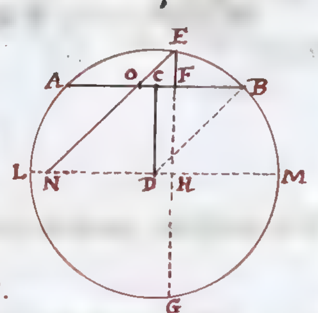
$$\frac{2,1}{5}.$$

Comme la premiere Equation constitutive $x+y \sim a$, est Un Lieu à la Ligne droite, & la seconde $lx-ly \sim xx+yy$ Un Lieu à Un

cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{1}{2}ll}$, & dont Nous auons donné la construction dans la 37. de ces Questions ajoutées, Si l'on joint ensemble ces deux Lieux, en mettant la ligne BO, à la place du Nombre donné a, & la ligne AB, à la place de l'Unité l, on resoudra geometriquement la Question, en cette sorte.

Ayant decrit le cercle GLEM, comme il a été enseigné dans la 37.e de ces Questions ajoutées, prenez sur son diametre LM, qui doit être parallele à la ligne AB, la ligne DN, égale à la ligne donnée BO, & tirez par le point N, parallelement au Rayon DB, la ligne Locale NE, qui coupe icy la circonference du cercle au point E, par où Nous tirerez la droite EF, perpendiculaire à la ligne AB, & les deux lignes BF, EF, representeront les deux Nombres qu'on cherche, de sorte que le Rectangle ABBF-ABEF, sous leur difference BF-EF, & l'Unité AB, sera égal à la somme BFq+EFq, de leurs quarrez, comme il a été demontré dans la 37.e de ces Questions ajoutées, & leur somme BF+EF, sera égale à la ligne donnée BO, comme Nous alons demontrer. Construction geometrique.

AB ∾ l.
BO ∾ a ∾ DN.
AC ∾ $\frac{1}{2}$l ∾ CD.
DB ∾ $\sqrt{\frac{1}{2}ll}$.
LM ∾ $\sqrt{2ll}$.
BF ∾ x.
EF ∾ y ∾ OF.
EH ∾ y + $\frac{1}{2}$l ∾ GH.



A cause de CD ∾ BC, par la construction, & du triangle BCD, semblable au triangle NHE, on aura NH ∾ EH, ou DN+DH ∾ HF +EF, & à cause de HF ∾ CD ∾ BC, on aura DN+DH ∾ BC+EF, c'est pourquoy en ôtant DH ∾ CF, on aura DN, ou BO ∾ BF+EF. Ce qu'il faloit demontrer. Demonstration.

Parceque le triangle EFO, est semblable au triangle BCD, dont les deux côtez BC, CD, ont été fait égaux, on connoit que les deux côtez EF, FO, sont égaux aussy, & que par consequent la ligne BO, est égale à la somme des deux BF, EF. D'où que pour auoir Une construction abregée, il n'est pas necessaire de tirer le diametre LM, pour y prendre la ligne DN, égale à la ligne donnée BO, mais il suffit de tirer par le point O, la ligne Locale OE, parallele au Rayon DB, &c.

Question VI.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à vn Nombre donné, lequel étant ôté de la difference de leurs quarrez, le reste soit aussy égal à vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre $2 \sim a$, lequel étant ôté de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, le reste $xx-yy-la$ soit égal au Nombre donné $20 \sim bc$.

Canon. Si à la somme des deux Nombres donnez on ajoute & on ôte le quarré du premier, & qu'on diuise la somme & le reste, chacun par le double du même premier; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \sim a.$$

$$xx-yy-la \sim bc.$$

Dans la premiere $x-y \sim a$, on trouuera $x \sim a+y$, & la deuxieme $xx-yy-la \sim bc$, se changera en celle-cy, $aa+2ay-la \sim bc$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{bc+la-aa}{2a}$, c'est pourquoy au lieu de $x \sim a+y$, on aura $x \sim \frac{bc+la+aa}{2a}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bc+la+aa,\ bc+la-aa}{2a},$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 2.$$

$$bc \sim 20.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{13,\ 9}{2}.$$

Cette Question resoud entierement la 3.e de celles qui ont été ajoutées dans la XXXIIIe du Liure precedent. Car puisque l'excez de la difference des quarrez sur la difference des Nombres est donné, sauoir bc, la difference des quarrez sera aussy donnée, sauoir $bc+la$, comme il est aisé de voir dans la seconde Equation, $xx-yy-la \sim bc$, où par l'antithese on connoit que la difference des quarrez $xx-yy$ est égale à $bc+la$.

Nous ajouterons icy les Questions suiuantes.

I.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à Vn Nombre donné, lequel étant ajouté à la difference de leurs quarrez, la somme soit aussy égale à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $2 \sim a$, lequel étant ajouté à la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, la somme $xx-yy+la$ soit égale au Nombre donné $10 \sim bc$.

Si de l'excez du second Nombre donné sur le premier, on ôte & on ajoute le quarré du premier, & qu'on diuise le reste & la somme, châcun par le double du même premier, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \sim a.$$

$$xx-yy+la \sim bc.$$

Dans la premiere $x-y \sim a$, on trouuera $x \sim a+y$, & la deuxieme $xx-yy+la \sim bc$, se changera en celle-cy, $aa+2ay+la \sim bc$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{bc}{2a}-\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}a$, c'est pourquoy au lieu de $x \sim a+y$, on aura $x \sim \frac{bc}{2a}-\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}a$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bc-la-aa,\ bc-la+aa}{2a}.$$

Parceque nous auons supposé

$a \sim 2$.

$bc \sim 10$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

1.

3.

II.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à Vn Nombre donné, duquel ôtant la difference de leurs quarrez, le reste soit aussy égal à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $\frac{1}{3} \sim a$, duquel

Si on ôte la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, le reste $la-xx+yy$ soit égal au Nombre donné $\frac{1}{9} \sim bc$.

Canon. Si à l'excez du premier Nombre donné sur le second, on ajoute & on ôte le quarré du premier, & qu'on divise la somme & le reste, chacun par le double du même premier; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \sim a.$$
$$la-xx+yy \sim bc.$$

Dans la premiere $x-y \sim a$, on trouvera $x \sim a+y$, & la deuxieme $la-xx+yy \sim bc$, se changera en celle-cy, $la-aa-2ay \sim bc$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{1}{2}l-\frac{1}{2}a-\frac{bc}{2a}$: c'est pourquoy au lieu de $x \sim a+y$, on aura $x \sim \frac{1}{2}l+\frac{1}{2}a-\frac{bc}{2a}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{la+aa-bc,\; la-aa-bc}{2a}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim \frac{1}{3}.$$
$$bc \sim \frac{1}{9}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,\; 1}{6}.$$

Cette Question, aussy-bien que la precedente, resoud aussy la 3.e de celles qui ont été ajoutées à la XXXIII.e du Liure precedent, puisque dans chacune la difference des quarrez des deux Nombres qu'on cherche, est aussy donnée.

III.

Trouver deux Nombres, dont la somme soit égale à Un Nombre donné, lequel étant ôté de la somme de leurs quarrez, le reste soit aussy égal à Un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

Dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $6 \sim a$, lequel étant ôté de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, le reste $xx+yy-la$ soit égal au Nombre donné $14 \sim bc$.

Canon. Si à la Moitié du premier Nombre donné on ajoute & on ôte la Moitié de la Racine quarrée de l'excez de la somme des deux Nombres donnez sur le quarré du premier; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \backsim a.$$

$$xx+yy-la \backsim bc.$$

Dans la premiere $x+y \backsim a$, on trouvera $x \backsim a-y$, & la deuxieme $xx+yy-la \backsim bc$, se changera en celle-cy, $aa-2ay+2yy-la \backsim bc$, dans laquelle on trouvera $y \backsim \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{2bc+2la-aa}$: & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{2bc+2la-aa}.$$

$$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{2bc+2la-aa}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \backsim 6.$$

$$bc \backsim 14.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

2.

La Determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le second bc, doit être plus grand que $\frac{1}{2}aa-la$, & moindre que $aa-la$, c'est à dire qu'il doit être entre $\frac{1}{2}aa-la$, & $aa-la$. Determination.

Car à cause du terme irrationnel $\sqrt{2bc+2la-aa}$, qui se rencontre dans chacun des deux Nombres trouvez, on a cette inégalité, $2bc+2la \oplus aa$, & en ôtant $2la$, on a celle-cy, $2bc \oplus aa-2la$, & en divisant par 2, on a celle-cy, $bc \oplus \frac{1}{2}aa-la$. Ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit demontrer. Demonstration.

Dans le second Nombre trouvé $\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{2bc+2la-aa}$, on a cette inégalité, $a \oplus \sqrt{2bc+2la-aa}$: c'est pourquoy en prenant le quarré de chaque partie, on aura celle-cy, $aa \oplus 2bc+2la-aa$, & en ajoutant aa, on aura celle-cy, $2aa \oplus 2bc+2la$, & en ôtant $2la$, on aura celle-cy, $2aa-2la \oplus 2bc$, & enfin en divisant par . on aura celle-cy, $aa-la \oplus bc$. Ce qui restoit à demontrer.

Cette Question resoud la XXXI. du Livre precedent: car puisque l'excez de la somme des quarrez sur la somme des deux Nombres qu'on cherche, est donné, la somme des quarrez sera aussy donnée, sauoir $bc+la$, comme il est aisé de voir dans la seconde Equation $xx+yy-la \backsim bc$, où l'on connoit par l'antithese que la somme des quarrez $xx+yy$, est égale à $bc+la$.

IV.

Trouver deux Nombres, dont la Somme soit égale à un Nombre donné, lequel étant ajouté à la Somme de leurs quarrez: cette seconde Somme soit aussy égale à un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

Dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $6 \sim a$, lequel étant ajouté à la Somme $xx+yy$ de leurs quarrez: la Somme qui viendra, sauoir $xx+yy+la$, soit égale au Nombre donné $26 \sim bc$.

Canon. Si au premier Nombre donné on ajoute & on ôte la Racine quarrée de l'excez du double du second Nombre donné sur la somme du quarré du premier, & du double du même premiers; les Moitiez de la Somme & du reste donneront les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \sim a.$$

$$xx+yy+la \sim bc.$$

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouuera $x \sim a-y$, & la deuxieme $xx+yy+la \sim bc$, se changera en celle-cy, $aa-2ay+2yy+la \sim bc$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{2bc-2la-aa}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{2bc-2la-aa}.$$

$$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{2bc-2la-aa}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 6.$$

$$bc \sim 26.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$4.$$

$$2.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le second bc, doit être plus grand que $la+\frac{1}{2}aa$, & moindre que $la+aa$, c'est à dire qu'il doit être entre $la+\frac{1}{2}aa$, & $la+aa$.

Demonstration. Car à cause du terme irrationnel $\sqrt{2bc-2la-aa}$, on a $2bc \oplus 2la+aa$, & par consequent $bc \oplus la+\frac{1}{2}aa$. Ce qu'il faloit premierement demontrer; & à cause du second Nombre trouué, on a $a \oplus \sqrt{2bc-2la-aa}$, & par consequent $aa \oplus 2bc-2la-aa$, ou $2aa+2la \oplus 2bc$, ou $aa+la \oplus bc$. Ce qui restoit à demontrer.

V.

V.

Trouver deux nombres, dont la somme soit égale à Un nombre donné, duquel si on ôte la somme de leurs quarrez, le reste soit aussy égal à Un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit égale au nombre donné $\frac{2}{3} \sim a$, duquel si on ôte la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, le reste $la-xx-yy$, soit égal au Nombre donné $\frac{7}{18} \sim bc$.

Si à la Moitié du premier Nombre donné on ajoute & on ôte la moitié de la Racine quarrée de l'excez du double du premier Nombre donné sur la somme du quarré de ce même premier Nombre donné, & du double du second; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$x+y \sim a$.

$la-xx-yy \sim bc$.

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouvera $x \sim a-y$, & la deuxieme $la-xx-yy \sim bc$, se changera en celle-cy, $la-aa+2ay-2yy \sim bc$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{2la-aa-2bc}$: & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{2la-aa-2bc}$.

$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{2la-aa-2bc}$.

Parceque Nous avons supposé

$a \sim \frac{2}{3}$.

$bc \sim \frac{7}{18}$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{3, 1}{6}$.

La Determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le second bc, doit être plus grand que $la-aa$, & Moindre que $la-\frac{1}{2}aa$, c'est à dire qu'il doit être entre $la-aa$, & $la-\frac{1}{2}aa$. Determination.

Car à cause du terme irrationnel $\sqrt{2la-aa-2bc}$, on a $2bc \ominus 2la-aa$, ou $bc \ominus la-\frac{1}{2}aa$, ce qu'il faloit premierement demontrer; & à cause du second Nombre trouvé, on a $a \oplus \sqrt{2la-aa-2bc}$, & par consequent $aa \oplus 2la-aa-2bc$, ou $2bc \oplus 2la-2aa$, ou $bc \oplus la-aa$. Ce qui restoit à demontrer. Demonstration.

VI.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à vn nombre donné, lequel étant ajouté à la somme de leurs quarrez, la somme qui viendra, soit aussy égale à vn nombre donné.

On propose de trouuer deux nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$ soit égale au nombre donné $2 \backsim a$, lequel étant ajouté à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, la somme $xx+yy+la$ soit égale au Nombre donné $11 \backsim bc$.

Canon. Si de la moitié de la Racine quarrée de l'excez du double du second nombre donné sur la somme du quarré du premier, & du double du même premier, on ôte & on ajoute la moitié du premier, on aura les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \backsim a.$$

$$xx+yy+la \backsim bc.$$

Dans la premiere $x-y \backsim a$, on trouuera $x \backsim a+y$, & la deuxieme $xx+yy+la \backsim bc$, se changera en celle-cy, $aa+2ay+2yy+la \backsim bc$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{1}{2}\sqrt{2bc-2la-aa}-\frac{1}{2}a$, & au lieu de $x \backsim a+y$, on aura $x \backsim \frac{1}{2}\sqrt{2bc-2la-aa}+\frac{1}{2}a$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}\sqrt{2bc-2la-aa}+\frac{1}{2}a.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2bc-2la-aa}-\frac{1}{2}a.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \backsim 2.$$

$$bc \backsim 11.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$3.$$

$$1.$$

Les deux Questions precedentes peuuent resoudre la XXXIe du Liure precedent, parceque dans chacune la somme des quarrez est aussy donnée: & celle-cy, resoud la 2.e de celles qui ont été ajoutées à la XXXIIIe du liure precedent: car puisque la somme des quarrez & de la difference des Nombres est donnée, la somme des quarrez sera aussy donnée, sauoir $bc-la$, comme l'on void dans la seconde Equation, $xx+yy+la \backsim bc$, où par l'antithese on a $xx+yy \backsim bc-la$.

VII.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à Vn Nombre donné, lequel étant ôté de la somme de leurs quarrez le reste soit aussy égal, à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $3 \sim a$, lequel étant ôté de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, le reste $xx+yy-la$ soit égal au Nombre donné $14 \sim bc$.

Si à la Racine quarée de l'excez du double de la somme des deux Nombres donnez sur le quarré du premier, on ajoute & on ôte le Même premier, les moitiez de la somme & du reste donneront les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$x-y \sim a$.

$xx+yy-la \sim bc$.

Dans la premiere $x-y \sim a$, on trouuera $x \sim a+y$, & la deuxieme $xx+yy-la \sim bc$, se changera en celle-cy, $aa+2ay+2yy-la \sim bc$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}\sqrt{2bc+2la-aa}-\frac{1}{2}a$: c'est pourquoy au lieu de $x \sim a+y$, on aura $x \sim \frac{1}{2}\sqrt{2bc+2la-aa}+\frac{1}{2}a$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{1}{2}\sqrt{2bc+2la-aa}+\frac{1}{2}a$.

$\frac{1}{2}\sqrt{2bc+2la-aa}-\frac{1}{2}a$.

Parceque Nous auons supposé

$a \sim 3$.

$bc \sim 14$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

4.

1.

VIII.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à Vn Nombre donné, duquel si on ôte la somme de leurs quarrez le reste soit aussy égal à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $\frac{1}{6} \sim a$, duquel si on ôte la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, le reste $la-xx-yy$ soit égal au Nombre donné $\frac{1}{36} \sim bc$.

canon. Si de la Moitié de la Racine quarrée de l'excez du double du premier Nombre donné sur la somme du quarré du même premier Nombre donné, & du double du second, on ôte & on ajoûte la Moitié du premier; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \sim a.$$

$$la-xx-yy \sim bc.$$

Dans la premiere $x-y \sim a$, on trouvera $x \sim a+y$, & la deuxieme $la-xx-yy \sim bc$, se changera en celle-cy, $la-aa-2ay-2yy \sim bc$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{1}{2}\sqrt{2la-aa-2bc}-\frac{1}{2}a$: c'est pourquoy au lieu de $x \sim a+y$, on aura $x \sim \frac{1}{2}\sqrt{2la-aa-2bc}+\frac{1}{2}a$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}\sqrt{2la-aa-2bc}+\frac{1}{2}a.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2la-aa-2bc}-\frac{1}{2}a.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim \frac{1}{6}.$$

$$bc \sim \frac{1}{36}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2,1}{6}.$$

Il est évident que cette Question & la precedente peuuent aussy resoudre la 2.e de celles, qui ont été ajoutées à la XXXIII.e du Liure precedent, parceque dans chacune la somme des quarrez des deux Nombres qu'on cherche, est aussy donnée.

IX.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit égale à Vn Nombre donné, lequel étant ajouté à la difference de leurs quarrez, la somme soit aussy égale à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la somme $x+y$ soit égale au nombre donné $7 \sim a$, lequel étant ajouté à la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, la somme $xx-yy+la$ soit égale au Nombre donné $14 \sim bc$.

Si de la somme du premier Nombre donné & de son quarré

on ôte le second, & qu'on divise le reste par le double du premier, on aura le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du premier Nombre donné, on aura le plus grand. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \sim a.$$
$$xx-yy+la \sim bc.$$

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouvera $y \sim a-x$, & la deuxieme $xx-yy+la \sim bc$, se changera en celle-cy, $la-aa+2ax \sim bc$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{1}{2}a+\frac{bc}{2a}-\frac{1}{2}l$: c'est pourquoy au lieu de $y \sim a-x$, on aura $y \sim \frac{1}{2}a-\frac{bc}{2a}+\frac{1}{2}l$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels;

$$\frac{aa-la+bc,\ aa+la-bc}{2a}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 7.$$
$$bc \sim 14.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$4.$$
$$3.$$

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le second bc, doit être moindre que $la+aa$, & plus grand que $la-aa$, c'est à dire qu'il doit être entre $la+aa$, & $la-aa$, comme il est aisé de voir dans chacun des deux Nombres trouvez. Determination.

X.

Trouver deux Nombres, dont la Somme soit égale à un Nombre donné, lequel étant ôté de la difference de leurs quarrez, le reste soit aussy égal à un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $7 \sim a$, lequel étant ôté de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, le reste $xx-yy-la$, soit égal au Nombre donné $14 \sim bc$.

Si par le double du premier Nombre donné, on divise la somme des deux Nombres donnez & du quarré du premier, on aura le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du premier Nombre donné, on aura le plus petit. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \sim a.$$
$$xx-yy-la \sim bc.$$

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouvera $x \sim a-y$, & la deuxieme $xx-yy-la \sim bc$, se changera en celle-cy, $aa-2ay-la \sim bc$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}l-\frac{bc}{2a}$, & au lieu de $x \sim a-y$, on aura $x \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}l+\frac{bc}{2a}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+la+bc,\ aa-la-bc}{2a}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 7.$$
$$bc \sim 14.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

2.

XI.

Trouver deux Nombres, dont la somme soit égale à Un Nombre donné, duquel si on ôte la Difference de leurs quarrez le reste soit aussy égal à Un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $\frac{3}{4} \sim a$, duquel si on ôte la Difference $xx-yy$ de leurs quarrez le reste $la-xx+yy$ soit égal au Nombre donné $\frac{9}{16} \sim bc$.

Canon. Si de la somme du premier Nombre donné & de son quarré on ôte le second, & qu'on divise le reste par le double du premier, on aura le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du premier Nombre donné, on aura le plus petit.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \sim a.$$
$$la-xx+yy \sim bc.$$

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouvera $x \sim a-y$, & la deuxieme $la-xx+yy \sim bc$, se changera en celle-cy, $la-aa+2ay \sim bc$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}l+\frac{bc}{2a}$: c'est pourquoy au lieu de $x \sim a-y$, on aura $x \sim \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}l-\frac{bc}{2a}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+la-bc,\ aa-la+bc}{2a}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim \frac{3}{4}.$$
$$bc \sim \frac{9}{16}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{21}{4}$.

La determination de cette Question, à l'égard des deux nombres donnez a, bc, est que le second bc, doit être moindre que $la+aa$, & plus grand que $la-aa$, c'est à dire qu'il doit être entre $la+aa$, & $la-aa$, comme il est aisé de voir dans les deux Nombres trouvez. Determination.

Cette Question & les deux precedentes peuvent resoudre la XXXII.[e] du Liure precedent, parceque dans chacune la difference des quarrez des deux Nombres qu'on cherche, est aussy donnée, comme l'on peut voir dans la seconde Equation.

XII.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à vn Nombre donné, lequel étant ajouté à leur produit, la somme soit aussy égale à vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$, soit égale au nombre donné $2 \backsim a$, lequel étant ajouté à leur produit xy, la somme $xy+la$ soit égale au Nombre donné $17 \backsim bc$.

Si à la Moitié de la Racine quarrée de l'excez de la somme du quarré du premier Nombre donné & du quadruple du second sur le quadruple du premier, on ajoute & on ôte la Moitié du premier, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \backsim a.$$

$$xy+la \backsim bc.$$

Dans la premiere $x-y \backsim a$, on trouuera $x \backsim a+y$, & la deuxieme $xy+la \backsim bc$, se changera en celle-cy, $ay+yy+la \backsim bc$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \sqrt{bc-la+\frac{1}{4}aa}-\frac{1}{2}a$: c'est pourquoy au lieu de $x \backsim a+y$, on aura $x \backsim \sqrt{bc-la+\frac{1}{4}aa}+\frac{1}{2}a$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{bc-la+\tfrac{1}{4}aa}+\tfrac{1}{2}a.$$

$$\sqrt{bc-la+\tfrac{1}{4}aa}-\tfrac{1}{2}a.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 2.$$

$$bc \backsim 17.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$

$$3.$$

XIII.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à Vn Nombre donné, lequel étant ôté de leur produit, le reste soit aussy égal à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $2 \backsim a$, lequel étant ôté de leur produit xy, le reste $xy-1a$ soit égal au Nombre donné $13 \backsim bc$.

Canon. Si à la moitié de la Racine quarrée de la somme du quarré du premier Nombre donné, & du quadruple de la somme des deux Nombres donnez, on ajoute & on ôte la Moitié du premier, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \backsim a.$$

$$xy+1a \backsim bc.$$

Dans la premiere $x-y \backsim a$, on trouuera $x \backsim a+y$, & la deuxieme $xy+1a \backsim bc$, se changera en celle-cy, $ay+yy-1a \backsim bc$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \sqrt{bc+1a+\frac{1}{4}aa} - \frac{1}{2}a$; c'est pourquoy au lieu de $x \backsim a+y$, on aura $x \backsim \sqrt{bc+1a+\frac{1}{4}aa}+\frac{1}{2}a$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{bc+1a+\tfrac{1}{4}aa}+\tfrac{1}{2}a.$$

$$\sqrt{bc+1a+\tfrac{1}{4}aa}-\tfrac{1}{2}a.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 2.$$

$$bc \backsim 13.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$5.$

$3.$

XIV.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit égale à Vn Nombre donné, duquel si on ôte leur produit, le reste soit aussy égal à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres,

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit égale au Nombre donné $\frac{1}{4} \sim a$, duquel si on ôte leur produit xy, le reste $la-xy$ soit égal au Nombre donné $\frac{1}{64} \sim bc$.

Si à la Moitié de la Racine quarrée de l'excez de la somme du quarré du premier Nombre donné, & du quadruple de ce même premier Nombre, sur le quadruple du second, on ajoûte & on ôte la Moitie du premier, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x-y \sim a.$$
$$la-xy \sim bc.$$

Dans la premiere $x-y \sim a$, on trouuera $x \sim a+y$, & la deuxieme $la-xy \sim bc$, se changera en celle-cy, $la-ay-yy \sim bc$, dans laquelle on trouuera $y \sim \sqrt{la+\frac{1}{4}aa-bc}-\frac{1}{2}a$: c'est pourquoy au lieu de $x \sim a+y$, on aura $x \sim \sqrt{la+\frac{1}{4}aa-bc}+\frac{1}{2}a$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{la+\frac{1}{4}aa-bc}+\frac{1}{2}a.$$
$$\sqrt{la+\frac{1}{4}aa-bc}-\frac{1}{2}a.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim \frac{1}{4}.$$
$$bc \sim \frac{1}{64}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{5,3}{8}.$$

Cette Question & les deux precedentes peuuent aussy resoudre la XXXIIIe du Liure precedent, parceque dans chacune le produit des deux Nombres qu'on cherche, est aussy donné.

XV.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit égale à vn Nombre donné, lequel étant ajoûté à leur produit, la somme qui viendra soit aussy égale à vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $8 \sim a$, lequel étant ajoûté à leur produit xy, la somme $xy+la$ soit égale au Nombre donné $23 \sim bc$.

Si de la Moitié du premier Nombre donné, on ôte & on ajoute la moitié de la Racine quarrée de l'excez de la somme du Canon.

quadruple du premier nombre donné & du quarré de ce même premier Nombre, sur le quadruple du second, on aura les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \sim a.$$
$$xy+la \sim bc.$$

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouuera $x \sim a-y$, & la deuxieme $xy+la \sim bc$, se changera en celle-cy, $ay-yy+la \sim bc$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}a \mp \sqrt{la+\frac{1}{4}aa-bc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a+\sqrt{la+\frac{1}{4}aa-bc}.$$
$$\frac{1}{2}a-\sqrt{la+\frac{1}{4}aa-bc}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 8.$$
$$bc \sim 23.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le second bc doit être moindre que $la+\frac{1}{4}aa$, & plus grand que $4la$, c'est à dire qu'il doit être entre $la+\frac{1}{4}aa$, & $4la$, comme il est aisé de voir dans le second Nombre trouué.

XVI.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit égale à Vn Nombre donné, lequel étant ôté de leur produit, le reste soit aussy égal à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit égale au Nombre donné $8 \sim a$, lequel étant ôté de leur produit xy le reste $xy-la$ soit égal au Nombre donné $7 \sim bc$.

Canon. Si à la Moitié du premier Nombre donné on ajoute & on ôte la Moitié de la Racine quarrée de l'excez du quarré de ce premier Nombre sur le quadruple de la somme des deux Nombres donnez, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \sim a.$$
$$xy-la \sim bc.$$

Dans la premiere $x+y \propto a$, on trouuera $x \propto a-y$, & la deuxieme $xy - la \propto bc$, se changera en celle-cy, $ay - yy - la \propto bc$, dans laquelle on trouuera $y \propto \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}aa - la - bc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - la - bc}.$$
$$\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - la - bc}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \propto 8.$$
$$bc \propto 7.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

3.

XVII.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit égale à vn nombre donné, duquel si on ôte leur produit, le reste soit aussy égal à vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit égale au nombre donné $1 \propto a$, duquel si on ôte leur produit xy, le reste $la - xy$ soit égal au Nombre donné $\frac{19}{25} \propto bc$.

Si à la moitié du premier Nombre donné on ajoute & on ôte la moitié de la Racine quarée de l'excez de la somme du quarré de ce premier Nombre & du quadruple du second, sur le quadruple du premier; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x+y \propto a.$$
$$la - xy \propto bc.$$

Dans la premiere $x+y \propto a$, on trouuera $x \propto a-y$, & la deuxieme $la - xy \propto bc$, se changera en celle-cy, $la - ay + yy \propto bc$, dans laquelle on trouuera $y \propto \frac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{1}{4}aa - la + bc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - la + bc}.$$
$$\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - la + bc}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \propto 1.$$
$$bc \propto \frac{19}{25}.$$

Les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,\ 2}{5}.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, bc, est que le second bc, doit être moindre que le premier a, & plus grand que $la - \frac{1}{4}aa$, c'est à dire qu'il doit être entre la, & $la - \frac{1}{4}aa$, comme il est aisé de voir dans le second Nombre trouvé.

Cette Question & les deux precedentes peuvent resoudre la XXXe du Livre precedent, parceque dans chacune le produit des deux Nombres qu'on cherche, est aussy donné.

XVIII.

Trouvez deux Nombres, tels que la difference de leurs quarrez soit égale à un nombre donné, lequel étant ajouté à la difference des mêmes Nombres, la somme soit aussy égale à un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que la difference $xx - yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $16 \sim a$, lequel étant ajouté à la difference $x - y$ des mêmes Nombres, la somme $x - y + a$ soit égale au Nombre donné $18 \sim b$.

Canon. Si au quarré de la difference des deux Nombres donnez on ajoute le premier, & qu'on divise la somme par le double de l'excez du second Nombre donné sur le premier, on aura le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, duquel ôtant le même excez, on aura le plus petit.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx - yy \sim la.$$
$$x - y + a \sim b.$$

Dans la seconde $x - y + a \sim b$, on trouvera $x \sim y + b - a$, & la deuxieme $xx - yy \sim la$, se changera en celle-cy, $2by - 2ay + aa - 2ab + bb \sim la$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{la - aa + 2ab - bb}{2b - 2a}$, c'est pourquoy au lieu de $x \sim y + b - a$, on aura $x \sim \frac{la + aa - 2ab + bb}{2b - 2a}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{la - aa + 2ab - bb,\ la + aa - 2ab + bb}{2b - 2a}.$$

Parceque Nous avons supposé [illegible]

$$a \sim 16.$$
$$b \sim 18.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

3.

On auroit pû enoncer le canon precedent autrement & plus facilement en cette sorte.

Si au plus petit des deux Nombres donnez on ajoute & on ôte le quarré de leur difference, & qu'on divise les moitiez de la somme & du reste par la même difference, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Ce canon ne manquera jamais, pourvû que les deux Nombres donnez a, b, ayent leur determination, qui est que le second b, doit être plus grand que le premier a, & moindre que $a+\sqrt{la}$, c'est à dire qu'il doit être entre a, & $a+\sqrt{la}$, comme il est aisé de voir dans le second Nombre trouvé. Determination.

XIX.

Trouver deux Nombres, tels que la difference de leurs quarrez soit égale à un Nombre donné, lequel étant ôté de la difference des mêmes Nombres, le reste soit aussy égal à un Nombre donné.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $\frac{16}{25} \infty a$, lequel étant ôté de la difference $x-y$, des mêmes Nombres, le reste $x-y-a$ soit égal au Nombre donné $\frac{2}{25} \infty b$.

Si au premier Nombre donné on ajoute & on ôte le quarré de la somme des deux Nombres donnez, & qu'on divise les moitiez de la somme & du reste par la même somme des deux Nombres donnez, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx-yy \infty la.$$

$$x-y-a \infty b.$$

Dans la seconde $x-y-a \infty b$, on trouvera $x \infty a+b+y$, & la premiere $xx-yy \infty la$, se changera en celle-cy, $aa+2ab+bb+2ay+2by \infty la$, dans laquelle on trouvera $y \infty \frac{la-aa-2ab-bb}{2a+2b}$: c'est pourquoy au lieu de $x \infty a+b+y$, on aura $x \infty \frac{la+aa+2ab+bb}{2a+2b}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{la+aa+2ab+bb,\ la-aa-2ab-bb}{2a+2b}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \backsim \frac{16}{25}.$$
$$b \backsim \frac{2}{25}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{181, 19}{225}.$$

XX.

Trouuer deux Nombres, tels que la difference de leurs quarez soit égale à Vn Nombre donné, duquel si on ôte la difference des mêmes Nombres, le reste soit aussy égal à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarez soit égale au Nombre donné $16 \backsim a$, duquel si on ôte la difference $x-y$ des mêmes Nombres, le reste $a-x+y$ soit égal au Nombre donné $14 \backsim b$.

Canon. Si au premier Nombre donné on ajoute & on ôte le quarré de la difference des deux Nombres donnez & qu'on diuise la somme & le reste par le double de la même difference; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx-yy \backsim la.$$
$$a-x+y \backsim b.$$

Dans la seconde $a-x+y \backsim b$, on trouuera $x \backsim a-b+y$, & la premiere $xx-yy \backsim la$, se changera en celle-cy, $aa-2ab+bb+2ay-2by \backsim la$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{la-aa+2ab-bb}{2a-2b}$: c'est pourquoy au lieu de $x \backsim a-b+y$, on aura $x \backsim \frac{la+aa-2ab+bb}{2a-2b}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{la+aa-2ab+bb,\ la-aa+2ab-bb}{2a-2b}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \backsim 16.$$
$$b \backsim 14.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$5.$$
$$3.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, b, est que le second b, doit être moindre que le premier a, & plus grand que $a-\sqrt{la}$, comme il est aisé de Voir dans le second Nombre trouué.

Cette Question & les deux precedentes peuuent resoudre la

3.e de celles, qui ont été ajoutées à la XXXIII.e du Livre precedent; parceque dans chacune la difference des deux nombres qu'on cherche, est aussy donnée.

XXI.

Trouver deux nombres, tels que la difference de leurs quarrez soit égale à Vn nombre donné, lequel étant ajouté à la somme des mêmes nombres, la somme qui viendra soit aussy égale à Vn nombre donné.

On propose de trouver deux nombres

$x.$

$y.$

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit égale au nombre donné $16 \backsim a$, lequel étant ajouté à la somme $x+y$ des mêmes nombres, la somme $x+y+a$ soit égale au nombre donné $24 \backsim b$.

Si on ajoute & on ôte le premier nombre donné du quarré de la difference des deux nombres donnez, & qu'on divise la somme & le reste par le double de la même difference; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx-yy \backsim la.$$

$$x+y+a \backsim b.$$

Dans la seconde $x+y+a \backsim b$, on trouvera $x \backsim b-a-y$, & la premiere $xx-yy \backsim la$, se changera en celle-cy, $aa-2ab+bb+2ay-2by \backsim la$, dans laquelle on trouvera $y \backsim \frac{aa-2ab+bb-la}{2b-2a}$: c'est pourquoy au lieu de $x \backsim b-a-y$, on aura $x \backsim \frac{aa-2ab+bb+la}{2b-2a}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa-2ab+bb+la,\ aa-2ab+bb-la}{2b-2a}.$$

Parceque nous avons supposé

$a \backsim 16.$

$b \backsim 24.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

3.

XXII.

Trouver deux nombres, tels que la difference de leurs quarrez soit égale à Vn nombre donné, lequel étant ôté de la somme des mêmes nombres, le reste soit aussy égal à Vn nombre donné.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $1 \sim a$, lequel étant ôté de la somme $x+y$ des Mêmes Nombres, le reste $x+y-a$ soit égal au Nombre donné $2 \sim b$.

Canon. Si on ajoute & on ôte le premier Nombre donné du quarré de la Somme des deux Nombres donnez; & qu'on divise la somme & le reste par le double de la Même somme des deux Nombres donnez; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx-yy \sim la.$$

$$x+y-a \sim b.$$

Dans la premiere $xx-yy \sim la$, on trouvera $xx \sim yy+la$, & dans la seconde $x+y-a \sim b$, on trouvera $x \sim a+b-y$, & par consequent $xx \sim aa+2ab+bb-2ay-2by+yy$. c'est pourquoy on aura cette Equation, $yy+la \sim aa+2ab+bb-2ay-2by+yy$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{aa+2ab+bb-la}{2a+2b}$, & au lieu de $x \sim a+b-y$, on aura $x \sim \frac{aa+2ab+bb+la}{2a+2b}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+2ab+bb+la,\ aa+2ab+bb-la}{2a+2b}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 1.$$

$$b \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{5,\ 4}{3}.$$

XXIII.

Trouver deux Nombres, tels que la difference de leurs quarrez soit égale à Un Nombre donné, duquel si on ôte la somme des mêmes Nombres, le reste soit aussy égal à Un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $16 \sim a$, duquel si on ôte la somme $x+y$, des mêmes Nombres, le reste $a-x-y$ soit égal au Nombre donné $8 \sim b$.

Canon. Si on ajoute & on ôte le premier Nombre donné du quarré de la difference des deux Nombres donnez; & qu'on divise la somme & le reste par le double de la même difference; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx-yy \backsim la.$$

$$a-x-y \backsim b.$$

Dans la seconde $a-x-y \backsim b$, on trouvera $x \backsim a-b-y$, & la deuxieme $xx-yy \backsim la$, se changera en celle-cy $aa-2ab+bb-2ay+2by \backsim la$, dans laquelle on trouvera $y \backsim \frac{aa-2ab+bb-la}{2a-2b}$: c'est pourquoy au lieu de $x \backsim a-b-y$, on aura $x \backsim \frac{aa-2ab+bb+la}{2a-2b}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa-2ab+bb+la,\ aa-2ab+bb-la}{2a-2b}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \backsim 16.$$

$$b \backsim 8.$$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

Cette Question & les deux precedentes peuvent resoudre la XXXIIe du Livre precedent, parceque dans chacune la somme des deux Nombres qu'on cherche, est aussy donnée.

XXIV.

Trouver deux Nombres, tels que la difference de leurs quarrez soit égale à un Nombre donné, lequel étant ajouté à la somme des mêmes quarrez, la somme qui viendra soit aussy égale à un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $16 \backsim ab$, lequel étant ajouté à la somme $xx+yy$ des mêmes quarrez, la somme $xx+yy+ab$ soit égale au Nombre donné $50 \backsim cd$.

La Racine quarée de la Moitié du second Nombre donné est le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, & la Racine quarée de l'excez de la Moitié du second Nombre donné sur le premier est le plus petit. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx-yy \backsim ab.$$

$$xx+yy+ab \backsim cd.$$

Dans la premiere $xx-yy \backsim ab$, on trouvera $xx \backsim ab+yy$, & la deuxieme $xx+yy+ab \backsim cd$, se changera en celle-cy, $2yy+2ab \backsim cd$, dans laquelle on trouvera $y \backsim \sqrt{\frac{1}{2}cd-ab}$: c'est pourquoy au lieu de

$xx \propto ab + yy$, on aura $xx \propto \frac{1}{2}cd$, & par consequent $x \propto \sqrt{\frac{1}{2}cd}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}cd}.$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{2}cd - ab}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$ab \propto 16.$$
$$cd \propto 50.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$
$$3.$$

Il est évident que pour auoir Une solution rationnelle, on doit égaler au quarré ces deux Puissances,

$$\tfrac{1}{2}cd.$$
$$\tfrac{1}{2}cd - ab.$$

dont chacune étant multipliée par le Nombre quarré 4, on aura en entiers, ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$2cd.$$
$$2cd - 4ab.$$

Leur difference est $4ab$, dont les deux Nombres produisans sont $2a$, $2b$. La Moitié de la somme de ces deux Nombres produisans est $a+b$, dont le quarré $aa+2ab+bb$ étant égalé à la plus grande Puissance $2cd$, on trouuera $cd \propto \frac{1}{2}aa + ab + \frac{1}{2}bb$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b.$$
$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b.$$

Parceque Nous auons supposé

$$ab \propto 16.$$

Si l'on suppose

$$a \propto 8.$$
$$b \propto 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$
$$3.$$

comme auparauant: Mais si l'on suppose

$$a \propto 16.$$
$$b \propto 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$8\tfrac{1}{2}.$$
$$7\tfrac{1}{2}.$$

XXV.

Trouver deux Nombres, tels que la difference de leurs quarrez soit égale à un Nombre donné, lequel étant ôté de la somme des mêmes quarrez; le reste soit aussy égal à un Nombre donné.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit égale au nombre donné $16 \sim ab$, lequel étant ôté de la somme $xx+yy$ des mêmes quarrez; le reste $xx+yy-ab$ soit égal au Nombre donné $18 \sim cd$.

La Racine quarée de la moitié du second Nombre donné est le plus petit des deux nombres qu'on cherche, & la Racine quarrée de la somme du premier nombre donné & de la moitié du second est le plus grand. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx-yy \sim ab.$$

$$xx+yy-ab \sim cd.$$

dont la somme & la difference donnent ces deux autres Equations,

$$2xx-ab \sim cd+ab.$$

$$2yy-ab \sim cd-ab.$$

dans lesquelles on trouvera $x \sim \sqrt{ab+\frac{1}{2}cd}$, & $y \sim \sqrt{\frac{1}{2}cd}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{ab+\tfrac{1}{2}cd}.$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}cd}.$$

Parceque nous avons supposé

$$ab \sim 16.$$

$$cd \sim 18.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

3.

Par le moyen des deux Questions precedentes 24. & 25. on resoudra aisément celle-cy;

Trouver deux Nombres, tels que la difference & la somme de leurs quarrez soient égales à des Nombres donnez

parceque dans chacune la somme & la difference des quarrez des deux nombres qu'on cherche, sont données.

XXVI.

Trouuer deux Nombres, tels que la difference de leurs quarrez soit égale à vn Nombre donné, lequel étant ajouté au produit des deux Nombres, la somme soit aussy égale à vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $16 \backsim ab$, lequel étant ajouté au produit xy des deux Nombres, la somme $xy+ab$ soit égale au Nombre donné $31 \backsim cd$.

Canon. Si on ajoute & on ôte la moitié du premier Nombre donné de la Racine quarrée de la somme du quarré de la même moitié & du quarré de la difference des deux Nombres donnez; on aura les quarrez des deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx-yy \backsim ab.$$

$$xy+ab \backsim cd.$$

Dans la seconde $xy+ab \backsim cd$, on trouuera $x \backsim \frac{cd-ab}{y}$, & la deuxieme $xx-yy \backsim ab$, se changera en celle-cy, $\frac{aabb-2abcd+ccdd}{yy}-yy \backsim ab$, dans laquelle on trouuera $yy \backsim \frac{1}{2}\sqrt{aabb-8abcd+4ccdd}-\frac{1}{2}ab$, & au lieu de $xx \backsim ab+yy$, que l'on trouuera dans la premiere Equation $xx-yy \backsim ab$, on aura $xx \backsim \frac{1}{2}\sqrt{aabb-8abcd+4ccdd}+\frac{1}{2}ab$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5aabb-8abcd+4ccdd}+\tfrac{1}{2}ab}.$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5aabb-8abcd+4ccdd}-\tfrac{1}{2}ab}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$ab \backsim 16.$$

$$cd \backsim 31.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$5.$$

$$3.$$

On void aisément que pour auoir vne solution rationelle, il faut égaler au quarré ces deux Puissances

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{5aabb-8abcd+4ccdd}+\tfrac{1}{2}ab.$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{5aabb-8abcd+4ccdd}-\tfrac{1}{2}ab.$$

Leur difference est ab, dont les deux Nombres produisans sont a, b. La Moitié de la somme de ces deux Nombres produisans est $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, dont le quarré $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb$ étant égalé à la

plus grande Puissance $\frac{1}{2}\sqrt{5aabb-8abcd+4ccdd}+\frac{1}{2}ab$, on trouvera $cd \sim \frac{1}{4}aa+ab-\frac{1}{4}bb$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b.$$

$$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b.$$

Parceque nous avons supposé

$$ab \sim 16.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 8.$$

$$b \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$

$$3.$$

comme auparavant: mais si l'on suppose

$$a \sim 16.$$

$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$8\tfrac{1}{2}.$$

$$7\tfrac{1}{2}.$$

XXVII.

Trouver deux Nombres, tels que la difference de leurs quarrez soit égale à un nombre donné, lequel étant ôté de leur produit, le reste soit aussy égal à un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit égale au nombre donné $9 \sim ab$, lequel étant ôté de leur produit xy, le reste $xy-ab$ soit égal au nombre donné $11 \sim cd$.

Si on ajoute & on ôte la moitié du premier Nombre donné de la Racine quarrée de la somme du quarré de la même moitié & du quarré de la somme des deux Nombres donnez, on aura les quarrez des deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx-yy \sim ab.$$

$$xy-ab \sim cd.$$

Dans la seconde $xy-ab \sim cd$, on trouvera $x \sim \frac{ab+cd}{y}$, & la premiere $xx-yy \sim ab$, se changera en celle-cy, $\frac{aabb+2abcd+ccdd}{yy}-yy \sim ab$,

dans laquelle on trouvera $yy \sim \frac{1}{2}\sqrt{5aabb+8abcd+4ccdd}-\frac{1}{2}ab$, & au lieu de $xx \sim yy+ab$, qui se trouve dans la premiere Equation $xx-yy \sim ab$, on aura $xx \sim \frac{1}{2}\sqrt{5aabb+8abcd+4ccdd}+\frac{1}{2}ab$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5aabb+8abcd+4ccdd}+\tfrac{1}{2}ab}.$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5aabb+8abcd+4ccdd}-\tfrac{1}{2}ab}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$ab \sim 9.$$
$$cd \sim 11.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

4.

XXVIII.

Trouver deux Nombres, tels que la difference de leurs quarrez soit égale à Un Nombre donné, duquel si on ôte leur produit, le reste soit aussy égal à Un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que la difference $xx-yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $16 \sim ab$, duquel si on ôte leur produit xy, le reste $ab-xy$ soit égal au Nombre donné $1 \sim cd$.

Canon. Si on ajoute & on ôte la Moitié du premier Nombre donné de la Racine quarée de la somme du quarré de la même moitié & du quarré de la difference des deux nombres donnez; on aura les quarrez des deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx-yy \sim ab.$$
$$ab-xy \sim cd.$$

Dans la seconde $ab-xy \sim cd$, on trouvera $x \sim \frac{ab-cd}{y}$, & la premiere $xx-yy \sim ab$, se changera en celle-cy, $\frac{aabb-2abcd+ccdd}{yy}-yy \sim ab$, dans laquelle on trouvera $yy \sim \frac{1}{2}\sqrt{5aabb-8abcd+4ccdd}-\frac{1}{2}ab$, & au lieu de $xx \sim yy+ab$, qui se trouve dans la premiere Equation $xx-yy \sim ab$, on aura $xx \sim \frac{1}{2}\sqrt{5aabb-8abcd+4ccdd}+\frac{1}{2}ab$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5aabb-8abcd+4ccdd}+\tfrac{1}{2}ab}$$
$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5aabb-8abcd+4ccdd}-\tfrac{1}{2}ab}.$$

Parceque Nous avons supposé

$ab \sim 16.$

$cd \sim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

Cette Question & les deux precedentes donnent la solution de celle-cy;

Trouuer deux Nombres, tels que leur produit, & la difference de leurs quarrez soient égaux à des Nombres donnez. parceque dans chacune le produit des deux Nombres qu'on cherche, & la difference de leurs quarrez sont donnez.

XXIX.

Trouuer deux Nombres, tels que la somme de leurs quarrez soit égale à Vn Nombre donné, lequel étant ajouté à la difference des mêmes Nombres, la somme soit aussy égale à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

en sorte que la somme $xx+yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $34 \sim a$, lequel étant ajouté à la difference $x-y$ des mêmes Nombres, la somme $x-y+a$ soit égale au Nombre donné $36 \sim b$.

Si on ajoute & on ôte la Moitié de la difference des deux Nombres donnez, de la Moitié de la Racine quarrée de l'excez du double du premier Nombre donné sur le quarré de la même difference; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$xx+yy \sim la.$

$x-y+a \sim b.$

Dans la seconde $x-y+a \sim b$, on trouuera $x \sim y-a+b$, & la premiere $xx+yy \sim la$, se changera en celle-cy, $2yy-2ay+aa+2by-2ab+bb \sim la$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}\sqrt{2la-aa+2ab-bb}+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, & au lieu de $x \sim y-a+b$, on aura $x \sim \frac{1}{2}\sqrt{2la-aa+2ab-bb}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{1}{2}\sqrt{2la-aa+2ab-bb}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b.$

$\frac{1}{2}\sqrt{2la-aa+2ab-bb}+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b.$

Parceque Nous auons supposé

$a \sim 34.$

$b \sim 36.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, b, est que le second b, doit être plus grand que le premier a, & moindre que $a + \sqrt{la}$, c'est à dire qu'il doit être entre a, & $a + \sqrt{la}$, comme il est aisé de voir dans les deux Nombres trouvez, dont le premier doit être plus grand que le second.

XXX.

Trouver deux Nombres, tels que la somme de leurs quarrez soit égale à un Nombre donné, duquel si on ôte la difference des mêmes Nombres, le reste soit aussy égal à un Nombre donné.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

en sorte que la somme $xx + yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $34 \sim a$, duquel si on ôte la difference $x - y$ des mêmes Nombres, le reste $a - x + y$ soit égal au Nombre donné $32 \sim b$.

Canon. Si on ajoute & on ôte la Moitié de la difference des deux Nombres donnez de la Moitié de la Racine quarée de l'excez du double du premier Nombre donné sur le quarré de la même difference, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx + yy \sim la.$$

$$a - x + y \sim b.$$

Dans la seconde $a - x + y \sim b$, on trouvera $x \sim y + a - b$, & la premiere $xx + yy \sim la$, se changera en celle-cy, $2yy + 2ay + aa - 2by - 2ab + bb \sim la$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{1}{2}\sqrt{2la - aa + 2ab - bb} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & au lieu de $x \sim y + a - b$, on aura $x \sim \frac{1}{2}\sqrt{2la - aa + 2ab - bb} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}\sqrt{2la - aa + 2ab - bb} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2la - aa + 2ab - bb} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 34.$$

$$b \sim 32.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

La

La determination de cette Question, à l'égard des deux Nombres donnez a, b, est que le second b, doit être moindre que le premier a, & plus grand que $a-\sqrt{la}$, c'est à dire qu'il doit être entre a, & $a-\sqrt{la}$, comme il est aisé de voir dans les deux Nombres trouvez dont le premier doit être plus grand que le second. Determination.

Il est aisé de voir que pour avoir une solution rationnelle, on doit égaler au quarré cette Puissance $2la-aa+2ab-bb$. Pour cette fin on supposera $b \sim a-c$, & l'on aura cette autre Puissance $2la-cc$, à égaler au quarré, pour le côté duquel prenant d, on trouvera $la \sim \frac{1}{2}cc+\frac{1}{2}dd$ & au lieu de $b \sim a-c$, on aura $lb \sim \frac{1}{2}cc+\frac{1}{2}dd-lc$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}c.$$
$$\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}c.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 2.$$
$$d \sim 8.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.
3.

comme auparavant: Mais si l'on suppose

$$c \sim 1.$$
$$d \sim 7.$$

on trouvera

$$a \sim 25.$$
$$b \sim 24.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

4.
3.

XXXI.

Trouver deux Nombres, tels que la somme de leurs quarrez soit égale à un Nombre donné, lequel étant ôté de la difference des mêmes Nombres, le reste soit aussy égal à un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que la somme $xx+yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $\frac{5}{49} \sim a$, lequel étant ôté de la difference $x-y$ des mêmes Nombres, le reste $x-y-a$ soit égal au Nombre donné $\frac{2}{49} \sim b$.

Canon. Si on ajoute & on ôte la Moitié de la somme des deux Nombres donnez; de la Moitié de la Racine quarée de l'excez du double du premier Nombre donné sur le quarré de la même somme, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx+yy \sim la.$$
$$x-y-a \sim b.$$

Dans la seconde $x-y-a \sim b$, on trouvera $x \sim y+a+b$, & la premiere $xx+yy \sim la$, se changera en celle-cy, $2yy+2ay+aa+2by+2ab+bb \sim la$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{1}{2}\sqrt{2la-aa-2ab-bb}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, & au lieu de $x \sim y+a+b$, on aura $x \sim \frac{1}{2}\sqrt{2la-aa-2ab-bb}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels;

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2la-aa-2ab-bb}+\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b.$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2la-aa-2ab-bb}-\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim \tfrac{5}{49}.$$
$$b \sim \tfrac{2}{49}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\tfrac{2,1}{7}.$$

XXXII.

Trouver deux Nombres, tels que la somme de leurs quarrez soit égale à Un Nombre donné, lequel étant ajouté à la somme des Mêmes Nombres, la somme soit aussy égale à Un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que la somme $xx+yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $34 \sim a$, lequel étant ajouté à la somme $x+y$ des mêmes nombres, la somme $x+y+a$ soit égale au Nombre donné $42 \sim b$.

Canon. Si à l'excez du second Nombre donné sur le premier, on ajoute & on ôte la Racine quarrée de l'excez du double du premier sur le quarré de la difference des deux nombres donnez, les moitiez de la somme & du reste donneront les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx+yy \sim la.$$
$$x+y+a \sim b.$$

Dans la seconde $x+y+a \sim b$, on trouvera $x \sim b-a-y$, & la premiere $xx+yy \sim la$, se changera en celle-cy, $aa-2ab+bb+2ay-2by+2yy \sim la$,

dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{2la - aa + 2ab - bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{2la - aa + 2ab - bb}.$$

$$\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{2la - aa + 2ab - bb}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 34.$$

$$b \sim 42.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XXXIII.

Trouuer deux Nombres, tels que la somme de leurs quarrez soit égale à Un Nombre donné, lequel étant ôté de la somme des Mêmes Nombres, le reste soit aussy égal à Un Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que la somme $xx + yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $\frac{5}{9} \sim a$, lequel étant ôté de la somme $x + y$ des mêmes Nombres, le reste $x + y - a$ soit égal au Nombre donné $\frac{4}{9} \sim b$.

Si à la Moitié de la somme des deux Nombres donnez on ajoute & on ôte la moitié de la Racine quarrée de l'excez du double du premier Nombre donné sur le quarré de la somme des deux nombres donnez; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx + yy \sim la.$$

$$x + y - a \sim b.$$

Dans la premiere $xx + yy \sim la$, on trouuera $x \sim \sqrt{la - yy}$, & la seconde $x + y - a \sim b$, se changera en celle-cy, $\sqrt{la - yy} + y - a \sim b$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \mp \frac{1}{2}\sqrt{2la - aa - 2ab - bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{2la - aa - 2ab - bb}.$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\sqrt{2la - aa - 2ab - bb}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim \frac{5}{9}.$$

$$b \sim \frac{4}{9}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{2}{3}$.

XXXIV.

Trouuer deux Nombres, tels que la somme de leurs quarrez soit égale à Vn nombre donné, duquel si on ôte la somme des mêmes Nombres, le reste soit aussy égal à Vn nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

ensorte que la somme xx+yy de leurs quarrez soit égale au Nombre donné 34 ∾ a, duquel si on ôte la somme x+y des mêmes Nombres, le reste a−x−y soit égal au Nombre donné 26 ∾ b.

Canon. Si à la Moitié du premier Nombre donné diminué du second on ajoute & on ôte la Moitié de la Racine quarrée de l'excez du double du premier Nombre donné sur le quarré de la difference des deux Nombres donnez, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

xx+yy ∾ la.

a−x−y ∾ b.

Dans la seconde a−x−y ∾ b, on trouuera x ∾ a−b−y, & la premiere xx+yy ∾ la, se changera en celle-cy, aa−2ab+bb−2ay+2by+2yy ∾ la, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \mp \sqrt{2la - aa + 2ab - bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{2la - aa + 2ab - bb}.$$

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\sqrt{2la - aa + 2ab - bb}.$$

Parceque nous auons supposé

a ∾ 34.

b ∾ 26.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XXXV.

Trouuer deux Nombres, tels que la somme de leurs quarrez soit égale à Vn Nombre donné, lequel étant ajouté à la difference des mêmes quarrez, la somme soit aussy égale à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

ensorte que la somme xx+yy de leurs quarrez soit égale au

Nombre donné 34 $\sim$ ab, lequel étant ajouté à la difference $xx-yy$ des Mêmes quarrez la somme $xx-yy+ab$ soit égale au Nombre donné 50 $\sim$ cd.

La Racine quarrée de la Moitié du second Nombre donné est le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, & la Racine quarrée de l'excez du premier Nombre donné sur la Moitié du second est le plus petit. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations

$$xx+yy \sim ab.$$

$$xx-yy+ab \sim cd.$$

dont la somme & la difference donnent ces deux autres Equations,

$$2xx+ab \sim ab+cd.$$

$$2yy-ab \sim ab-cd.$$

dans lesquelles on trouuera $x \sim \sqrt{\frac{1}{2}cd}$, & $y \sim \sqrt{ab-\frac{1}{2}cd}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}cd}.$$

$$\sqrt{ab-\tfrac{1}{2}cd}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$ab \sim 34.$$

$$cd \sim 50.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XXXVI.

Trouuer deux Nombres, tels que la somme de leurs quarrez soit égale à Vn Nombre donné, duquel si on ôte la difference des Mêmes quarrez, le reste soit aussy égal à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

en sorte que la somme $xx+yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné 34 $\sim$ ab, duquel si on ôte la difference $xx-yy$ des mêmes quarrez, le reste $ab-xx+yy$ soit égal au Nombre donné 18 $\sim$ cd.

La Racine quarrée de la Moitié du second Nombre donné est le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, & la Racine quarrée de l'excez du premier Nombre donné sur la Moitié du second est le plus grand. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx+yy \backsim ab.$$

$$ab-xx+yy \backsim cd.$$

Dans la premiere $xx+yy \backsim ab$, on trouvera $xx \backsim ab-yy$, & la Seconde $ab-xx+yy \backsim cd$, se changera en celle-cy, $2yy \backsim cd$, dans laquelle on trouvera $y \backsim \sqrt{\frac{1}{2}cd}$, & au lieu de $xx \backsim ab-yy$, on aura $xx \backsim ab-\frac{1}{2}cd$, & par consequent $x \backsim \sqrt{ab-\frac{1}{2}cd}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{ab-\tfrac{1}{2}cd}.$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}cd}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$ab \backsim 34.$$

$$cd \backsim 18.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XXXVII.

Trouver deux Nombres, tels que la somme de leurs quarrez soit égale à Un Nombre donné, lequel étant ajouté au produit des mêmes Nombres, la somme soit aussy égale à Un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

ensorte que la somme $xx+yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $34 \backsim ab$, lequel étant ajouté au produit xy des mêmes Nombres, la somme $xy+ab$ soit égale au Nombre donné $49 \backsim cd$.

Canon. Si à la Moitié du premier Nombre donné on ajoute & on ôte la Moitié de la Racine quarrée de l'excez du quarré de la Moitié du premier Nombre donné sur le quarré de la difference des deux Nombres donnez; on aura les quarrez des deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx+yy \backsim ab.$$

$$xy+ab \backsim cd.$$

Dans la premiere $xx+yy \backsim ab$, on trouvera $xx \backsim ab-yy$, & dans la Seconde $xy+ab \backsim cd$, on trouvera $x \backsim \frac{cd-ab}{y}$, & par consequent $xx \backsim \frac{aabb-2abcd+ccdd}{yy}$. C'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{aabb-2abcd+ccdd}{yy} \backsim ab-yy$, dans laquelle on trouvera

$yy \sim \frac{1}{2}ab \mp \frac{1}{2}\sqrt{8abcd-3aabb-4ccdd}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{2}\sqrt{8abcd-3aabb-4ccdd}}.$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}ab-\tfrac{1}{2}\sqrt{8abcd-3aabb-4ccdd}}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$ab \sim 34.$$

$$cd \sim 19.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

3.

XXXVIII.

Trouver deux Nombres, tels que la somme de leurs quarrez soit égale à un nombre donné, duquel si on ôte leur produit, le reste soit aussy égal à un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que la somme $xx+yy$ de leurs quarrez soit égale au Nombre donné $34 \sim ab$, duquel si on ôte leur produit xy, le reste $ab-xy$ soit égal au Nombre donné $19 \sim cd$.

Si à la Moitié du premier Nombre donné on ajoute & on ôte la Moitié de la Racine quarrée de l'excez du quarré de la Moitié du premier Nombre donné sur le quarré de la difference des deux Nombres donnez; on aura les quarrez des deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xx+yy \sim ab.$$

$$ab-xy \sim cd.$$

Dans la premiere $xx+yy \sim ab$, on trouvera $xx \sim ab-yy$, & dans la seconde $ab-xy \sim cd$, on trouvera $x \sim \frac{ab-cd}{y}$, & par consequent $xx \sim \frac{aabb-2abcd+ccdd}{yy}$. C'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{aabb-2abcd+ccdd}{yy} \sim ab-yy$, dans laquelle on trouvera $yy \sim \frac{1}{2}ab \mp \frac{1}{2}\sqrt{8abcd-3aabb-4ccdd}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{2}\sqrt{8abcd-3aabb-4ccdd}}.$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}ab-\tfrac{1}{2}\sqrt{8abcd-3aabb-4ccdd}}$$

Parceque Nous avons supposé

$$ab \sim 34.$$

$$cd \sim 19.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XXXIX.

Trouver deux Nombres, dont le produit soit égal à un Nombre donné, lequel étant ajouté à leur difference, la somme soit aussy égale à un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

dont le produit xy soit égal au Nombre donné $15 \sim a$, lequel étant ajouté à leur difference $x-y$, la somme $x-y+a$ soit égale au Nombre donné $17 \sim b$.

Canon. Si on ajoute & on ôte la Moitié de l'excez du second Nombre donné sur le premier, de la Moitié de la Racine quarée de la somme du quadruple du premier Nombre donné & du quarré de la difference des deux Nombres donnez; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$xy \sim la$.

$x-y+a \sim b$.

Dans la premiere $xy \sim la$, on trouvera $x \sim \frac{la}{y}$, & la deuxieme $x-y+a \sim b$, se changera en celle-cy, $\frac{la}{y}-y+a \sim b$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{1}{2}\sqrt{4la+aa-2ab+bb}+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, & au lieu de $x \sim \frac{la}{y}$, on aura $x \sim \frac{1}{2}\sqrt{4la+aa-2ab+bb}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{1}{2}\sqrt{4la+aa-2ab+bb}+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$.

$\frac{1}{2}\sqrt{4la+aa-2ab+bb}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$.

Parceque nous avons supposé

$a \sim 15$.

$b \sim 17$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

dont la somme est égale à la Racine quarée du quadruple du plus grand des deux Nombres donnez augmenté du quarré de leur difference.

XL.

XL.

Trouver deux Nombres, dont le produit soit égal à Un Nombre donné, lequel étant ôté de leur difference, le reste soit aussy égal à Un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont le produit xy soit égal au Nombre donné $\frac{2}{27} \sim a$, lequel étant ôté de leur difference $x-y$, le reste $x-y-a$ soit égal au Nombre donné $\frac{1}{27} \sim ab$.

Si à la Moitié de la Racine quarrée de la somme du quarré de la somme des deux Nombres donnez & du quadruple du premier, on ajoute & on ôte la Moitié de la somme des deux Nombres donnez, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xy \sim la.$$

$$x-y-a \sim b.$$

Dans la premiere $xy \sim la$, on trouvera $x \sim \frac{la}{y}$, & la deuxieme $x-y-a \sim b$, se changera en celle-cy, $\frac{la}{y}-y-a \sim b$, ou $yy+ay+by \sim la$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{1}{2}\sqrt{4la+aa+2ab+bb}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, & au lieu de $x \sim \frac{la}{y}$, on aura $x \sim \frac{1}{2}\sqrt{4la+aa+2ab+bb}+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{4la+aa+2ab+bb}+\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}b.$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{4la+aa+2ab+bb}-\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim \frac{2}{27}.$$

$$b \sim \frac{1}{27}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,\,2}{9}.$$

XLI.

Trouver deux Nombres, dont le produit soit égal à Un Nombre donné, duquel si on ôte leur difference, le reste soit aussy égal à Un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont le produit xy soit égal au Nombre donné $15 \sim a$, duquel si on ôte leur difference $x-y$, le reste $a-x+y$ soit égal au Nombre donné $13 \sim b$.

Canon. Si à la moitié de la Racine quarrée de la somme du quarré de la difference des deux Nombres donnez, & du quadruple du premier, on ajoute & on ôte la moitié de l'excez du premier Nombre donné sur le second, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xy \sim la.$$

$$a - x + y \sim b.$$

Dans la premiere $xy \sim la$, on trouuera $x \sim \frac{la}{y}$, & la deuxieme $a - x + y \sim b$, se changera en celle-cy, $a - \frac{la}{y} + y \sim b$, ou $yy + ay - by \sim la$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{1}{2}\sqrt{4la + aa - 2ab + bb} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & au lieu de $x \sim \frac{la}{y}$, on aura $x \sim \frac{1}{2}\sqrt{4la + aa - 2ab + bb} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}\sqrt{4la + aa - 2ab + bb} + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4la + aa - 2ab + bb} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \sim 15.$$

$$b \sim 13.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XLII.

Trouuer deux Nombres, dont le produit soit égal à un Nombre donné, lequel étant ajouté à leur somme, la somme qui viendra soit aussy égale à un Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont le produit xy soit égal au Nombre donné $15 \sim a$, lequel étant ajouté à leur somme $x + y$, la somme $x + y + a$ soit égale au Nombre donné $23 \sim b$.

Canon. Si à l'excez du second Nombre donné sur le premier, on ajoûte & on ôte la Racine quarrée de l'excez du quarré de la difference des deux Nombres donnez sur le quadruple du premier; les moitiez de la somme & du reste donneront les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xy \sim la.$$

$$x + y + a \sim b.$$

Dans la premiere $xy \backsim la$, on trouuera $x \backsim \frac{la}{y}$, & la seconde $x+y+a \backsim b$, se changera en celle-cy, $\frac{la}{y}+y+a \backsim b$, ou $yy+ay-by \backsim -la$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{aa-2ab+bb-4la}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a+\sqrt{aa-2ab+bb-4la}.$$
$$\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\sqrt{aa-2ab+bb-4la}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 15.$$
$$b \backsim 23.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XLIII.

Trouuer deux Nombres, dont le produit soit égal à Vn Nombre donné, lequel étant ôté de leur somme, le reste soit aussy égal à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont le produit xy soit égal au Nombre donné $\frac{3}{8} \backsim a$, lequel étant ôté de leur somme $x+y$, le reste $x+y-a$ soit égal au Nombre donné $\frac{7}{8} \backsim b$.

Si à la moitié de la somme des deux Nombres donnez on ajoûte & on ôte la moitié de la Racine quarée de l'excez du quarré de la somme des deux Nombres donnez sur le quadruple du premier, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xy \backsim la.$$
$$x+y-a \backsim b.$$

Dans la premiere $xy \backsim la$, on trouuera $x \backsim \frac{la}{y}$, & la deuxieme $x+y-a \backsim b$, se changera en celle-cy, $\frac{la}{y}+y-a \backsim b$, ou $yy-ay-by \backsim -la$, dans laquelle on trouuera $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b \mp \frac{1}{2}\sqrt{aa+2ab+bb-4la}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{aa+2ab+bb-4la}.$$
$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\sqrt{aa+2ab+bb-4la}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim \frac{3}{8}.$$
$$b \backsim \frac{7}{8}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,2}{4}.$$

XLIV.

Trouver deux Nombres, dont le produit soit égal à Vn nombre donné, duquel si on ôte leur somme, le reste soit aussy égal à Vn Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont le produit xy soit égal au Nombre donné $15 \sim a$, duquel si on ôte leur somme $x+y$, le reste $a-x-y$ soit égal au Nombre donné $7 \sim b$.

canon. Si à l'excez du premier Nombre donné sur le second, on ajoûte & on ôte la Racine quarée de l'excez du quarré de la difference des deux Nombres donnez sur le quadruple du premier, les moitiez de la somme & du reste donneront les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$xy \sim la.$

$a-x-y \sim b.$

Dans la premiere $xy \sim la$, on trouvera $x \sim \frac{la}{y}$, & la seconde $a-x-y \sim b$, se changera en celle-cy, $a-\frac{la}{y}-y \sim b$, ou $yy+ay-by \sim -la$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b \pm \sqrt{aa-2ab+bb-4la}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\sqrt{aa-2ab+bb-4la}.$

$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}\sqrt{aa-2ab+bb-4la}.$

Parceque Nous auons supposé

$a \sim 15.$

$b \sim 7.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XLV.

Trouver deux Nombres, dont le produit soit égal à Vn Nombre donné, lequel étant ajouté à la somme de leurs quarez, la somme qui viendra soit aussy égale à Vn Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont le produit xy soit égal au Nombre donné $15 \sim ab$, lequel

étant ajouté à la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, la somme $xx+yy+ab$ soit égale au Nombre donné $49 \sim cd$.

Si à l'excez du second Nombre donné sur le premier, on ajoute & on ôte la Racine quarrée de l'excez du quarré de la difference des deux Nombres donnez sur le quadruple du quarré du premier, les Moitiez de la somme & du reste donneront les quarrez des deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xy \sim ab.$$

$$xx+yy+ab \sim cd.$$

Dans la premiere $xy \sim ab$, on trouuera $x \sim \frac{ab}{y}$, & la deuxieme $xx+yy+ab \sim cd$, se changera en celle-cy, $\frac{aabb}{yy}+yy+ab \sim cd$, dans laquelle on trouuera $yy \sim \frac{1}{2}cd - \frac{1}{2}ab \mp \frac{1}{2}\sqrt{aabb-2abcd+ccdd-4aabb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}cd-\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{2}\sqrt{aabb-2abcd+ccdd-4aabb}}.$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}cd-\tfrac{1}{2}ab-\tfrac{1}{2}\sqrt{aabb-2abcd+ccdd-4aabb}}.$$

Parceque nous auons supposé

$$ab \sim 15.$$

$$cd \sim 49.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XLVI.

Trouuer deux Nombres, dont le produit soit égal à Vn Nombre donné, lequel étant ôté de la somme de leurs quarrez, le reste soit aussy égal à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont le produit xy soit égal au Nombre donné $15 \sim ab$, lequel étant ôté de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, le reste $xx+yy-ab$ soit égal au Nombre donné $19 \sim cd$.

Si à la Moitié de la somme des deux Nombres donnez, on ajoûte & on ôte la moitié de la Racine quarrée de l'excez du quarré de la somme des deux Nombres donnez sur le quadruple du premier, on aura les quarrez des deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$xy \sim ab.$

$xx+yy-ab \sim cd.$

Dans la premiere $xy \sim ab$, on trouvera $x \sim \frac{ab}{y}$, & la deuxieme $xx+yy-ab \sim cd$, se changera en celle-cy, $\frac{aabb}{yy}+yy-ab \sim cd$, dans laquelle on trouvera $yy \sim \frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd \mp \frac{1}{2}\sqrt{ccdd+2abcd-3aabb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd+\frac{1}{2}\sqrt{ccdd+2abcd-3aabb}}.$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd-\frac{1}{2}\sqrt{ccdd+2abcd-3aabb}}.$$

Parceque nous avons supposé

$ab \sim 15.$

$cd \sim 19.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XLVII.

Trouver deux Nombres, dont le produit soit égal à un Nombre donné, lequel étant ajouté à la difference de leurs quarrez, la somme soit aussy égale à un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont le produit xy soit égal au Nombre donné $15 \sim ab$, lequel étant ajouté à la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, la somme $xx-yy+ab$ soit égale au Nombre donné $31 \sim cd$.

Canon. Si à la moitié de la Racine quarrée de la somme du quarré de la difference des deux Nombres donnez, & du quadruple du quarré du premier, on ajoute & on ôte la moitié du second Nombre donné sur le premier; on aura les quarrez des deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$xy \sim ab.$

$xx-yy+ab \sim cd.$

Dans la premiere $xy \sim ab$, on trouvera $x \sim \frac{ab}{y}$, & la seconde $xx-yy+ab \sim cd$, se changera en celle-cy, $\frac{aabb}{yy}-yy+ab \sim cd$, dans laquelle on trouvera $yy \sim \frac{1}{2}\sqrt{5aabb-2abcd+ccdd}+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}cd$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5aabb-2abcd+ccdd}-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd}.$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5aabb-2abcd+ccdd}+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}dd}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$ab \backsim 15.$$

$$cd \backsim 31.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XLVIII.

Trouver deux Nombres, dont le produit soit égal à un Nombre donné, lequel étant ôté de la difference de leurs quarrez, le reste soit aussy égal à un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont le produit xy soit égal au Nombre donné $15 \backsim ab$, lequel étant ôté de la difference $xx - yy$ de leurs quarrez, le reste $xx - yy - ab$ soit égal au nombre donné $1 \backsim cd$.

Si à la somme du quarré de la somme des deux Nombres donnez, & du quadruple du quarré du premier, on ajoute & on ôte la somme des deux nombres donnez, les moitiez de la somme & du reste donneront les quarrez des deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xy \backsim ab.$$

$$xx - yy - ab \backsim cd.$$

Dans la premiere $xy \backsim ab$, on trouvera $x \backsim \frac{ab}{y}$, & la seconde $xx - yy - ab \backsim cd$, se changera en celle-cy, $\frac{aabb}{yy} - yy - ab \backsim cd$, dans laquelle on trouvera $yy \backsim \frac{1}{2}\sqrt{5aabb + 2abcd + ccdd} - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}cd$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5aabb + 2abcd + ccdd} + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}cd}.$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{5aabb + 2abcd + ccdd} - \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{2}cd}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$ab \backsim 15.$$

$$cd \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XLIX.

Trouver deux nombres, dont le produit soit égal à Un Nombre donné, duquel si on ôte la difference de leurs quarrez: le reste soit aussy égal à Un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

dont le produit xy soit égal au nombre donné $20 \backsim ab$, duquel si on ôte la difference $xx-yy$ de leurs quarrez le reste $ab-xx+yy$ soit égal au nombre donné $11 \backsim cd$.

canon. Si à la moitié de la Racine quarrée de la somme du quarré de la difference des deux Nombres donnez & du quadruple du quarré du premier; on ajoute & on ôte la moitié de l'excez du premier Nombre donné sur le second; on aura les quarrez des deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$xy \backsim ab.$$

$$ab-xx+yy \backsim cd.$$

Dans la premiere $xy \backsim ab$, on trouvera $x \backsim \frac{ab}{y}$, & la deuxieme $ab-xx+yy \backsim cd$, se changera en celle-cy, $ab-\frac{aabb}{yy}+yy \backsim cd$, dans laquelle on trouvera $yy \backsim \frac{1}{2}\sqrt{5aabb-2abcd+ccdd}-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5aabb-2abcd+ccdd}+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}cd}.$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5aabb-2abcd+ccdd}-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd}.$$

Parceque nous avons supposé

$$ab \backsim 20.$$

$$cd \backsim 11.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

4.

Question VII.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur difference à l'excez de la difference de leurs quarrez sur Un Nombre donné, soit donnée.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-bc$, de la difference $xx-yy$

$xx - yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $10 \backsim bc$, comme $1 \backsim r$, à $3 \backsim s$.

Si on multiplie la somme du nombre donné & du quarré de quelqu'autre nombre, par le quarré du premier terme de la raison donnée, & que du produit on ôte le quarré de la moitié du second terme, & qu'on divise le reste par l'excez du solide sous le quarré du premier terme & le double de cet autre nombre sur le plan des deux termes de la raison donnée; on aura le premier des deux nombres qu'on cherche: & pour avoir le second, on ajoutera à la difference du premier nombre trouvé & de cet autre nombre, le quotient qui viendra en divisant le second terme de la raison donnée par le double du premier. canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx - ly,\ xx - yy - bc :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$lsx - lsy \backsim rxx - ryy - bcr.$$

dans laquelle on trouvera $y \backsim \frac{ls}{2r} + \sqrt{xx - \frac{lsx}{r} - bc + \frac{llss}{4rr}}$. C'est pourquoy pour avoir une solution rationnelle, il faudra égaler au quarré cette Puissance $xx - \frac{lsx}{r} - bc + \frac{llss}{4rr}$, pour le côté duquel prenant $x - d$, on trouvera $x \backsim \frac{4ddrr + 4bcrr - llss}{8drr - 4lrs}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4ddrr + 4bcrr - llss,\ 4bcrr - 4ddrr + 8ldrs - 3llss}{8drr - 4lrs}.$$

Parceque nous avons supposé

$r \backsim 1.$

$s \backsim 3.$

$bc \backsim 10.$

Si l'on suppose

$d \backsim 2.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{47.\ 45}{4}.$

mais si l'on suppose

$d \backsim 3\frac{1}{2}.$

ou

$d \backsim 6\frac{1}{2}.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur

5.

3.

comme dans Diophante.

La determination de cette Question, à l'égard du nombre

Determination. indeterminé d, qui a été introduit dans l'analyse, est que ce nombre d, doit être plus grand que $\frac{ls}{2r}$, & moindre que $\frac{ls}{r}+\sqrt{bc+\frac{llss}{4rr}}$, c'est à dire qu'il doit être entre $\frac{ls}{2r}$, & $\frac{ls}{r}+\sqrt{bc+\frac{llss}{4rr}}$.

Demonstration. Car on void dans le denominateur commun aux deux Nombres trouvez, $8drr-4lrs$, que $8drr$ doit être plus grand que $4lrs$, c'est pourquoy en divisant par $8rr$, on aura $d \oplus \frac{ls}{2r}$. Ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit demontrer.

Dans le Numerateur du second Nombre trouvé $4bcrr-4ddrr+8ldrs-3llss$, on a cette inégalité, $4ddrr-8ldrs \ominus 4bcrr-3llss$, c'est pourquoy en divisant par $4rr$, on aura celle-cy, $dd-\frac{2lsd}{r} \ominus bc-\frac{3llss}{4rr}$, dans laquelle on trouvera $d \ominus \frac{ls}{r}+\sqrt{bc+\frac{llss}{4rr}}$. Ce qui restoit à demontrer.

Si vous voulez une solution plus simple, au lieu de prendre $x-d$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance $xx-\frac{lsx}{r}-bc+\frac{llss}{4rr}$, prenez $x-a-\frac{ls}{2r}$, & vous trouverez $x \backsim \frac{bcr+las+aar}{2ar}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{bcr+las+aar,\ bcr+las-aar}{2ar}.$$

Parceque nous avons supposé

$r \backsim 1.$

$s \backsim 3.$

$bc \backsim 10.$

Si l'on suppose

$a \backsim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

7.

6.

& si l'on suppose

$a \backsim 2$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

3.

comme dans Diophante.

On tire de cette seconde Solution, le Canon suivant;

Canon. Si à la somme du quotient du second terme de la raison donnée, divisé par le premier, & du quotient du Nombre donné divisé par quelqu'autre Nombre, on ajoute & on ôte cét autre Nombre, les Moitiez de la somme & du reste donneront les deux Nombres qu'on cherche.

La determination de cette Question ainsy resolue, à l'égard du

Nombre indeterminé a, est qu'il doit être plus grand ou moindre que $\frac{ls}{2r}+\sqrt{bc+\frac{llss}{4rr}}$, comme il est aisé de voir dans le Numerateur $bcr+las-aar$, du second Nombre trouvé. Determination.

Le canon precedent se peut énoncer plus generalement en cette sorte.

Si on diuise la somme & la difference du Nombre donné & du quarré de quelqu'autre Nombre, par le double de cét autre Nombre, & qu'à chaque quotient on ajoute le second terme de la raison donnée, diuisé par le premier, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

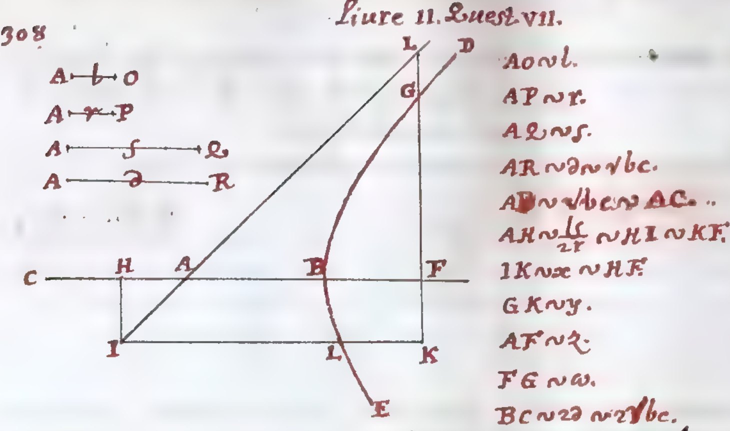
On aura une solution semblable à la precedente, par la Metode de Diophante, qui est telle.

Si l'on suppose $x-y \sim a$, pour auoir $x \sim a+y$, l'analogie precedente $lx-ly,\ xx-yy-bc :: r,\ s$, se changera en celle-cy, $la,\ aa+2ay-bc :: r,\ s$, d'où l'on tire cette Equation constitutiue, $las \sim aar+2ary-bcr$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{bcr+las-aar}{2ar}$, & au lieu de $x \sim a+y$, on aura $x \sim \frac{bcr+las+aar}{2ar}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant. Metode de Diophante.

La premiere Equation constitutiue $lsx-lsy \sim rxx-ryy-bcr$, ou $yy-\frac{lsy}{r} \sim xx-\frac{lsx}{r}-bc$, fait connoitre que cette Question, qui est indeterminée, est un Lieu à l'Hyperbole équilatere, comme l'on connoitra mieux en ôtant les seconds termes, sauoir en supposant $x \sim z+\frac{ls}{2r}$, pour auoir cette autre Equation, $yy-\frac{lsy}{r} \sim zz-\frac{llss}{4rr}-bc$, où l'on supposera encore $y \sim \omega+\frac{ls}{2r}$, pour auoir cette derniere Equation, $zz-bc \sim \omega\omega$, qui est un Lieu à l'Hyperbole équilatere, dont le demidiametre determiné est $\sqrt{bc}$, ou d, en supposant d, moyenne proportionnelle entre b, & c.

Pour decrire cette Hyperbole, tirez la ligne BC, égale à $2d$, ou à $2\sqrt{bc}$, pour le diametre determiné de l'Hyperbole qu'on veut decrire, de sorte que le point A, milieu de la ligne BC, sera le centre de l'Hyperbole, & son extremité B, representera le sommet de la même Hyperbole. Construction geometrique.

Decriuez donc du centre A, par le sommet B, l'Hyperbole équilatere DBE, dont les ordonnées fassent auec le diametre BF, prolongé tel angle que l'on voudra, comme BFG, & cette Hyperbole sera le Lieu qu'on cherche: de sorte que si l'on suppose $AF \sim z$, & $FG \sim \omega$, il viendra par la proprieté de l'Hyperbole, qui est que le Rectangle CFB, est égal au quarré FG, l'Equation reduite $zz-bc \sim \omega\omega$, à cause de $CF \sim z+\sqrt{bc}$, & de $BF \sim z-\sqrt{bc}$,



Mais pour determiner en lignes les deux nombres qu'on cherche, sauoir x, y, faites AH $\sim \frac{ls}{2r}$, & tirez par le point H, la droite HI, parallele à l'ordonnée FG du diametre BC, & égale à la ligne AH, & par le point I, la ligne indefinie IK, parallele au diametre BC. Prenez sur cette parallele indefinie IK, depuis le point L, où elle coupe l'Hyperbole DBE, Vn point à volonté, comme K, par lequel vous tirerez la droite KG, parallele à Vne des ordonnées du diametre BC, & les deux lignes IK, KG, representeront les deux Nombres qu'on cherche, de sorte qu'on aura IK $\sim x$, & KG $\sim y$, & $lx - ly,\ xx - yy - bc :: r, s$.

Demonstration. Car à cause de IK, ou [redacted] HF $\sim x$, & de AH $\sim \frac{ls}{2r}$, on aura AF $\sim x - \frac{ls}{2r}$, & à cause de AC $\sim$ D $\sim \sqrt{bc}$, & de AB $\sim \sqrt{bc}$, on aura CF $\sim x - \frac{ls}{2r} + \sqrt{bc}$, & BF $\sim x - \frac{ls}{2r} - \sqrt{bc}$. De plus à cause de KG $\sim y$, & de HI, ou FK $\sim \frac{ls}{2r}$, on aura FG $\sim y - \frac{ls}{2r}$, & parceque par la Nature de l'Hyperbole équilatere, le Rectangle CFB, est égal au quarré de l'ordonnée FG, on aura cette Equation, $xx - \frac{lsx}{r} + \frac{llss}{4rr} - bc \sim yy - \frac{lsy}{r} + \frac{llss}{4rr}$, de laquelle ôtant $\frac{llss}{4rr}$, on aura $xx - \frac{lsx}{r} - bc \sim yy - \frac{lsy}{r}$, & par l'antithese on aura cette autre Equation, $xx - yy - bc \sim \frac{lsx - lsy}{r}$, & en multipliant par r, on aura cette derniere Equation, $rxx - ryy - bcr \sim lsx - lsy$, de laquelle on tire cette analogie $lx - ly,\ xx - yy - bc :: r, s$. Ce qu'il faloit demontrer.

Nous ajouterons icy les Questions suiuantes

I.

Trouuer deux Nombres, tels que la raison de leur difference à l'excez d'Vn nombre donné sur la difference de leurs quarrez soit donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $bc-xx+yy$ du nombre donné $24 \sim bc$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarez, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$.

Si on divise l'excez du produit sous le premier terme de la raison donnée & la somme du nombre donné & du quarré de quelqu'autre nombre, sur le produit sous cet autre nombre & le premier terme, on aura le plus grand des deux nombres qu'on cherche, duquel ôtant ce même autre nombre, on aura le plus petit. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx-ly,\ bc-xx+yy :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$lsx-lsy \sim bcr-rxx+ryy.$$

laquelle en supposant $x \sim y+a$, se changera en celle-cy, $las \sim bcr-2ary-aar$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{bcr-aar-las}{2ar}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bcr+aar-las,\ bcr-aar-las}{2ar}.$$

Parceque nous avons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$
$$bc \sim 24.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{23,\ 21}{2}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

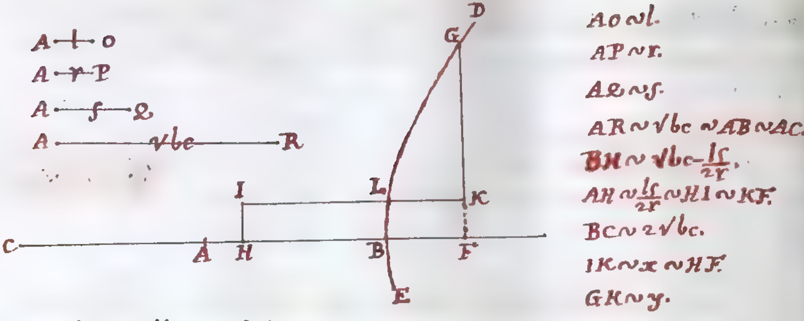
les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

6.

4.

La premiere Equation constitutive $lsx-lsy \sim bcr-rxx+ryy$, ou $yy+\frac{lsy}{r}+bc \sim xx+\frac{lsx}{r}$, fait connoitre que cette Question est aussy un Lieu à l'Hyperbole equilatere, dont la description sera telle.

Ayant tiré la ligne $BC \sim 2\sqrt{bc}$, pour le diametre determiné de l'Hyperbole qu'on veut decrire, en sorte que son point de milieu A, soit le centre de l'Hyperbole, & l'extremité B, le sommet, decrivez du centre A, par le sommet B, l'Hyperbole equilatere DBE, comme dans la Question precedente, & cette Hyperbole ainsy decrite sera le Lieu qu'on cherche, & la demonstration s'en fera de la même façon qu'auparavant, mais la ligne HL, doit Construction geometrique.



être tirée de l'autre côté, comme vous voyez dans cette figure.

II.

Trouuer deux Nombres, tels que la raison de leur difference à la somme d'vn nombre donné & de la difference de leurs quarrez soit donnée.

On propose de trouuer deux nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit à la somme $bc+xx-yy$ du Nombre donné $4 \backsim bc$, & de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez comme $1 \backsim r$, à $10 \backsim s$.

Canon. Si on diuise l'excez de la somme du produit sous le second terme de la raison donnée & vn autre Nombre quelconque, & du produit sous le premier terme & le quarré de cet autre Nombre, sous le produit sous le premier terme & le nombre donné, par le double du produit sous le premier terme & cet autre Nombre; on aura le plus grand des deux nombres qu'on cherche, duquel ôtant le nombre donné; on aura le plus petit.

Selon les conditions de la Question, on aura cette analogie,

$$lx-ly,\ bc+xx-yy :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$lsx-lsy \backsim bcr+rxx-ryy.$$

dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{las-aar-bcr}{2ar}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{las+aar-bcr,\ las-aar-bcr}{2ar}.$$

Parceque nous auons supposé

$r \backsim 1.$

$s \backsim 10.$

$bc \backsim 4.$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{13, 5}{2}$.

en supposant

$a \propto 4$.

mais en supposant

$a \propto 3$.

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{35, 17}{6}$.

& si l'on suppose

$a \propto 2$.

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

3.

On connoitra comme dans la premiere des ces Questions ajoûtées, que cette Question est un Lieu à l'Hyperbole équilatere, dont la construction est toutafait semblable à la premiere, & alors la Construction geometrique.

$AO \propto l$.

$AP \propto r$.

$AQ \propto s$.

$AR \propto \sqrt{bc} \propto AB \propto AC$.

$AI \propto \sqrt{\frac{llss}{2rr}}$.

$AH \propto \frac{ls}{2r} \propto HI \propto KF$.

$BC \propto 2\sqrt{bc}$.

$KG \propto x$.

$KI \propto y$.

$FG \propto z$.

$AF \propto \omega$.

ligne KG, representera le nombre x, & la ligne IK, le nombre y, comme l'on connoitra en reduisant l'Equation constitutive $lsx - lsy \propto bcr + rxx + ryy$, ou $xx - \frac{lsx}{r} + bc \propto -yy - \frac{lsy}{r}$, par une metode semblable à celle de la Quest. VII. & l'on trouvera cette Equation reduite, $\omega\omega \propto zz - bc$. Mais parceque le nombre x, doit être plus grand que le nombre y, la ligne KG, doit être aussy plus grande que la ligne KI, & neanmoins elle est essentiellement plus petite, comme l'on connoitra aisément par le moyen de l'asymptote AL, qui passera necessairement par le point I, à cause des deux lignes égales HA, HI, ce qui fait que les deux KI, KL, sont aussy égales, & que par consequent la ligne KG, ou x, est plus petite que la ligne KI, ou y. C'est pourquoy ce Lieu ainsy decrit ne satisfait à la Question qu'improprement.

III.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur Somme à l'excez de la somme de leurs quarrez sur un nombre donné, soit donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la somme $x+y$ soit à l'excez $xx+yy-bc$, de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $4 \sim bc$, comme $3 \sim r$, à $1 \sim s$.

Canon. *Le premier des deux nombres qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & le second se trouvera en ajoutant au second terme de la raison donnée divisé par le double du premier, la Racine quarrée de l'excez de la somme du Nombre donné, du produit sous le quotient precedent & la moitié du premier Nombre trouvé, & du quarré du même quotient, sur le quarré du premier Nombre trouvé.*

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx+ly,\ xx+yy-bc :: r, s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$lsx+lsy \sim rxx+ryy-bcr.$$

dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx + bc}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$

$$\frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx + bc}.$$

Parceque nous avons supposé

$$r \sim 3.$$

$$s \sim 1.$$

$$bc \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$1.$$

$$2.$$

en supposant

$$x \sim 1.$$

ou

$$x \sim 2.$$

mais en supposant

$$x \sim \frac{3}{5}.$$

ou

$$x \sim \frac{32}{15}.$$

les

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{9,32}{15}$.

On connoit aisément par l'Equation constitutive $lsx+lsy \sim rxx+ryy-bcr$, ou $xx-\frac{lsx}{r} \sim \frac{lsy}{r}-yy+bc$, que cette Question est Vn Lieu à Vn cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{bc+\frac{llss}{2rr}}$, & dont la construction sera telle.

Ayant fait le triangle rectangle ABC, dont chacun des côtez AB, BC, soit égal à $\frac{ls}{2r}$, tirez par l'extremité C, de l'hypotenuse AC, la Droite CD, égale à $\sqrt{bc}$, & perpendiculaire à la même hypotenuse AC, — *Construction Geometrique.*

$AB \sim \frac{ls}{2r} \sim BC \sim GE$.

$AC \sim \sqrt{\frac{llss}{2rr}}$.

$CD \sim \sqrt{bc} \sim AR$.

$AD \sim \sqrt{bc+\frac{llss}{2rr}} \sim AF$.

$IH \sim \sqrt{4bc+\frac{2llss}{rr}}$.

$AO \sim l$.

$AP \sim r$.

$AQ \sim s$.

$CE \sim x$.

$EF \sim y$.

$AG \sim x-\frac{ls}{2r}$.

$FG \sim y-\frac{ls}{2r}$.

$IG \sim \sqrt{bc+\frac{llss}{2rr}}+x-\frac{ls}{2r}$.

$GH \sim \sqrt{bc+\frac{llss}{2rr}}-x+\frac{ls}{2r}$.

& decrivez du centre A, par le point D, Vne circonference de cercle, qui sera le Lieu qu'on cherche.

Mais pour trouver en lignes les deux Nombres x, y, tirez par le point C, la ligne indefinie CE, parallele à la ligne AB, & luy tirez par son extremité E, la perpendiculaire EF, qui se trouvera terminée en F, par la circonference du cercle, & les deux lignes CE, EF, representeront les deux Nombres x, y, de sorte que si l'on suppose $CE \sim x$, & $EF \sim y$, on aura cette analogie, $lx+ly, xx+yy-bc :: r, s$.

Car à cause de $CE \sim x$, & de $EF \sim y$, on aura $FG \sim y-\frac{ls}{2r}$, $GI \sim \sqrt{bc+\frac{llss}{4rr}}+x-\frac{ls}{2r}$, & $GH \sim \sqrt{bc+\frac{llss}{4rr}}-x+\frac{ls}{2r}$, & parceque le Rectangle IGH, est égal au quarré FG, par la nature du cercle, on aura cette Equation, $bc+\frac{llss}{4rr}-xx+\frac{lsx}{r} \sim yy-\frac{lsy}{r}+\frac{llss}{4rr}$, de laquelle ôtant $\frac{llss}{4rr}$, on aura celle-cy, $bc-xx+\frac{lsx}{r} \sim yy-\frac{lsy}{r}$, ou $lsx+lsy \sim rxx+ryy-bcr$, & par consequent cette analogie, $lx+ly, xx+yy-bc :: r, s$. Ce qu'il faloit demontrer. — *Demonstration.*

IV.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur somme à l'excez d'un Nombre donné sur la somme de leurs quarrez soit donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la somme $x+y$, soit à l'excez $bc-xx-yy$, du Nombre donné $33 \backsim bc$, sur la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme $1 \backsim r$, à $4 \backsim s$.

Le premier des deux Nombres qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & le second se trouvera en ôtant le second terme de la raison donnée divisé par le double du premier, de la Racine quarrée de l'excez de la somme du Nombre donné & du quarré du quotient precedent, sur la somme du produit sous le quotient precedent & la moitié du premier Nombre trouvé, & du quarré de ce même Nombre.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx+ly,\ bc-xx-yy :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$lsx+lsy \backsim bcr-rxx-ryy.$$

dans laquelle on trouvera $y \backsim \sqrt{bc+\frac{llss}{4rr}-\frac{lsx}{r}-xx}-\frac{ls}{2r}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$
$$\sqrt{bc+\frac{llss}{4rr}-\frac{lsx}{r}-xx}-\frac{ls}{2r}.$$

Parceque nous avons supposé

$$bc \backsim 33.$$
$$r \backsim 1.$$
$$s \backsim 4.$$

Si l'on suppose

$$x \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$2.$$
$$3.$$

& si l'on suppose

$$x \backsim \frac{2}{17}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2,\ 66}{17}.$$

Mais si l'on suppose

$$x \backsim \frac{14}{13}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{14.\ 47}{13}.$$

On connoitra comme dans la Question precedente, que cette Question est Vn Lieu à Vn cercle donné, dont le Rayon est égal *Construction geometrique.*

$AB \sim \frac{ls}{2r} \sim BC \sim GE$

$AC \sim \sqrt{\frac{llss}{2rr}}$

$CD \sim \sqrt{bc} \sim AR$

$AD \sim \sqrt{bc + \frac{llss}{2rr}} \sim AF.$

$IH \sim \sqrt{4bc + \frac{2llss}{rr}}.$

$AO \sim l.$

$AP \sim r.$

$AQ \sim s.$

$CE \sim x \sim BG$

$EF \sim y.$

$AG \sim x + \frac{ls}{2r}.$

$FG \sim y + \frac{ls}{2r}.$

$IG \sim \sqrt{bc + \frac{llss}{2rr}} - x - \frac{ls}{2r}.$

$GH \sim \sqrt{bc + \frac{llss}{2rr}} + x + \frac{ls}{2r}.$

à $\sqrt{bc + \frac{llss}{2rr}}$, & dont par consequent la description est par consequent la même que la precedente, excepté que la ligne EF, change de situation, comme Vous voyez dans la figure, & alors les deux Nombres qu'on cherche x, y, seront representez par les deux lignes CE, EF, & la demonstration s'en fera comme dans la Question precedente.

V.

Trouuer deux Nombres, tels que la raison de leur somme à la somme d'Vn nombre donné & de leurs quarez soit donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la somme $x+y$ soit à la somme $bc+xx+yy$ du Nombre donné $12 \sim bc$, & de la somme $xx+yy$ de leurs quarez comme $1 \sim r$, à $5 \sim s$.

Le premier des deux Nombres qu'on cherche peut être tel que l'on Voudra, & on aura le second en ajoutant à la Moitié du quotient du second terme de la raison donnée diuisé par le premier, la Racine quarrée de l'excez de la somme du produit sous le quotient precedent & le premier Nombre trouué & du quarré de la moitié precedente, sur la somme du Nombre donné & du quarré du premier Nombre trouué. *Canon.*

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx+ly,\ xx+yy+bc :: r,s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$lsx+lsy \sim rxx+ryy+bcr.$$

dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx - bc}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$

$$\frac{ls}{2r} + \sqrt{\frac{llss}{4rr} + \frac{lsx}{r} - xx - bc}.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 5.$$

$$bc \sim 12.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$2.$$

$$3.$$

& si l'on suppose

$$x \sim \frac{13}{5}.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{13,\ 16}{5}.$$

On connoit par l'Equation constitutiue $lsx+lsy \sim rxx+ryy-bcr$, ou $xx - \frac{lsx}{r} \sim bc - \frac{lsy}{r} - yy$, que cette Question est un Lieu à un cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{llss}{2rr} - bc}$, & dont la construction est telle.

Construction geometrique. Ayant fait comme auparauant le triangle rectangle ABC, dont chacun des côtez AB, BC, soit égal à $\frac{ls}{2r}$, & ayant decrit alentour de l'hypotenuse AC, le demicercle ADC, pour y inscrire la droite CD, égale à $\sqrt{bc}$, decriuez du centre A, par le point D, une

$AB \sim \frac{ls}{2r} \sim BC.$

$CD \sim \sqrt{bc} \sim AR$

$AC \sim \sqrt{\frac{llss}{2rr}}.$

$AD \sim \sqrt{\frac{llss}{2rr} - bc}$

$IH \sim \sqrt{\frac{2llss}{rr} - 4bc}$

$AO \sim l.$

$AP \sim r.$

$AQ \sim s.$

$CE \sim x.$

$EF \sim y.$

$GF \sim y - \frac{ls}{2r}.$

circonference de cercle, qui sera le lieu qu'on cherche, dont la demonstration se fera comme auparauant.

VI.

Trouuer deux nombres, dont la difference soit à l'excez de la somme de leurs quarrez sur vn nombre donné, en raison donnée.

On propose de trouuer deux nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx+yy-bc$, de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $26 \backsim bc$, comme $1 \backsim r$, à $4 \backsim s$.

Le premier des deux nombres qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & on aura le second en ôtant le quotient du second terme de la raison donnée diuisé par le double du premier, de la Racine quarée de l'excez de la somme du nombre donné & du quarré du quotient precedent augmenté du produit sous le même quotient & le double du premier nombre trouué, sur le quarré du même nombre trouué. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx-ly,\ xx+yy-bc :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$lsx-lsy \backsim rxx+ryy-bcr.$$

dans laquelle on trouuera $y \backsim \sqrt{\frac{llss}{4rr}+bc+\frac{lsx}{r}-xx}-\frac{ls}{2r}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

x.

$\sqrt{\frac{llss}{4rr}+bc+\frac{lsx}{r}-xx}-\frac{ls}{2r}$.

Parceque nous auons supposé

$r \backsim 1$.

$s \backsim 4$.

$bc \backsim 26$.

Si l'on suppose

$x \backsim 5$.

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

& si l'on suppose

$x \backsim 7$.

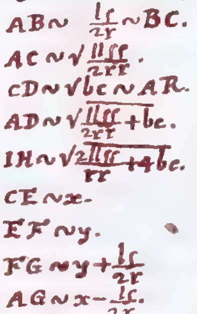
les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

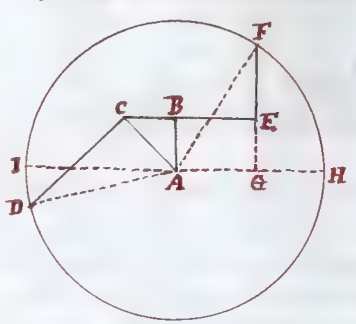
7.

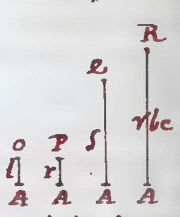
I.

On connoit par l'Equation constitutiue $lsx - lsy \backsim rxx + ryy - bcr$, ou $yy + \frac{lsy}{r} \backsim bc + \frac{lsx}{r} - xx$, que cette Question est vn Lieu à vn cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{bc + \frac{llss}{2rr}}$, & dont la construction est la même que celle de la 3.e de ces Questions ajoutées, excepté que le triangle rectangle ABC, a vne situation

Construction geometrique.


$AB \backsim \frac{ls}{2r} \backsim BC$.
$AC \backsim \sqrt{\frac{llss}{2rr}}$.
$CD \backsim \sqrt{bc} \backsim AR$.
$AD \backsim \sqrt{\frac{llss}{2rr} + bc}$.
$IH \backsim \sqrt{\frac{2llss}{rr} + 4bc}$.
$CE \backsim x$.
$EF \backsim y$.
$FG \backsim y + \frac{ls}{2r}$
$AG \backsim x - \frac{ls}{2r}$.





contraire, & que la ligne CE, est perpendiculaire à la ligne AB, comme dans la Question precedente, & alors les deux lignes CE, EF, representeront les deux Nombres qu'on cherche, & la demonstration s'en fera comme auparauant.

VII.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à l'excez d'vn nombre donné sur la somme de leurs quarrez en raison donnée.

On propose de trouuer deux nombres

x.

y.

dont la difference $x - y$ soit à l'excez $bc - xx - yy$ du nombre donné $42 \backsim bc$, sur la somme $xx + yy$ de leurs quarrez, comme $1 \backsim r$, à $4 \backsim s$.

Canon.

Le plus grand des deux nombres qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & le plus petit se trouuera en ajoutant la moitié du quotient du second terme de la raison donnée diuisé par le premier, à la Racine quarrée de l'excez de la somme du nombre donné & du quarré de la moitié precedente, sur la somme du produit sous le quotient precedent & le plus grand nombre trouué & du quarré de même nombre.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx - ly,\ bc - xx - yy :: r,\ s.$$

dans laquelle on trouuera cette Equation constitutiue,

$$lsx - lsy \sim bcr - rxx - ryy.$$

qui donne $y \sim \frac{ls}{2r} + \sqrt{bc + \frac{llss}{4rr} - \frac{lsx}{r} - xx}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$

$$\frac{ls}{2r} + \sqrt{bc + \frac{llss}{4rr} - \frac{lsx}{r} - xx}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 4.$$

$$bc \sim 42.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$

$$3.$$

& si l'on suppose

$$x \sim \frac{81}{17}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{81,\ 69}{17}.$$

On connoit par l'Equation constitutiue $lsx - lsy \sim bcr - rxx - ryy$, ou $xx + \frac{lsx}{r} \sim bc + \frac{lsy}{r} - yy$, que cette Question est un Lieu à un cercle donné, dont le rayon est $\sqrt{\frac{llss}{2rr} + bc}$, & dont la construction est la même que celle la 4e de ces Questions ajoutées, Construction Geometrique.

$AB \sim \frac{ls}{2r} \sim BC.$

$AC \sim \sqrt{\frac{llss}{2rr}}$

$CD \sim \sqrt{bc} \sim AR.$

$AD \sim \sqrt{bc + \frac{llss}{2rr}}.$

$IH \sim \sqrt{4bc + \frac{2llss}{rr}}.$

$AO \sim l.$

$AP \sim r.$

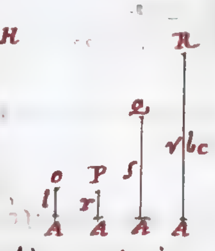
$AQ \sim s.$

$CE \sim x.$

$EF \sim y.$

$GF \sim y - \frac{ls}{2r}.$

$AG \sim x + \frac{ls}{2r}$



excepté que la perpendiculaire EF, a une situation contraire, comme vous voyez dans cette figure, où les deux lignes CE, EF, representent les deux Nombres qu'on cherche, & la demonstration s'en fera comme auparauant. Il y a une determination à faire, &c.

VIII.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit à la somme d'Un Nombre donné & de la somme de leurs quarrez en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la difference $x-y$ soit à la somme $xx+yy+bc$, du Nombre donné $16 \sim bc$, & de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $25 \sim s$.

Canon. Le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & on aura le plus petit en ôtant la moitié du quotient du second terme de la raison donnée divisé par le premier, de la Racine quarrée de l'excez de la somme du produit sous le quotient precedent & le plus grand Nombre trouvé & du quarré de la moitié precedente, sur la somme du Nombre donné & du quarré du plus grand Nombre trouvé.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$1x-1y,\ xx+yy+bc :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$1sx-1sy \sim rxx+ryy+bcr.$$

dans laquelle on trouvera $y \sim \sqrt{\frac{11ss}{4rr}-bc+\frac{1sx}{r}-xx}-\frac{1s}{2r}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$
$$\sqrt{\frac{11ss}{4rr}-bc+\frac{1sx}{r}-xx}-\frac{1s}{2r}.$$

Parceque nous avons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 25.$$
$$bc \sim 16.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$
$$3.$$

& si l'on suppose

$$x \sim \frac{79}{5}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{79,\ 22}{5}.$$

On

On connoit par l'Equation constitutive $lsx - lsy \sim rxx + ryy + bcr$, ou $yy + \frac{lsy}{r} + bc \sim \frac{lsx}{r} - xx$, que cette Question est un Lieu à un cercle donné, dont le Rayon est $\sqrt{\frac{llss}{2rr} - bc}$, comme dans la 5.e de ces Questions ajoutées. C'est pourquoy la construction sera presque Geometrique. Construction Geometrique.

$AB \sim \frac{ls}{2r} \sim BC.$

$AC \sim \sqrt{\frac{llss}{2rr}}.$

$CD \sim \sqrt{bc} \sim AR.$

$AD \sim \sqrt{\frac{llss}{2rr} - bc}.$

$AO \sim l.$

$AP \sim r.$

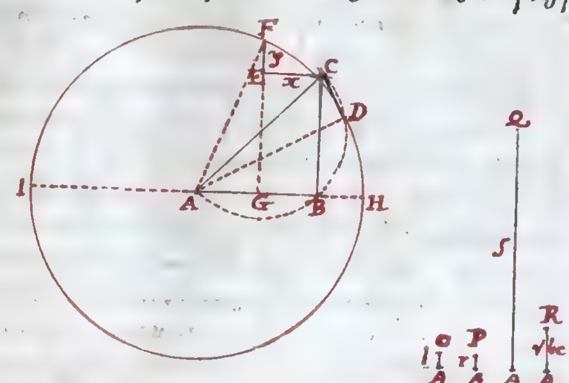
$AQ \sim s.$

$CE \sim x.$

$EF \sim y.$

$GF \sim y + \frac{ls}{2r}.$

$AG \sim \frac{ls}{2r} - x.$



la même, & la difference qu'il y a se connoitra aisément en regardant la figure. Ainsy Nous n'en parlerons pas davantage.

IX.

Trouver deux Nombres, dont la somme soit à l'excez de la difference de leurs quarrez sur un Nombre donné, soit donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la sommes $x+y$, soit à l'excez $xx-yy-bc$ de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le Nombre donné $4 \sim bc$, comme $2 \sim r$, à $3 \sim s$.

Si on divise la Moitié de l'excez de la somme du produit sous le Nombre donné & le premier terme de la raison donnée & du produit sous le second terme & un autre Nombre quelconque, sur le produit sous le quarré de cet autre Nombre & le premier terme, par l'excez du produit sous ce même autre Nombre & le premier terme sur le second; on aura le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, auquel ajoutant cet autre Nombre, on aura le plus grand. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx + ly,\ xx - yy - bc :: r,\ s,$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$lsx + lsy \sim rxx - ryy - bcr.$$

Si pour éviter l'asymmetrie, on suppose

$$x \sim y + a.$$

on aura cette autre analogie,

$$la + 2ly,\ aa + 2ay - bc :: r,\ s,$$

& par consequent cette autre Equation constitutive,

$$las + 2lsy \sim aar + 2ary - bcr,$$

dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{bcr + las - aar}{2ar - 2ls}$. c'est pourquoy au lieu de $x \sim y + a$, on aura $x \sim \frac{bcr - las + aar}{2ar - 2ls}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bcr - las + aar,\ bcr + las - aar}{2ar - 2ls}.$$

Parceque nous avons supposé

$$r \sim 2.$$
$$s \sim 3.$$
$$bc \sim 4.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

5.

3.

Pour avoir une solution plus simple, supposez

$$y \sim a - x.$$

& alors vous aurez cette autre analogie,

$$la,\ 2ax - aa - bc :: r,\ s.$$

& par consequent cette autre Equation constitutive,

$$las \sim 2arx - aar - bcr,$$

dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{aar + bcr + las}{2ar}$. c'est pourquoy au lieu de $y \sim a - x$, on aura $y \sim \frac{aar - bcr - las}{2ar}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{aar + bcr + las,\ aar - bcr - las}{2ar}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 2.$$
$$s \sim 3.$$
$$bc \sim 4.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 8.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

comme auparavant.

On tire de cette seconde solution, le Canon suivant.

Si au produit sous le premier terme de la raison donnée & le Nombre donné augmenté du quarré de quelqu'autre Nombre, on ajoute le produit sous cet autre Nombre & le second terme, & qu'on divise la somme par le double du produit sous ce même autre Nombre & le premier terme; on aura le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant ôté de ce même autre Nombre, on aura le plus petit. Canon.

On connoit par la première Equation constitutive $lsx + lsy \sim rxx - ryy - bcr$, ou $xx - \frac{lsx}{r} \sim \frac{lsy}{r} + yy + bc$, que cette Question est un Lieu à l'Hyperbole équilatere, dont le demidiametre determiné est $\sqrt{bc}$, comme dans la 1.e de ces Questions ajoutées. C'est pourquoy la construction sera presque la même, & le peu de Construction geometrique.

$AO \sim l$.

$AP \sim r$.

$AQ \sim s$.

$AR \sim \sqrt{bc} \sim AB \sim AC$.

$AS \sim a$.

$AH \sim \frac{ls}{2r} \sim HI \sim KF$.

$IK \sim x$.

$GK \sim y$.

$FG \sim y + \frac{ls}{2r}$.

$CF \sim x + \sqrt{bc} - \frac{ls}{2r}$

$BF \sim x - \sqrt{bc} - \frac{ls}{2r}$.

$CH \sim \sqrt{bc} - \frac{ls}{2r}$.

difference qu'il y a, se connoitra sans peine en regardant la figure, sans qu'il soit besoin d'en parler davantage.

X.

Trouver deux Nombres, dont la somme soit à l'excez d'un nombre donné sur la difference de leurs quarrez, soit donnée.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

dont la somme $x + y$ soit à l'excez $bc - xx + yy$ du Nombre donné $36 \sim bc$, sur la difference $xx - yy$, de leurs quarrez, comme $2 \sim r$, à $5 \sim s$.

Si on divise la moitié de la somme du produit sous le second terme de la raison donnée & un nombre quelconque, & du produit sous le premier terme & la somme du Nombre donné & du quarré Canon.

du Nombre indeterminé, par la somme du second terme & du produit sous le premier & ce Nombre indeterminé; on aura le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, duquel ôtant le même Nombre indeterminé, on aura le plus petit.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx+ly,\ bc-xx+yy :: r, s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$lsx+lsy \sim bcr-rxx+ryy.$$

Mais pour avoir une solution rationnelle, supposez

$$x \sim y+a.$$

& alors vous aurez cette autre analogie,

$$la+2ly,\ bc-aa-2ay :: r, s.$$

& par consequent cette autre Equation constitutive,

$$las+2lsy \sim bcr-aar-2ary.$$

dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{bcr-aar-las}{2ar+2ls}$, & au lieu de $x \sim y+a$, on aura $x \sim \frac{bcr+aar+las}{2ar+2ls}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bcr+aar+las,\ bcr-aar-las}{2ar+2ls}.$$

Parceque nous avons supposé

$$r \sim 2.$$

$$s \sim 5.$$

$$bc \sim 36.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$

$$3.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 1\tfrac{1}{2}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{15,\ 21}{4}.$$

Pour avoir une solution plus simple, supposez

$$x \sim a-y.$$

& alors vous aurez cette autre analogie,

$$la,\ bc-aa+2ay :: r, s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$las \sim bcr-aar+2ary.$$

dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{las+aar-bcr}{2ar}$. c'est pourquoy au lieu de $x \sim a-y$, on aura $x \sim \frac{aar+bcr-las}{2ar}$. Ainsy les deux Nombres

qu'on cherche, seront tels, Seconde Solution.

$\frac{aar+bcr-las,\ aar-bcr+las}{2ar}$.

Parceque nous avons supposé

$r \sim 2$.

$s \sim 5$.

$bc \sim 36$.

si l'on suppose

$a \sim 8$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

comme auparavant. Mais si l'on suppose

$a \sim 9$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{15,\ 21}{4}$.

aussy comme auparavant.

On tire de cette seconde solution, le canon suivant;

Si par le double du produit sous le premier terme de la raison donnée & un nombre indeterminé, on divisez l'excez du produit sous le premier terme & la somme du nombre donné & du quarré de l'indeterminé, sur le produit sous le second terme & le même Nombre indeterminé; on aura le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du Nombre indeterminé, on aura le plus petit. Canon.

La premiere Equation constitutive, $lsx + lsy \sim bcr - rxx + ryy$, ou $yy - \frac{lsy}{r} + bc \sim xx + \frac{lsx}{r}$, fait connoitre que cette Question est un Lieu à l'Hyperbole équilatere, dont le demidiametre determiné est $\sqrt{bc}$, comme auparavant: c'est pourquoy la construction sera aussy la même. Construction geometrique.

$AO \sim l$.

$AP \sim r$.

$AB \sim s$.

$AR \sim \sqrt{bc} \sim AC \sim AB$.

$AS \sim a$.

$AH \sim \frac{ls}{2r} \sim HI \sim KF$.

$BC \sim 2\sqrt{bc}$.

$IK \sim x$.

$KG \sim y$.

$FG \sim y - \frac{ls}{2r}$.

$BH \sim \sqrt{bc} - \frac{ls}{2r}$.

que la precedente, excepté que l'ordre est renversé, comme vous voyez dans la figure.

XI.

Trouver deux Nombres, dont la somme soit à la somme d'un Nombre donné & de la difference de leurs quarez en raison ~~fait~~ donnée.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit à la somme $bc+xx-yy$, du nombre donné 16 ∾ bc, & de la difference $xx-yy$ de leurs quarez, comme 1 ∾ r, à 4 ∾ 16.

Canon. Si on divise la moitié de l'excez du produit sous le premier terme de la raison donnée & la somme du Nombre donné & du quarré d'un Nombre indeterminé, sur le produit sous ce Nombre indeterminé & le second terme, par le produit sous le Nombre indeterminé & le premier terme; on aura le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant ôté du même Nombre indeterminé, on aura le plus grand.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx+ly,\ bc+xx-yy :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$lsx+lsy \sim bcr+rxx-ryy.$$

Pour avoir une solution rationnelle, supposez

$$x \sim a-y.$$

& alors vous aurez cette autre analogie,

$$la,\ bc+aa-2ay :: r,\ s.$$

& par consequent cette autre Equation constitutive,

$$las \sim bcr-aar-2ary.$$

dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{aar+bcr-las}{2ar}$: c'est pourquoy au lieu de $x \sim a-y$, on aura $x \sim \frac{aar-bcr+las}{2ar}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aar-bcr+las,\ aar+bcr-las}{2ar}.$$

Parceque nous avons supposé

$r \sim 1$.

$s \sim 4$.

$bc \sim 16$.

Si l'on suppose

$a \sim 8$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

3.

On connoitra par la premiere Equation constitutiue, $lsx + lsy \sim bcr + rxx - ryy$, ou $xx - \frac{lsx}{r} + bc \sim yy + \frac{lsy}{r}$, que cette Question est vn Lieu à l'Hyperbole équilatere, dont le demi-diametre determiné est $\sqrt{bc}$, comme dans la Question precedente; c'est pourquoy la construction sera toutafait la même, mais Construction geometrique.

$AO \sim l$.

$AP \sim r$.

$AQ \sim s$.

$AR \sim \sqrt{bc} \sim AB \sim AC$.

$AS \sim a$.

$BC \sim \sqrt{4bc}$.

$AH \sim \frac{ls}{2r} \sim HI \sim KF$.

$BH \sim \sqrt{bc} - \frac{ls}{2r}$.

$KG \sim x$.

$KI \sim y$.

$AF \sim y + \frac{ls}{2r}$.

$BF \sim y + \frac{ls}{2r} - \sqrt{bc}$.

la ligne IK, representera le nombre y, & la ligne KG, le nombre x, & la demonstration comme auparauant.

XII.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à l'excez de leur produit sur vn nombre donné, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xy - bc$, de leur produit xy, sur le Nombre donné $9 \sim bc$, comme $1 \sim r$, à $3 \sim s$.

Le premier des deux Nombres qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & le second se trouuera en diuisant la somme du produit sous le premier Nombre troué & le second terme de la raison donnée & du produit sous le premier terme & le Nombre donné, par la somme du second terme & du produit sous le premier Nombre troué & le premier terme. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie

$$bx - ly,\ xy - bc :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$lsx - lsy \sim rxy - bcr.$$

dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{lsx+bcr}{rx+ls}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$
$$\frac{lsx+bcr}{rx+ls}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 3.$$
$$bc \sim 9.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$
$$3.$$

& si l'on suppose

$$x \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$4.$$
$$3.$$

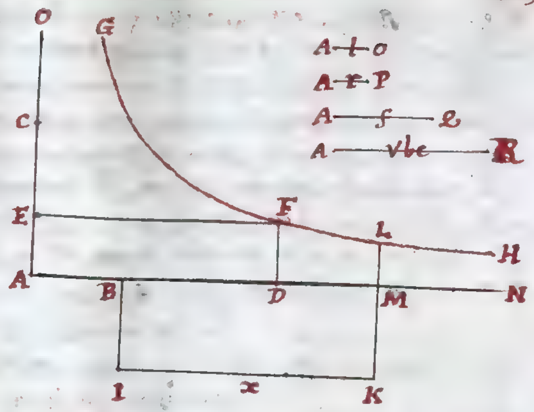
On connoit par l'Equation constitutiue $lsx - lsy \sim rxy - bcr$, ou $bc + \frac{lsx}{r} - \frac{lsy}{r} \sim xy$, quee cette Question est Vn Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes, où le Rectangle commun est $bc - \frac{llss}{rr}$. Cette Hyperbole se decrira ainsy.

Construction geometrique. Ayant fait Vn angle quelconque A, par les deux lignes indeterminées AN, AO, qui seront les asymptotes de l'Hyperbole qu'on Veut decrire, prenez d'Vn côté les lignes $AB \sim \frac{ls}{r}$, & $BD \sim \sqrt{bc}$, & de l'autre côté les lignes $AC \sim \sqrt{bc}$, & $CE \sim \frac{ls}{r}$, de sorteque la ligne AC, sera égale à la ligne BD, & la ligne CE, à la ligne AB. Tirez par le point E, la droite EF, parallele à la ligne AN, & par le point D, la ligne DF, parallele à l'autre ligne AO, pour decrire du centre A, par le point F, où les deux lignes EF, DF, s'entrecoupent, entre les asymptotes EF, DF, l'Hyperbole GFH, qui sera le Lieu qu'on cherche.

Pour determiner en lignes les deux nombres x, y, tirez par le point B, la droite BI, parallele à la ligne AO, & égale à la ligne AB, & par le point I, la ligne indefinie IK, parallele à l'autre asymptote AN. Si on prend Vn point à Volonté sur cette ligne IK, comme K, & que par ce point K, on tire la droite KL, terminée en L, par l'Hyperbole GFH, & parallele à l'asymptote

AO,

$AB \sim \frac{ls}{r} \sim CE \sim BI.$
$AC \sim \sqrt{bc} \sim BD \sim AR.$
$AO \sim l.$
$AP \sim r.$
$AQ \sim s.$
$AE \sim \sqrt{bc} - \frac{ls}{r} \sim DF.$
$AD \sim \sqrt{bc} + \frac{ls}{r}.$
$IK \sim x.$
$KL \sim y.$
$AM \sim x + \frac{ls}{r}.$
$LM \sim y - \frac{ls}{r}.$
$DM \sim x - \sqrt{bc}.$



AO, & les deux lignes IK, KL, representeront les deux Nombres qu'on cherche, de sorte qu'on aura cette analogie, $lx - ly,\ xy - bc :: r,\ s.$

Car puisque le Rectangle AML, est égal au Rectangle ADF, par la nature des asymptotes, on aura cette Egalité, $xy - \frac{llss}{rr} - \frac{lsx}{r} + \frac{lsy}{r} \sim bc - \frac{llss}{4rr}$, c'est pourquoy par l'antitheze on aura celle-cy, $xy - bc \sim \frac{lsx}{r} - \frac{lsy}{r}$, & en multipliant par r, on aura celle-cy, $rxy - bcr \sim lsx - lsy$, de laquelle on tire cette analogie, $lx - ly,\ xy - bc :: r,\ s.$ Ce qu'il faloit demontrer. Demonstration.

La construction precedente n'a pas été faite pour le Nombre donné $bc \sim 9$, mais pour le Nombre donné $bc \sim 25$, parce qu'à l'égard de $bc \sim 9$, on a $bc \sim \frac{llss}{rr}$, & par consequent $bc - \frac{llss}{rr} \sim 0$, ce qui fait évanoüir l'Hyperbole, & qu'en sa place on a une ligne droite. Car en supposant $bc \sim \frac{llss}{rr}$, ou $\sqrt{bc} \sim \frac{ls}{r}$, l'Equation precedente, $xy - bc \sim \frac{lsx}{r} - \frac{lsy}{r}$, se changera en celle-cy, $xy - bc \sim x\sqrt{bc} - y\sqrt{bc}$, ou $xy + y\sqrt{bc} \sim x\sqrt{bc} + bc$, dans laquelle si l'on suppose $x + \sqrt{bc} \sim z$, on aura celle-cy, $yz \sim z\sqrt{bc}$, ou $y \sim \sqrt{bc}$, qui est un Lieu à la ligne droite, dont la construction est facile, & dans ce cas la solution se fera toujours en Nombres entiers, lorsque le Nombre donné $\sqrt{bc}$, sera un Nombre entier.

XIII.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit à l'excez d'un Nombre donné sur leur produit, en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$
$y.$

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $bc-xy$ du Nombre donné $25 \backsim bc$, sur leur produit xy, comme $1 \backsim r$, à $5 \backsim s$.

Canon. Le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & le plus grand se trouvera en divisant la somme du produit sous le second terme de la raison donnée & le plus petit Nombre trouvé, & du produit sous le premier terme & le Nombre donné, par la somme du second terme & du produit sous le premier terme & le plus petit Nombre trouvé.

Selon les condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx - ly,\ bc - xy :: r, s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$lsx - lsy \backsim bcr - rxy.$$

dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{bcr+lsy}{ls+ry}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bcr+lsy}{ls+ry}.$$
$$y.$$

Parceque nous avons supposé

$$r \backsim 1.$$
$$s \backsim 5.$$
$$bc \backsim 25.$$

Si l'on suppose

$$y \backsim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.
3.

& si l'on suppose

$$y \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.
1.

mais si l'on suppose

$$y \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.
2.

Que si l'on suppose

$$y \backsim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.
4.

Ainsy on aura toujours une solution en nombres entiers, à cause de $bc \sim \frac{llss}{rr}$, auquel cas on a $x \sim \sqrt{bc}$, ou $x \sim s$, comme nous auons deja remarqué dans la Question precedente.

On connoit par l'Equation constitutiue $lsx - lsy \sim bcr - rxy$, ou $xy - \frac{lsy}{r} \sim bc - \frac{lsx}{r}$, que cette Question est un Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes, où le Rectangle commun est $bc - \frac{llss}{rr}$, comme dans la Question precedente. c'est pourquoy la construction — Construction Geometrique.

$AB \sim \frac{ls}{r} \sim AC$.
$BD \sim \sqrt{bc} \sim CE \sim AR$.
$AO \sim l$.
$AP \sim r$.
$AQ \sim s$.
$AE \sim \sqrt{bc} + \frac{ls}{r}$.
$KI \sim x$.
$KL \sim y$.

Sera presque la même, la difference qu'il y a étant facile à connoitre en regardant la figure. Si $\frac{ls}{r} \sim \sqrt{bc}$, le Probl. est Plan.

XIV.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à la somme d'un Nombre donné & de leur produit, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x - y$ soit à la somme $bc + xy$ du Nombre donné $g \sim bc$, ~~& de~~ leur produit xy, comme $1 \sim r$, à $12 \sim s$.

Le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & on trouuera le plus grand en diuisant la somme du produit sous le second terme de la raison donnée & le plus petit Nombre trouué & du produit sous le premier terme & le Nombre donné, par l'excez du second terme sur le produit sous le premier terme & le plus petit Nombre trouué. — Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx - ly,\ bc + xy :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$lsx - lsy \sim bcr + rxy.$$

dans laquelle on trouuera, $x \sim \frac{bcr + lsy}{ls - ry}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bcr + lsy}{ls - ry}.$$

y.

Parceque Nous avons supposé

$r \sim 1.$

$s \sim 12.$

$bc \sim 9.$

Si l'on suppose

2

$y \sim 3.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

& si l'on suppose

$y \sim 11.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

141.

11.

On connoit par l'Equation constitutive $lsx - lsy \sim bcr + rxy$, ou $xy + \frac{lsy}{r} \sim bc - \frac{lsx}{r}$, que cette Question est un Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes, où le Rectangle commun est $bc + \frac{llss}{rr}$. Cette Hyperbole se decrira ainsy.

Construction geometrique. Ayant fait le triangle rectangle ABC, dont un côté AB, soit égal à $\frac{ls}{r}$, & l'autre côté BC, égal à $\sqrt{bc}$, prenez sur l'Hypotenuse AC, prolongée, la ligne AD, égale à la ligne AC, & tirez par le point D, la droite DE, égale à la ligne AD, & parallele à la ligne AB, Enfin decrivez du centre A, par le point E, entre les asymptotes AN, AO, l'Hyperbole GEH, qui sera le Lieu qu'on cherche.

Pour determiner en lignes les Deux Nombres x, y, ~~tirez~~ par le point B, la droite BF, parallele à la ligne AD, & égale à la ligne AB, & par le point F, la ligne indefinie FI, parallele à la ligne AB. Si sur cette ligne indefinie FI, on prend au dedans de l'Hyperbole

$AB \sim \frac{ls}{r} \sim BF.$

$BC \sim \sqrt{bc} \sim AR.$

$AC \sim \sqrt{bc + \frac{llss}{rr}} \sim AD \sim DE.$

$AO \sim l.$

$AP \sim r.$

$AQ \sim s.$

$FI \sim x.$

$KI \sim y.$

A + O

A + P

A — s — Q

A — $\sqrt{bc}$ — R

O G E D F I K A B x L H N C

un point à volonté, comme I, par lequel on tire la droite IKL, parallele à l'asymptote AO, les deux lignes FI, IK, representeront les Deux Nombres qu'on cherche, comme il est aisé à demontrer.

XV.

Trouver deux Nombres, dont la somme soit à la somme d'un Nombre donné & de leur produit, en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit à la somme $bc+xy$ du Nombre donné $25 \sim bc$, & de leur produit xy, comme $1 \sim r$, à $5 \sim s$.

Le premier des deux Nombres qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & pour avoir le second, on divisera l'excez du produit sous le premier terme de la raison donnée & le Nombre donné, sur le produit sous le second terme & le premier Nombre trouvé, par l'excez du second terme sur le produit sous le premier terme & le premier Nombre trouvé. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie;

$$lx+ly,\ bc+xy :: r, s.$$

dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{bcr-lsy}{ls-ry}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bcr-lsy}{ls-ry}.$$

y.

Parceque nous avons supposé

$r \sim 1$.

$s \sim 5$.

$bc \sim 25$.

Si l'on suppose

$y \sim 1$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

1.

& si l'on suppose

$y \sim 2$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

2.

Que si l'on suppose

$y \sim 3$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

5.

3.

Mais si l'on suppose [illegible]

$y \sim 4$.

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

4.

On connoît par l'Equation constitutiue $lsx + lsy \sim bcr + rxy$, ou $\frac{lsx}{r} - xy \sim bc - \frac{lsy}{r}$, que cette Question est un Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes, où le Rectangle commun est $bc - \frac{llss}{rr}$, comme dans la 13.e de ces Questions ajoutées: c'est pourquoy la construction

Construction geometrique.

$AB \sim \frac{ls}{r} \sim AG \sim CD$.
$AC \sim \sqrt{bc} \sim BE \sim AR$.
$AO \sim l$.
$AP \sim r$.
$AQ \sim s$.
$AD \sim \sqrt{bc} - \frac{ls}{r} \sim EF$.
$AE \sim \sqrt{bc} + \frac{ls}{r} \sim DF$.
$HI \sim x$.
$LI \sim y$.

sera presque la même: c'est pourquoy il ne faut que regarder la figure pour la comprendre.

XVI.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit à l'excez de leur produit sur vn Nombre donné, en raison donnée.

On propose de trouuer deux nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$ soit à l'excez $xy - bc$, de leur produit xy sur le Nombre donné $9 \sim bc$, comme $4 \sim r$, à $3 \sim s$.

Canon. Le premier des deux Nombres qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & on aura le second en diuisant la somme du produit sous le second terme de la raison donnée & le premier Nombre trouué, & du produit sous le premier terme & le Nombre donné, par l'excez du produit sous le premier terme & le premier Nombre trouué sur le second terme.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx + ly,\ xy - bc :: r, s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$lsx + lsy \sim rxy - bcr.$$

dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{lsx+bcr}{rx-ls}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$

$$\frac{lsx+bcr}{rx-ls}.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \backsim 4.$$

$$s \backsim 3.$$

$$bc \backsim 9.$$

Si l'on suppose

$$x \backsim 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$

$$3.$$

& si l'on suppose

$$x \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$1.$$

$$39.$$

On connoit par l'Equation constitutiue $lsx+lsy \backsim rxy-bcr$, $xy-\frac{lsx}{r} \backsim bc+\frac{lsy}{r}$, que cette Question est vn Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes, où le Rectangle commun est $bc+\frac{llss}{rr}$. Cette Hyperbole se decrira ainsy.

Ayant fait le triangle rectangle ABC, dont le côté AB soit égal à $\frac{ls}{r}$, & l'autre côté BC, à $\sqrt{bc}$ prenez sur le côté AB, prolongé, la ligne AD, égale à l'hypotenuse AC, & tirez par le point C, la ligne endefinie CN parallele à la ligne AD, pour decrire du centre C, par le point D, entre les asymptotes CN, CO, l'Hyperbole LDM, qui sera le Lieu qu'on cherche. Construction geometrique.

$AB \backsim \frac{ls}{r} \backsim CF \backsim FG.$

$BC \backsim \sqrt{bc} \backsim AR.$

$AC \backsim \sqrt{bc+\frac{llss}{rr}} \backsim AD$

$AO \backsim l.$

$AP \backsim r.$

$AQ \backsim s.$

$GI \backsim x.$

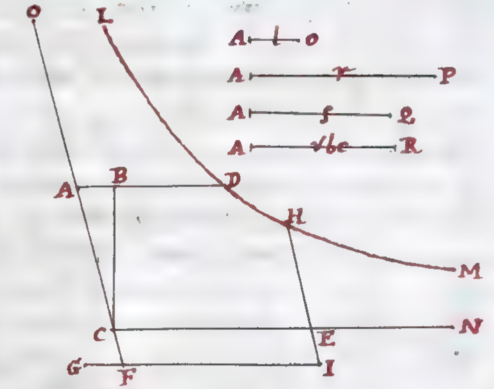
$HI \backsim y.$

$EH \backsim y-\frac{ls}{r}.$

$CE \backsim x-\frac{ls}{r} \backsim FI.$

$BD \backsim \sqrt{bc+\frac{llss}{rr}}-\frac{ls}{r}.$

$AF \backsim \sqrt{bc+\frac{llss}{rr}}+\frac{ls}{r}.$



Pour determiner en lignes les deux nombres x, y, prenez sur l'asymptote CO, prolongée vers C, la ligne CF, égale à la ligne AB, & tirez par le point F, la ligne FG, égale & parallele à la même ligne AB. Si on prolonge cette ligne GF, au dela de F, comme l'on voudra, jusques en I, par exemple; & que par le point I, on tire la ligne IH, parallele à l'asymptote CO, les deux lignes GI, HI, representeront les deux nombres qu'on cherche, & la demonstration s'en fera comme auparauant.

XVII.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit à l'excez d'un nombre donné sur leur produit, en raison donnée.

On propose de trouuer deux nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la somme $x+y$ soit à l'excez $bc-xy$, du nombre donné $25 \backsim bc$, sur leur produit xy, comme $4 \backsim r$, à $5 \backsim s$.

Canon. Le premier des deux nombres qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & on aura le second en diuisant l'excez du produit sous le nombre donné & le premier terme de la raison donnée, sur le produit sous le second terme & le premier nombre trouué, par la somme du second terme & du produit sous le premier terme & le premier nombre trouué.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$lx+ly,\ bc-xy :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$lsx+lsy \backsim bcr-rxy.$$

dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{bcr-lsy}{ls+ry}$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bcr-lsy}{ls+ry}.$$

$$y.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \backsim 4.$$

$$s \backsim 5.$$

$$bc \backsim 25.$$

si l'on suppose

$$y \backsim 3.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$

$$3.$$

On

On connoit par l'Equation constitutive $lsx + lsy \backsim bcr - rxy$, ou $xy + \frac{lsx}{r} \backsim bc - \frac{lsy}{r}$, que cette Question est Un Lieu à l'Hyperbole entre ses asymptotes, où le Rectangle commun est $bc + \frac{llss}{rr}$, comme dans la Question precedente. C'est pourquoy la construction

Construction Geometrique.

$AB \backsim \frac{ls}{r} \backsim CF \backsim FG.$

$BC \backsim \sqrt{bc} \backsim AR.$

$AC \backsim \sqrt{bc + \frac{llss}{rr}} \backsim AD.$

$AO \backsim l.$

$AQ \backsim s.$

$AP \backsim r.$

$BD \backsim \sqrt{bc + \frac{llss}{rr}} - \frac{ls}{r}.$

$GI \backsim x.$

$HI \backsim y.$

Sera presque la même que la precedente, la difference étant si peu considerable, qu'il suffit de regarder la figure pour la comprendre.

XVIII.

Trouver deux nombres, tels que la raison de leur difference à l'excez de la difference de leurs quarrez sur Un nombre donné, & la raison de leur somme à l'excez de la somme de leurs quarrez sur Un Nombre donné, soient données.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-ab$, de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $12 \backsim ab$, comme $1 \backsim r$, à $2 \backsim s$, & dont la somme $x+y$ soit à l'excez $xx+yy-am$, de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $14 \backsim am$, comme $2 \backsim c$, à $5 \backsim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ xx-yy-ab :: r,\ s.$$

$$lx+ly,\ xx+yy-am :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$lsx - lsy \backsim rxx - ryy - abr.$$

$$ldx + ldy \backsim cxx + cyy - amc.$$

Pour éviter Un long calcul, supposez

$$x \backsim \omega + z.$$

$$y \backsim \omega - z.$$

& alors Vous aurez ces deux autres analogies,

$$2lz,\ 4z\omega - ab :: r,\ s.$$
$$2l\omega,\ 2c\omega\omega + 2zz - am :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$$2lsz \propto 4rz\omega - abr.$$
$$2ld\omega \propto 2c\omega\omega + 2czz - amc.$$

Dans la premiere $2lsz \propto 4rz\omega - abr$, on trouuera $\omega \propto \frac{abr+2lsz}{4rz}$, & la deuxieme $2ld\omega \propto 2c\omega\omega + 2czz - amc$, se changera en celle-cy, $\frac{labdr+2lcdsz}{2rz} \propto \frac{aabbcrr+4labcrsz+4llcsszz}{8rrzz} + 2czz - amc$, laquelle étant reduite, on aura celle-cy, $z^4 + \frac{llsszz}{4rr} - amzz - \frac{lldszz}{2cr} - \frac{labsz}{4r} - \frac{labdz}{4c} + \frac{1}{16}aabb \propto 0$, ou $z^4 - \frac{17}{2}zz - \frac{3}{2}z + 9 \propto 0$, à cause de

$$r \propto 1.$$
$$s \propto 2.$$
$$ab \propto 12.$$
$$c \propto 2.$$
$$d \propto 5.$$
$$am \propto 14.$$

& dans cette Equation, l'on trouuera $z \propto 1$. C'est pourquoy au lieu de $\omega \propto \frac{abr+2lsz}{4rz}$, ou de $\omega \propto \frac{3}{z}+1$, on aura $\omega \propto 4$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

Comme la premiere Equation constitutiue $lsx - lsy \propto rxx - ryy - abr$, ou $yy - \frac{lsy}{r} \propto xx - \frac{lsx}{r} - ab$, est vn Lieu à l'Hyperbole équilatere, dont Nous auons enseigné la construction dans la Quest. VII. & que la seconde Equation constitutiue $ldx + ldy \propto cxx + cyy - amc$, ou $yy - \frac{ldy}{c} \propto \frac{ldx}{c} - xx + am$, est vn Lieu à vn cercle donné, dont Nous auons donné la description dans la 3.e de ces Questions ajoutées, & que cette Question est vn Probleme solide, on la pourra resoudre geometriquement en joignant ensemble ces deux Lieux, en cette sorte.

Construction geometrique. Ayant fait les deux triangles rectangles ABC, ABD, dont chacun des côtez AB, BC, BD, soit égal à $\sqrt{ab}$, & ayant prolongé indefiniment les Hypotenuses AC, AD, vers O & N, decriuez du centre A, par le point B, entre les asymptotes AN, AO, l'Hyperbole LBM. Aprez cela tirez par le point A, la droite AE, parallele au côté BD, & égale à $\frac{ls}{2r}$, & par le point E, à l'autre côté AB, la parallele indefinie EF, laquelle étant prolongée rencontrera l'asymptote AO, aussy prolongée en G, par où vous tirerez la droite GH, parallele à la ligne AE, & égale à $\frac{ld}{2c}$, & la droite GK, parallele à

$AB \backsim \sqrt{ab} \backsim BC \backsim BD.$
$AE \backsim \frac{ls}{2r} \backsim EG.$
$GH \backsim \frac{ld}{2c} \backsim HI.$
$AO \backsim r.$
$AP \backsim s.$
$AQ \backsim \sqrt{ab}.$
$AR \backsim c.$
$AS \backsim d.$
$AT \backsim \sqrt{am} \backsim GK.$
$AV \backsim l.$
$IK \backsim \sqrt{am + \frac{lldd}{4cc}}.$
$GF \backsim x.$
$FL \backsim y.$

l'asymptote AN, & égale à $\sqrt{am}$. Enfin tirez par le point H, à la ligne AB, la parallele HI, qui rencontre icy l'asymptote AO, au point I, qui sera le centre du cercle Local, dont le Rayon sera la droite IK. Si donc on décrit du centre I, par le point K, une circonference de cercle, & que du point L, où elle coupe l'hyperbole, on tire la droite LF, perpendiculaire à la ligne EF, les deux lignes GF, FL, representeront les deux Nombres qu'on cherche.

XIX.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur difference à l'excez de la difference de leurs quarrez sur un Nombre donné, & la raison de leur même difference à l'excez d'un Nombre donné sur la difference de leurs quarrez soient données.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-ab$, de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le Nombre donné $\backsim ab$, comme $1 \backsim r$, à $2 \backsim s$, & dont la même difference $x-y$ soit à l'excez $am-xx+yy$ du Nombre donné $24 \backsim am$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \backsim c$, à $d \backsim 4$.

Si on divise le produit sous le Plan des antecedens des deux raisons données & l'excez du second Nombre donné sur le premier, par le double de la somme des deux Plans sous l'antecedent d'une raison donnée & le consequent de l'autre: & si par le double du produit sous le même excez & le Plan des deux antecedens, on Canon.

diuise la somme du produit sous le premier Nombre donné & le Plan sous l'antecedent de la premiere raison donnée & le consequent de la seconde, & du produit sous le second Nombre donné & le Plan sous l'antecedent de la seconde raison donnée & le consequent de la premiere; on aura deux Nombres, dont la somme & la difference donneront les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx - ly,\ xx - yy - ab :: r, s.$$
$$lx - ly,\ am - xx + yy :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx - lsy \backsim rxx - ryy - abr.$$
$$ldx - ldy \backsim amc - cxx + cyy.$$

Pour auoir vn calcul plus aisé, supposez

$$x \backsim z + \omega.$$
$$y \backsim z - \omega.$$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ 4z\omega - ab :: r, s.$$
$$2l\omega,\ am - 4z\omega :: c, d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$$2ls\omega \backsim 4rz\omega - abr.$$
$$2ld\omega \backsim amc - 4cz\omega.$$

Dans la premiere $2ls\omega \backsim 4zr\omega - abr$, on trouuera $z \backsim \frac{abr + 2ls\omega}{4r\omega}$, & la deuxieme $2ld\omega \backsim amc - 4cz\omega$, se changera en celle-cy, $2ld\omega \backsim amc - abc - \frac{2lcs\omega}{r}$, dans laquelle on trouuera $\omega \backsim \frac{amcr - abcr}{2dr + 2cs}$. c'est pourquoy au lieu de $z \backsim \frac{abr + 2ls\omega}{4r\omega}$, on aura $z \backsim \frac{amcs + abdr}{2amcr - 2abcr}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels

$$\frac{amcr - abcr}{2dr + 2cs} + \frac{amcs + abdr}{2amcr - 2abcr}.$$
$$\frac{amcr - abcr}{2dr + 2cs} - \frac{amcs - abdr}{2amcr - 2abcr}.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \backsim 1.$$
$$s \backsim 2.$$
$$ab \backsim 12.$$
$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 4.$$
$$am \backsim 24.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.
3.

XX.

Trouuer deux nombres, tels que la raison de leur difference à l'excez de la difference de leurs quarrez sur vn nombre donné, & la raison de leur même difference à la somme d'vn nombre donné & de la difference de leurs quarrez soient données.

On propose de trouuer deux nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-ab$ de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $12 \sim ab$, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$: & dont la même difference $x-y$ soit à la somme $am+xx-yy$ du nombre donné $2 \sim am$, & de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim c$, à $9 \sim d$.

Si on diuise le produit sous le Plan des antecedens des deux raisons données & la somme des deux nombres donnez par le double du Plan sous l'antecedent de la premier raison donnée & l'excez du consequent de la seconde sur le consequent de la premiere: & si par le double du même produit on diuise la somme du produit sous le premier nombre donné & le Plan sous l'antecedent de la premiere raison donnée & le consequent de la seconde, & du produit sous le second nombre donné & le Plan sous l'antecedent de la seconde raison donnée & le consequent de la premiere; on aura deux nombres, dont la somme & la difference donneront les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ xx-yy-ab :: r, s.$$

$$lx-ly,\ am+xx-yy :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx-lsy \sim rxx-ryy-abr.$$

$$ldx-ldy \sim amc+cxx-cyy.$$

Pour auoir vn calcul plus aisé, supposez

$$x \sim z+\omega.$$

$$y \sim z-\omega.$$

& vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ 4z\omega-ab :: r, s.$$

$$2l\omega,\ 4z\omega+am :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues

$$2ls\omega \sim 4rz\omega-abr.$$

$$2ld\omega \sim 4cz\omega+ame.$$

Dans la premiere $2lsω \backsim 4rzω - abr$, on trouvera $z \backsim \frac{abr+2lsω}{4rω}$, & la deuxieme $2ldω \backsim 4czω + amc$, se changera en celle-cy, $2ldω \backsim abc + \frac{2lsc}{r} + amc$, dans laquelle on trouvera $ω \backsim \frac{abcr+amcr}{2dr-2rs}$. C'est pourquoy au lieu de $z \backsim \frac{abr+2lsω}{4rω}$, on aura $z \backsim \frac{abdr+amcs}{2abcr+2amcr}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abdr+amcs}{2abcr+2amcr} - \frac{abcs-amcr}{2dr-2rs}.$$

Parceque Nous avons supposé

$r \backsim 1.$

$s \backsim 2.$

$ab \backsim 12.$

$c \backsim 1.$

$d \backsim 19.$

$am \backsim 22.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XXI.

Trouver deux Nombres, tels que la raison de leur difference à l'excez de la difference de leurs quarrez sur Un Nombre donné, & la raison de leur somme à l'excez d'Un Nombre donné sur la somme de leurs quarrez, soient données.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$, soit à l'excez $xx-yy-ab$, de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le Nombre donné $12 \backsim ab$, comme $1 \backsim r$, à $2 \backsim s$: & dont la somme $x+y$ soit à l'excez $am-xx-yy$ du Nombre donné $40 \backsim am$, sur la somme $xx+yy$ de leurs quarrez comme $4 \backsim c$, à $3 \backsim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$lx-ly,\ xx-yy-ab :: r, s.$

$lx+ly,\ am-xx-yy :: c, d.$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$lsx-lsy \backsim rxx-ryy-abr.$

$ldx+ldy \backsim amc-cxx-cyy.$

Pour avoir une analyse plus aisée, supposez

$x \backsim z+ω.$

$y \backsim z-ω.$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ 4z\omega - ab :: r, s.$$

$$2lz,\ am - 2zz - 2\omega\omega :: c, d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutives,

$$2ls\omega \sim 4rz\omega - abr.$$

$$2ldz \sim amc - 2czz - 2c\omega\omega.$$

Dans la premiere $2ls\omega \sim 4rz\omega - abr$, on trouvera $z \sim \frac{abr + 2ls\omega}{4r\omega}$, & la deuxieme $2ldz \sim amc - 2czz - 2c\omega\omega$, se changera en celle-cy, $\frac{labd}{2\omega} + \frac{llds}{r} \sim amc - \frac{aabbcc}{8\omega\omega} - \frac{labcs}{2r\omega} - \frac{llcss}{2rr} - 2c\omega\omega$, laquelle étant reduite, donne celle-cy, $\omega^4 + \frac{llss\omega\omega}{4rr} - \frac{1}{2}am\omega\omega + \frac{llds\omega\omega}{2cr} + \frac{labs\omega}{4r} + \frac{labd\omega}{4c} + \frac{1}{16}aabb \sim 0$, ou $\omega^4 - \frac{73}{4}\omega\omega + \frac{33}{4}\omega + 9 \sim 0$, à cause de

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 2.$$

$$ab \sim 12.$$

$$c \sim 4.$$

$$d \sim 3.$$

$$am \sim 40$$

& dans cette Equation, l'on trouvera $\omega \sim 1$. C'est pourquoy au lieu de $z \sim \frac{abr + 2ls\omega}{4r\omega}$, ou de $z \sim \frac{3}{\omega} + 1$, on aura $z \sim 4$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur.

$$6.$$

$$3.$$

Comme la premiere Equation constitutive $lsx - lsy \sim rxx - ryy - abr$, ou $yy - \frac{lsy}{r} \sim xx - \frac{lsx}{r} - ab$, est un Lieu à une Hyperbole équilatere, dont nous avons enseigné la construction dans la Quest. VII. & que la deuxieme Equation constitutive $ldx + ldy \sim amc - cxx - cyy$, ou $xx + \frac{ldx}{c} \sim am - \frac{ldy}{c} - yy$, est un Lieu à un cercle donné, dont nous avons donné la description dans la 4.e de ces Questions ajoutées, & que cette Question est un Probleme Solide, on la pourra resoudre geometriquement en joignant ensemble ces deux Lieux en cette sorte.

Ayant fait les deux triangles rectangles ABC, ABD, dont chacun des côtez AB, BC, BD, soit égal à $\sqrt{ab}$, & ayant prolongé indefiniment les hypotenuses AC, AD, vers O, & N, decrivez du centre A, par le point B, entre les asymptotes AN, AO, l'Hyperbole LBM, Aprez cela tirez par le point A, la droite AE, parallele au côté BD, & égale à $\frac{ls}{2r}$, & par le point E, à l'autre côté AB, la parallele indefinie EF, laquelle étant prolongée rencontrera l'asymptote AO, aussy prolongée au point G, par où vous tirerez

Construction Geometrique.

$AB \backsim \sqrt{ab} \backsim BG \backsim BD$.
$AE \backsim \frac{lc}{2r} \backsim EG$.
$GH \backsim \frac{ld}{2e} \backsim HI$.
$AO \backsim l$.
$AP \backsim r$.
$AQ \backsim s$.
$AR \backsim \sqrt{ab}$.
$AS \backsim \sqrt{am} \backsim GK$.
$AT \backsim c$.
$AV \backsim d$.
$GI \backsim \sqrt{\frac{lldd}{2ee}}$.
$AG \backsim \sqrt{\frac{llcc}{2rr}}$.
$IK \backsim \sqrt{am + \frac{lldd}{2ee}}$.
$GF \backsim x$.
$FL \backsim y$.

la droite GH, parallele à la ligne AE, & égale à $\frac{ld}{2e}$, & la droite GK, parallele à l'assymptote AN, & égale à $\sqrt{am}$. Enfin tirez par le point H, la droite HI, perpendiculaire & égale à la ligne GH, & decrivez du centre I, par le point K, une circonference de cercle, qui coupe icy l'Hyperbole au point L, duquel vous tirerez la droite LF, perpendiculaire à la ligne GF, & les deux lignes GF, LF, representeront les deux nombres qu'on cherche.

XXII.

Trouver deux nombres, tels que la raison de leur difference à l'excez de la difference de leurs quarrez sur un nombre donné, & la raison de leur somme à la somme d'un nombre donné & de leurs quarrez, soient données.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-ab$ de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $\sqrt{ab}$, comme $l \backsim r$, à $2 \backsim s$, & dont la somme $x+y$ soit à la somme $xx+yy+am$, de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez & du nombre donné $\sqrt{am}$, comme $l \backsim c$, à $s \backsim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$lx-ly,\ xx-yy-ab :: r, s.$

$lx+ly,\ xx+yy+am :: c, d.$

&c

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx - lsy \sim rxx - ryy - abr.$$

$$ldx + ldy \sim cxx + cyy + amc.$$

Pour auoir vn calcul plus aisé, supposez

$$x \sim z + \omega.$$

$$y \sim z - \omega.$$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ 4z\omega - ab :: r, s.$$

$$2lz \mid 2zz + 2\omega\omega + am :: c, d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$$2ls\omega \sim 4rz\omega - abr.$$

$$2ldz \sim 2czz + 2c\omega\omega + amc.$$

Dans la premiere $2ls\omega \sim 4rz\omega - abr$, on trouuera $z \sim \frac{abr + 2ls\omega}{4r\omega}$, & la deuxieme $2ldz \sim 2czz + 2c\omega\omega + amc$, se changera en celle-cy, $\frac{labdr + 2llds\omega}{2r\omega} \sim \frac{aabbcrr + 4labcrs\omega + 4llcss\omega\omega}{8rr\omega\omega} + 2c\omega\omega + amc$, laquelle étant reduite, donne celle-cy, $\omega^4 + \frac{1}{2}am\omega\omega + \frac{llss\omega\omega}{4rr} - \frac{llds\omega\omega}{2cr} + \frac{labs\omega}{4r} - \frac{labd\omega}{4c} + \frac{1}{16}aabb \sim 0$, ou $\omega^4 - 1\omega\omega - 9\omega + 9 \sim 0$, à cause de

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 2.$$

$$ab \sim 12.$$

$$c \sim 1.$$

$$d \sim 5.$$

$$am \sim 6.$$

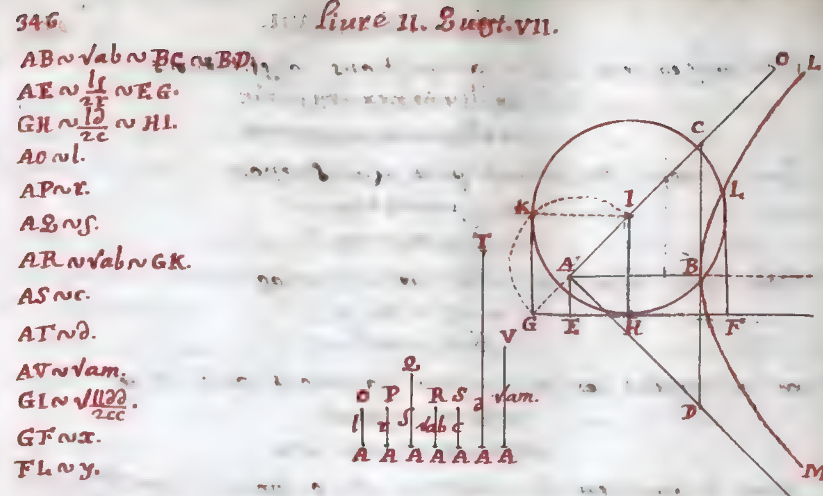
& dans cette Equation, l'on trouuera $\omega \sim 1$. C'est pourquoy au lieu de $z \sim \frac{abr + 2ls\omega}{4r\omega}$, ou de $z \sim \frac{3}{\omega} + 1$, on aura $z \sim 4$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

Comme la premiere Equation constitutiue $lsx - lsy \sim rxx - ryy - abr$, ou $yy - \frac{lsy}{r} \sim xx - \frac{lsx}{r} - ab$, est vn Lieu à vne Hyperbole équilatere, dont nous auons enseigné la construction dans la Quest. VII. & que la deuxieme Equation constitutiue $ldx + ldy \sim cxx + cyy + amc$, ou $xx - \frac{ldx}{c} + amc \sim \frac{ldy}{c} - yy$, est vn Lieu à vn Cercle donné, dont nous auons donné la description dans la 5.e de ces Questions ajoutées, & que cette Question est vn Probleme Solide, on la pourra resoudre geometriquement en joignant ensemble ces deux Lieux, en cette sorte.

Ayant fait les deux triangles rectangles ABC, ABD, dont châcun des côtez AB, BC, BD, soit égal à $\sqrt{ab}$, & ayant prolongé Construction geometrique.



indefiniment les hypotenuses AC, AD, vers O, & N, decrivez du centre A, par le point B, entre les asymptotes AO, AN, l'Hyperbole LBM, Aprez cela tirez par le point A, la droite AE, parallele au côté BD, & égale à $\frac{ls}{2r}$, & par le point E, à l'autre côté AB, la parallele indefinie EF, laquelle étant prolongée rencontra l'asymptote AO, aussy prolongée au point G, depuis lequel vous prendrez sur la ligne GF, la ligne GH, égale à $\frac{ld}{2c}$, pour tirer du point H, parallelement à la ligne CD, la droite HI, qui sera terminée en I, par l'asymptote AO. Enfin decrivez alentour de la ligne GI, le demicercle GKI, pour y inscrire la droite GK, égale à $\sqrt{am}$, & decrivez du centre I, par le point K, une circonference de cercle, qui coupe icy l'Hyperbole au point L, duquel vous tirerez la droite LF, perpendiculaire à la ligne GF, & les deux lignes GF, LF, representeront les deux Nombres qu'on cherche.

XXIII.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit à l'excez de la difference de leurs quarrez sur un Nombre donné, & à l'excez de la somme de leurs quarrez sur un Nombre donné en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

dont la difference x−y soit à l'excez xx−yy−ab de la difference xx−yy de leurs quarrez sur le Nombre donné 12 ∾ ab, comme 1 ∾ r à 2 ∾ s, & à l'excez xx+yy−am de la somme xx+yy de leurs quarrez sur le Nombre donné 24 ∾ am, comme 1 ∾ c, à 5 ∾ d.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx - ly,\ xx - yy - ab :: r,\ s.$$

$$lx - ly,\ xx + yy - am :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx - lsy \backsim rxx - ryy - abr.$$

$$ldx - ldy \backsim cxx + cyy - amc.$$

Pour auoir vn calcul plus aisé, supposez

$$x \backsim z + \omega.$$

$$y \backsim z - \omega.$$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ 4z\omega - ab :: r,\ s.$$

$$2l\omega,\ 2zz + 2\omega\omega - am :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$$2ls\omega \backsim 4rz\omega - abr.$$

$$2ld\omega \backsim 2czz + 2c\omega\omega - amc.$$

Dans la premiere $2ls\omega \backsim 4rz\omega - abr$, on trouuera $\frac{abr + 2ls\omega}{4r\omega} \backsim z$, & la deuxieme $2ld\omega \backsim 2czz + 2c\omega\omega - amc$, se changera en celle-cy, $2ld\omega \backsim \frac{aabbcrr + 4labcrs\omega + 4llcss\omega\omega}{8rr\omega\omega} + 2c\omega\omega - amc$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $\omega^4 - \frac{ld\omega^3}{4c} - \frac{1}{2}am\omega\omega + \frac{llss\omega\omega}{4rr} + \frac{labs\omega}{4r} + \frac{1}{16}aabb \backsim 0$, ou $\omega^4 - 5\omega^3 - 11\omega\omega + 6\omega + 9 \backsim 0$, à cause de

$$r \backsim 1.$$

$$ls \backsim 2.$$

$$ab \backsim 12.$$

$$c \backsim 1.$$

$$d \backsim 5.$$

$$am \backsim 24.$$

& dans cette Equation l'on trouuera $\omega \backsim 1$. C'est pourquoy au lieu de $z \backsim \frac{abr + 2ls\omega}{4r\omega}$, ou de $z \backsim \frac{3}{\omega} + 1$, on aura $z \backsim 4$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

Comme la premiere Equation constitutiue $lsx - lsy \backsim rxx - ryy - abr$, ou $yy - \frac{lsy}{r} \backsim xx - \frac{lsx}{r} - ab$, est vn Lieu à vne Hyperbole équilatere, dont nous auons enseigné la construction dans la Quest. VII. & que la deuxieme Equation constitutiue $ldx - ldy \backsim cxx + cyy - amc$, ou $yy + \frac{ldy}{c} \backsim am + \frac{ldx}{c} - xx$, est vn Lieu à vn cercle donné, dont nous auons donné la description dans la 6.e de ces Questions ajoutées, & que cette Question est vn Probleme Solide ; on la pourra résoudre geometriquement en joignant

ensemble ces deux lieux, en cette sorte.

Construction geometrique.

Ayant fait les deux triangles rectangles ABC, ABD, dont chacun des côtez AB, BC, BD, soit égal à $\sqrt{ab}$, & ayant prolongé indefiniment les hypotenuses AC, AD, vers O, & N, decrivez du centre A, par le point B, entre les asymptotes AN, AO, l'Hyperbole LBM. Aprez cela tirez par le point A, la droite AE, parallele au

$AB \backsim \sqrt{ab} \backsim BC \backsim BD.$

$AE \backsim \frac{ls}{2r} \backsim GE.$

$GH \backsim \frac{ld}{2c} \backsim HI.$

$AO \backsim l.$

$AP \backsim r.$

$AQ \backsim s.$

$AR \backsim \sqrt{ab}.$

$AS \backsim c.$

$AT \backsim d.$

$AV \backsim \sqrt{am} \backsim GK.$

$GI \backsim \sqrt{\frac{lldd}{2cc}}.$

$GF \backsim x.$

$LF \backsim y.$

A — $\sqrt{am}$ — V

A — d — T

A — c — S

A — $\sqrt{ab}$ — R

A — s — Q

A — r — P

A — l — O

côté BD, & égale à $\frac{ls}{2r}$, & par le point E, à l'autre côté AB, la parallele indefinie EF, laquelle étant prolongée rencontrera l'asymptote AO, aussy prolongée au point G, depuis lequel vous prendrez sur la ligne GF, la partie GH, égale à $\frac{ld}{2c}$, pour tirer du point H, la droite HI, parallele à la ligne CD, & égale à la ligne GH. Enfin prenez sur l'asymptote GO, la partie GK, égale à $\sqrt{am}$, & decrivez du centre I par le point K, une circonference de cercle, qui coupe icy l'Hyperbole au point L, duquel vous tirerez la droite LF, perpendiculaire à la ligne GF, & les deux lignes GF, LF, representeront les deux Nombres qu'on cherchoit.

XXIV.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit à l'excez de la difference de leurs quarrez sur un Nombre donné, & à l'excez d'un Nombre donné sur la somme de leurs quarrez en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-ab$, de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le Nombre donné $1Q \backsim ab$, comme

1 ∾ r, à 2 ∾ s, & à l'excez $am - xx - yy$ du Nombre donné $40 \sim am$, sur la somme $xx + yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim c$, à $3 \sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx - ly, -ab + xx - yy :: r, s.$$
$$lx - ly, am - xx - yy :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx - lsy \sim rxx - ryy - abr.$$
$$ldx - ldy \sim amc - cxx - cyy.$$

Pour auoir un calcul plus aisé, supposez

$$x \sim z + \omega.$$
$$y \sim z - \omega.$$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ 4z\omega - ab :: r, s.$$
$$2l\omega,\ am - 2zz - 2\omega\omega :: c, d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$$2ls\omega \sim 4rz\omega - abr.$$
$$2ld\omega \sim amc - 2czz - 2c\omega\omega.$$

Dans la premiere $2ls\omega \sim 4rz\omega - abr$, on trouuera $z \sim \frac{abr + 2ls\omega}{4r\omega}$, & la deuxieme $2ld\omega \sim amc - 2czz - 2c\omega\omega$, se changera en celle-cy, $2ld\omega \sim amc - \frac{aabbcrr - 4labcrs\omega - 4llcss\omega\omega}{8rr\omega\omega} - 2c\omega\omega$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $\omega^4 + \frac{ld\omega^3}{c} - \frac{1}{2}am\omega\omega + \frac{llss\omega\omega}{4rr} + \frac{labs\omega}{4r} + \frac{1}{16}aabb \sim 0$, ou $\omega^4 + 3\omega^3 - 19\omega\omega + 6\omega + 9 \sim 0$, à cause de

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$
$$ab \sim 12.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 3.$$
$$am \sim 40.$$

& dans cette Equation, l'on trouuera $\omega \sim 1$. C'est pourquoy au lieu de $z \sim \frac{abr + 2ls\omega}{4r\omega}$, ou de $z \sim \frac{3}{\omega} + 1$, on aura $z \sim 4$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$
$$3.$$

Comme la premiere Equation constitutiue $lsx - lsy \sim rxx - ryy - abr$, ou $yy - \frac{lsy}{r} \sim xx - \frac{lsx}{r} - ab$, est un Lieu à une Hyperbole équilatere, dont nous auons enseigné la construction dans la Quest. VII. & que la deuxieme Equation constitutiue $ldx - ldy \sim amc - cxx - cyy$, ou $xx + \frac{ldx}{c} \sim am + \frac{ldy}{c} - yy$, est un Lieu à un cercle donné, dont nous donné la description dans la 7.e de

ces Questions ajoutées, & que cette Question est vn Probleme Solide, on la pourra resoudre geometriquement, en joignant ensemble ces deux Lieux, en cette sorte.

Construction geometrique.

Ayant fait les deux triangles rectangles ABC, ABD, dont chacun des côtez AB, BC, BD, soit égal à $\sqrt{ab}$, & ayant prolongé les hypotenuses AC, AD, indefiniment vers O, & N, decriuez du centre A, par le point B, entre les asymptotes AO, AN, l'Hyperbole LBM.

$AB \backsim \sqrt{ab} \backsim BC \backsim BD$.
$AE \backsim \frac{lf}{2r} \backsim GE$.
$GH \backsim \frac{l\partial}{2c} \backsim HI$.
$AO \backsim l$.
$AP \backsim r$.
$AQ \backsim f$.
$AR \backsim \sqrt{ab}$.
$AS \backsim c$.
$AT \backsim \partial$.
$AV \backsim \sqrt{am} \backsim GK$.
$GI \backsim \sqrt{\frac{ll\partial\partial}{2cc}}$.
$AG \backsim \sqrt{\frac{llff}{2rr}}$.
$KI \backsim \sqrt{am + \frac{ll\partial\partial}{2cc}}$.
$GF \backsim x$.
$LF \backsim y$.

A — l — O
A — r — P
A — f — Q
A — √ab — R
A — c — S
A — ∂ — T
A — √am — V

Aprez cela tirez par le point A, la droite AE, paralle au côté BD, & égale à $\frac{lf}{2r}$, & par le point E, à l'autre côté AB, la parallele indefinie EF, laquelle étant prolongée rencontrera l'asymptote AO, aussy prolongée au point G, par où vous tirerez la droite GH, parallele à la ligne AE, & égale à $\frac{l\partial}{2c}$. Enfin tirez par le point H, la droite HI, parallele à la ligne AB, & égale à la ligne GH, & ayant pris sur l'asymptote GO, la partie GK, égale à $\sqrt{am}$, decriuez du centre I, par le point K, vne circonference de cercle, qui coupe icy l'Hyperbole au point L, duquel vous tirerez la droite LF, perpendiculaire à la ligne GF, & les deux lignes GF, LF, representeront les deux nombres qu'on cherche.

XXV.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à l'excez de la difference de leurs quarrez sur vn Nombre donné, & à la somme d'vn Nombre donné & de leurs quarrez, en raison donnée.

On propose de trouuer deux nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-ab$ de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $12 \sim ab$, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$, & à la somme $xx+yy+am$, de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, & du nombre donné $6 \sim am$, comme $1 \sim c$, à $d \sim 20$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies

$$lx-ly,\ xx-yy-ab :: r, s.$$
$$lx-ly,\ xx+yy+am :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx-lsy \sim rxx-ryy-abr.$$
$$ldx-ldy \sim cxx+cyy+amc.$$

Pour auoir un calcul plus aisé, supposez

$$x \sim z+\omega.$$
$$y \sim z-\omega.$$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ 4z\omega-ab :: r, s.$$
$$2l\omega,\ 2zz+2\omega\omega+am :: c, d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$$2ls\omega \sim 4rz\omega-abr.$$
$$2ld\omega \sim 2czz+2c\omega\omega+amc.$$

Dans la premiere $2ls\omega \sim 4rz\omega-abr$, on trouuera $z \sim \frac{abr+2ls\omega}{4r\omega}$, & la deuxieme $2ld\omega \sim 2czz+2c\omega\omega+amc$, se changera en celle-cy, $2ld\omega \sim \frac{aabbcrr+4labcrs\omega+4llcss\omega\omega}{8rr\omega\omega}+2c\omega\omega+amc$, laquelle étant reduite, donne celle-cy, $\omega^4-\frac{ld\omega^3}{c}+\frac{1}{2}am\omega\omega+\frac{llss\omega\omega}{4rr}+\frac{labs\omega}{4r}+\frac{1}{16}aabb \sim 0$, ou $\omega^4-20\omega^3+4\omega\omega+6\omega+9 \sim 0$, à cause de

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$
$$ab \sim 12.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 20.$$
$$am \sim 6.$$

& dans cette Equation, l'on trouuera $\omega \sim 1$. c'est pourquoy au lieu de $z \sim \frac{abr+2ls\omega}{4r\omega}$, ou de $z \sim \frac{3}{\omega}+1$, on aura $z \sim 4$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

Comme la premiere Equation constitutiue $lsx-lsy \sim rxx-ryy-abr$, ou $yy-\frac{lsy}{r} \sim xx-\frac{lsx}{r}-ab$, est un lieu à une Hyperbole

équilatere, dont Nous auons enseigné la construction dans la Quest. VII. & que la deuxieme Equation constitutiue $ldx - ldy \sim cxx + cyy + amc$, ou $yy + \frac{ldy}{c} + am \sim \frac{ldx}{c} - xx$, est Vn Lieu à Vn cercle donné, dont Nous auons donné la description dans la 8.e de ces Questions ajoutées, & que cette Question est Vn Probleme Solide, on la pourra resoudre geometriquement en joignant ensemble ces deux Lieux; comme Vous auez Vû dans les Questions precédentes, sans qu'il soit besoin d'en parler dauantage.

Quest. XXVI.

Trouuer deux Nombres, dont la somme & la difference soient à l'excez de la difference de leurs quarrez, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-ab$ de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le Nombre donné $12 \sim ab$, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$: & dont la somme $x+y$ soit à l'excez $xx-yy-am$ de la difference de leurs quarrez $xx-yy$ sur le nombre donné $4 \sim am$, comme $2 \sim c$, à $3 \sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly, \; xx-yy-ab :: r, \; s.$$

$$lx+ly, \; xx-yy-am :: c, \; d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx - lsy \sim rxx - ryy - abr.$$

$$ldx + ldy \sim cxx - cyy - amc.$$

Pour éuiter Vn long calcul, supposez

$$x \sim z + \omega.$$

$$y \sim z - \omega.$$

& alors Vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega, \; 4z\omega - ab :: r, \; s.$$

$$2lz, \; 4z\omega - am :: c, \; d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$$2ls\omega \sim 4rz\omega - abr.$$

$$2ldz \sim 4cz\omega - amc.$$

Dans la premiere $2ls\omega \sim 4rz\omega - abr$, on trouuera $z \sim \frac{abr + 2ls\omega}{4r\omega}$, & la deuxieme $2ldz \sim 4cz\omega - amc$, se changera en celle-cy, $\frac{labdr + 2llds\omega}{2r\omega} \sim abc + \frac{2lcs\omega}{r} - amc$; ou $\omega\omega - \frac{amr\omega}{2ls} + \frac{abr\omega}{2ls} - \frac{ld\omega}{2c} \sim \frac{abdr}{4cs}$, dans laquelle on trouuera

$\omega \backsim \frac{amr-abr}{4ls} + \frac{ld}{4c} + \sqrt{\frac{aammrr-2abamrr+aabbrr}{16llss} + \frac{amdr+abdr}{8cs} + \frac{lldd}{16cc}}$.
C'est pourquoy au lieu de $z \backsim \frac{abr+2lsa}{4r\omega}$, on aura $z \backsim \frac{abc-amc}{4ld} + \frac{ls}{4r} + \sqrt{\frac{aabbcc-2abamcc+aammcc}{16lldd} + \frac{abcs+amcs}{8dr} + \frac{llss}{16rr}}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abc-amc}{4ld} + \frac{ls}{4r} + \sqrt{\frac{aabbcc-2abamcc+aammcc}{16lldd} + \frac{abcs+amcs}{8dr} + \frac{llss}{16rr}} +$$
$$\frac{amr-abr}{4ls} + \frac{ld}{4c} + \sqrt{\frac{aammrr-2abamrr+aabbrr}{16llss} + \frac{abdr+amdr}{8cs} + \frac{lldd}{16cc}}.$$

$$\frac{abc-amc}{4ld} + \frac{ls}{4r} \mp \sqrt{\frac{aabbcc-2abamcc+aammcc}{16lldd} + \frac{abcs+amcs}{8dr} + \frac{llss}{16rr}} -$$
$$\frac{amr+abr}{4ls} - \frac{ld}{4c} - \sqrt{\frac{aammrr-2abamrr+aabbrr}{16llss} + \frac{abdr+amdr}{8cs} + \frac{lldd}{16cc}}.$$

Parceque nous auons supposé

$r \backsim 1$.
$s \backsim 2$.
$ab \backsim 12$.
$c \backsim 2$.
$d \backsim 3$.
$am \backsim 4$.

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.
3.

Les deux nombres donnez ab, am, peuuent être égaux entre eux, & alors les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ls}{4r} + \sqrt{\frac{abcs}{4dr} + \frac{llss}{16rr}} + \frac{ld}{4c} + \sqrt{\frac{abdr}{4cs} + \frac{lldd}{16cc}}.$$
$$\frac{ls}{4r} + \sqrt{\frac{abcs}{4dr} + \frac{llss}{16rr}} - \frac{ld}{4c} - \sqrt{\frac{abdr}{4cs} + \frac{lldd}{16cc}}.$$

Parceque nous auons supposé

$r \backsim 1$.
$s \backsim 2$.
$c \backsim 2$.
$d \backsim 3$
$ab \backsim 12$.

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{7}{8} + \frac{7}{8}\sqrt{17}$.
$\frac{7}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17}$.

On connoit par la Quest. VII. & par la 9.e de ces Questions ajoutées, que les deux Equations constitutiues de cette Question sont des Lieux à des Hyperboles, mais on ne doit pas joindre ensemble ces deux Hyperboles pour la resoudre, parcequ'elle est un Probleme Plan.

XXVII.

Trouuer deux, dont la difference soit à l'excez de la difference de leurs quarrez sur vn Nombre donné, & la somme à l'excez d'vn Nombre donné sur la difference de leurs quarrez, en raison donnée.

On propose de trouuer deux nombres,

$$x.$$
$$y.$$

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-ab$ de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $12 \backsim ab$, comme $1 \backsim r$, à $2 \backsim s$, & dont la somme $x+y$ soit à l'excez $am-xx+yy$, du Nombre donné $36 \backsim am$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez comme $2 \backsim c$, à $5 \backsim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ xx-yy-ab :: r,s.$$
$$lx+ly,\ am-xx+yy :: c,d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx-lsy \backsim rxx-ryy-abr.$$
$$ldx+ldy \backsim amc-cxx+cyy.$$

Pour auoir vn calcul plus aisé, supposez

$$x \backsim z+\omega.$$
$$y \backsim z-\omega.$$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ 4z\omega-ab :: r,s.$$
$$2lz,\ am-4z\omega :: c,d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$$2ls\omega \backsim 4rz\omega-abr.$$
$$2ldz \backsim amc-4cz\omega.$$

Dans la premiere $2ls\omega \backsim 4rz\omega-abr$, on trouuera $z \backsim \frac{abr+2ls\omega}{4r\omega}$, & la deuxieme $2ldz \backsim amc-4cz\omega$, se changera en celle-cy, $\frac{labdr+2lld s\omega}{2r\omega} \backsim amc-abc-\frac{2lcs\omega}{r}$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $\omega\omega+\frac{abr\omega-amr\omega}{2ls}+\frac{ld\omega}{2c} \backsim -\frac{abdr}{4cs}$, dans laquelle on trouuera $\omega \backsim \frac{amr-abr}{4ls}-\frac{ld}{4c}-\sqrt{\frac{aabbrr-2abamrr+aammrr}{16llss}-\frac{abdr-amdr}{8cs}+\frac{lldd}{16cc}}$.
C'est pourquoy au lieu de $z \backsim \frac{abr+2ls\omega}{4r\omega}$, on aura $z \backsim \frac{amc-abc}{4ld}+\frac{ls}{4r}+\sqrt{\frac{aabbcc-2abamcc+aammcc}{16lldd}-\frac{amcs-abcs}{8dr}+\frac{llss}{16rr}}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{amc-abc}{4ld}+\frac{ls}{4r}+\sqrt{\frac{aabbcc-2abamcc+aammcc}{16lldd}-\frac{abcs-amcs}{8dr}+\frac{llss}{16rr}}+$$
$$\frac{amr-abr}{4ls}-\frac{ld}{4c}-\sqrt{\frac{aabbrr-2abamrr+aammrr}{16llss}-\frac{abdr-amdr}{8cs}+\frac{lldd}{16cc}}.$$

$$\frac{amc-abc}{4ld}+\frac{ls}{4r}+\sqrt{\frac{aabbcc-2abamcc+aammcc}{16lldd}-\frac{abcs-amcs}{8dr}+\frac{llss}{16rr}}\;-$$

$$\frac{amr+abr}{4ls}+\frac{ld}{4c}+\sqrt{\frac{aabbrr-2abamrr+aammrr}{16llss}-\frac{abdr-amdr}{8cs}+\frac{lldd}{16cc}}.$$

Parceque nous auons supposé

$r \propto 1.$

$s \propto 2.$

$ab \propto 12.$

$c \propto 2.$

$d \propto 5.$

$am \propto 36.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

XXVIII.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à l'excez de la difference de leurs quarrez sur vn nombre donné, & la somme à la somme d'vn Nombre donné & de la difference de leurs quarrez en raison donnée.

On propose de trouuer deux nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-ab$, de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, sur le nombre donné $12 \propto ab$, comme $1 \propto r$, à $2 \propto s$, & dont la somme $x+y$ soit à la somme $am+xx-yy$, du nombre donné $16 \propto am$, & de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \propto c$, à $4 \propto d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$lx-ly,\ xx-yy-ab :: r, s.$

$lx+ly,\ xx-yy+am :: c, d.$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$lsx-lsy \propto rxx-ryy-abr.$

$ldx+ldy \propto cxx-cyy+amc.$

Pour auoir vn calcul plus aisé, supposez

$x \propto z+\omega.$

$y \propto z-\omega.$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$2l\omega,\ 4z\omega-ab :: r, s.$

$2lz,\ 4z\omega+am :: c, d.$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$$2ls\omega \backsim 4rz\omega - abr.$$
$$2ldz \backsim 4cz\omega + amc.$$

Dans la premiere $2ls\omega \backsim 4rz\omega - abr$, on trouuera $z \backsim \frac{abr + 2ls\omega}{4r\omega}$, & la deuxieme $2ldz \backsim 4cz\omega + amc$, se changera en celle-cy, $\frac{labdr + 2llds\omega}{2r\omega} \backsim abc + \frac{2lcs\omega}{r} + amc$, laquelle étant reduite, donne celle-cy, $\omega\omega + \frac{abr\omega + amr\omega}{2ls} - \frac{ld\omega}{2c} \backsim \frac{abdr}{4cs}$, dans laquelle on trouuera $\omega \backsim \frac{ld}{4c} - \frac{abr - amr}{4ls} + \sqrt{\frac{lldd}{16cc} + \frac{abdr - amdr}{8cs} + \frac{aabbrr + 2abamrr + aammrr}{16llss}}$. c'est pourquoy au lieu de $z \backsim \frac{abr + 2ls\omega}{4r\omega}$, on aura $z \backsim \frac{abc + amc}{4ld} + \frac{ls}{4r} + \sqrt{\frac{aabbcc + 2abamcc + aammcc}{16lldd} + \frac{abcs - amcs}{8dr} + \frac{llss}{16rr}}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abc + amc}{4ld} + \frac{ls}{4r} + \sqrt{\frac{aabbcc + 2abamcc + aammcc}{16lldd} + \frac{abcs - amcs}{8dr} + \frac{llss}{16rr}} + \frac{ld}{4c} - \frac{abr - amr}{4ls} + \sqrt{\frac{lldd}{16cc} + \frac{abdr - amdr}{8cs} + \frac{aabbrr + 2abamrr + aammrr}{16llss}}.$$

$$\frac{abc + amc}{4ld} + \frac{ls}{4r} + \sqrt{\frac{aabbcc + 2abamcc + aammcc}{16lldd} + \frac{abcs - amcs}{8dr} + \frac{llss}{16rr}} - \frac{ld}{4c} + \frac{abr + amr}{4ls} - \sqrt{\frac{lldd}{16cc} + \frac{abdr - amdr}{8cs} + \frac{aabbrr + 2abamrr + aammrr}{16llss}}.$$

Parceque Nous auons supposé

$r \backsim 1.$
$s \backsim 2.$
$ab \backsim 12.$
$c \backsim 1.$
$d \backsim 4.$
$am \backsim 16.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$5.$
$3.$

Quand les deux Nombres donnez ab, am, seront égaux, les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abc}{2ld} + \frac{ls}{4r} + \sqrt{\frac{llss}{16rr} + \frac{aabbcc}{4lldd}} + \frac{ld}{4c} - \frac{abr}{2ls} + \sqrt{\frac{lldd}{16cc} + \frac{aabbrr}{4llss}}.$$

$$\frac{abc}{2ld} + \frac{ls}{4r} + \sqrt{\frac{llss}{16rr} + \frac{aabbcc}{4lldd}} - \frac{ld}{4c} + \frac{abr}{2ls} - \sqrt{\frac{lldd}{16cc} + \frac{aabbrr}{4llss}}.$$

Parceque Nous auons supposé

$r \backsim 1.$
$s \backsim 2.$
$ab \backsim 12.$
$c \backsim 1.$
$d \backsim 4.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{3}{2}\sqrt{10}.$
$4 - \frac{1}{2}\sqrt{10}.$

XXIX.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à l'excez de la difference de leurs quarrez sur un Nombre donné, & à l'excez de leur produit sur un Nombre donné, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$, soit à l'excez $xx-yy-ab$, de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $12 \backsim ab$, comme $1 \backsim r$, à $2 \backsim s$: & à l'excez $xy-am$ de leur produit xy, sur le Nombre donné $9 \backsim am$ comme $1 \backsim c$, à $3 \backsim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$lx-ly,\ xx-yy-ab :: r,\ s.$

$lx-ly,\ xy-am :: c,\ d.$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$lsx-lsy \backsim rxx-ryy-abr.$

$ldx-ldy \backsim cxy-amc.$

Dans la seconde $ldx-ldy \backsim cxy-amc$, on trouuera $y \backsim \frac{ldx+amc}{ld+cx}$, & la premiere $lsx-lsy \backsim rxx-ryy-abr$, se changera en celle-cy, $lsx - \frac{lldsx-lamcs}{ld+cx} \backsim rxx - \frac{lldd rxx - 2lamcd rx - aammccr}{lldd+2lcdx+ccxx} - abr$, laquelle étant reduite, donne celle-cy, $x^4 + \frac{2ldx^3}{c} - \frac{lsx^3}{r} - abxx - \frac{lldsxx}{cr} + \frac{lamsx}{r} - \frac{2labdx - 2lamdx}{c} \backsim aamm + \frac{llabdd}{cc} - \frac{llamds}{cr}$, ou $x^4 + 4x^3 - 18xx - 108x \backsim 135$, à cause de

$r \backsim 1.$

$s \backsim 2.$

$ab \backsim 12.$

$c \backsim 1.$

$d \backsim 3.$

$am \backsim 9.$

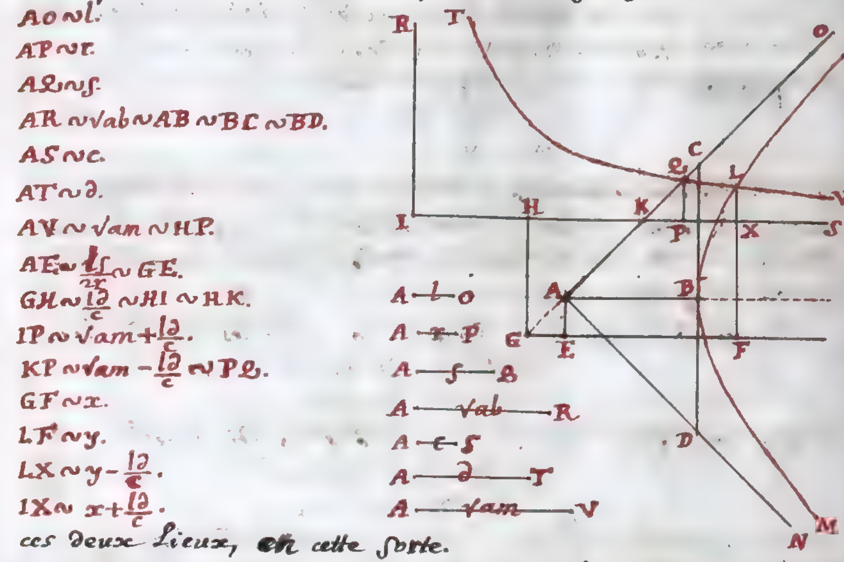
& dans cette Equation, l'on trouuera $x \backsim 5$. c'est pourquoy au lieu de $y \backsim \frac{ldx+amc}{ld+cx}$, on aura $y \backsim 3$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

Comme la premiere Equation constitutiue $lsx-lsy \backsim rxx-ryy-abr$, est un Lieu à une Hyperbole équilatere, dont Nous auons donné la construction dans la Quest. VII. & que la deuxieme $ldx-ldy \backsim cxy-amc$, est un Lieu à une Hyperbole entre ses asymptotes,

dont Nous avons enseigné la description dans la 12.e de ces Questions ajoutées: & que cette Question est un Probleme Solide, on la pourra resoudre geometriquement en joignant ensemble



$AO \backsim l.$
$AP \backsim r.$
$AQ \backsim s.$
$AR \backsim \sqrt{ab} \backsim AB \backsim BC \backsim BD.$
$AS \backsim c.$
$AT \backsim d.$
$AV \backsim \sqrt{am} \backsim HP.$
$AE \backsim \frac{ls}{2r} \backsim GE.$
$GH \backsim \frac{ld}{c} \backsim HI \backsim HK.$
$IP \backsim \sqrt{am} + \frac{ld}{c}.$
$KP \backsim \sqrt{am} - \frac{ld}{c} \backsim PQ.$
$GF \backsim x.$
$LF \backsim y.$
$LX \backsim y - \frac{ld}{c}.$
$IX \backsim x + \frac{ld}{c}.$

A — l — O
A — r — P
A — s — Q
A — $\sqrt{ab}$ — R
A — c — S
A — d — T
A — $\sqrt{am}$ — V

ces deux Lieux, en cette sorte.

Construction geometrique. Ayant fait les deux triangles rectangles ABC, ABD, dont châcun des côtez AB, BC, BD, soit égal à $\sqrt{ab}$, & ayant prolongé indefiniment les Hypotenuses AC, AD, vers O, & N, decrivez du centre A, par le point B, entre les asymptotes AN, AO, l'Hyperbole LBM. Aprez cela tirez par le point A, la droite AE, parallele au côté BD, & égale à $\frac{ls}{2r}$, & par le point E, à l'autre côté AB, la parallele indefinie EF, laquelle étant prolongée rencontrera l'asymptote AO, aussy prolongée au point G, par où vous tirerez la droite GH, parallele à la ligne CD, & égale à $\frac{ld}{c}$, pour tirer par le point H, à la ligne GF, la parallele indefinie IS, sur laquelle vous prendrez d'un côté la partie HP, égale à $\sqrt{am}$, & de l'autre côté la partie HI, égale à la ligne HK, ou à la ligne GH, à laquelle vous tirerez par le point I, la parallele indefinie IR. Enfin tirez par le point P, la droite PQ, égale à la ligne KP, ou à la difference des deux HP, HK, & decrivez du centre I, par le point Q, entre les asymptotes IR, IS, l'Hyperbole TQV, qui rencontre icy la premiere LBM, au point L, par où vous tirerez la droite LF, perpendiculaire à la ligne GF, & les deux lignes GF, LF, representeront les deux nombres qu'on cherche, comme il est aisé à demontrer.

XXX.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à l'excez de la difference de leurs quarrez sur un Nombre donné, & à l'excez d'un nombre donné sur leur produit, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-ab$, de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $12 \sim ab$, comme r, à $2 \sim s$: & à l'excez $am-xy$ de leur produit xy, sur le nombre donné $25 \sim am$, comme $1 \sim c$, à $5 \sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ xx-yy-ab :: r, s.$$

$$lx-ly,\ am-xy :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx-lsy \sim rxx-ryy-abr.$$

$$ldx-ldy \sim amc-cxy.$$

Dans la deuxieme $ldx-ldy \sim amc-cxy$, on trouuera $x \sim \frac{amc+ldy}{cy+ld}$, & la premiere $lsx-lsy \sim rxx-ryy-abr$, se changera en celle-cy, $\frac{lamcs+llds y}{cy+ld} - lsy \sim \frac{aammccr+2lamcdry+lldd ryy}{ccyy+2lcdy+lldd} - ryy-abr$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $y^4 + \frac{2ldy^3}{c} - \frac{lsy^3}{r} + abyy - \frac{lldsyy}{cr} + \frac{2labdy}{c} + \frac{lamsy}{r} - \frac{2lamdy}{c} \sim \frac{llamds}{cr} + \frac{llabdd}{cc} - aamm$, ou $y^4 + 8y^3 + 2yy - 80y \sim -75$, à cause de.

$r \sim 1.$

$s \sim 2.$

$ab \sim 12.$

$c \sim 1.$

$d \sim 5.$

$am \sim 25.$

Et dans cette Equation, l'on trouuera $y \sim 3$. C'est pourquoy au lieu de $x \sim \frac{amc+ldy}{cy+ld}$, on aura $x \sim 5$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5.

3.

Comme la premiere Equation constitutiue $lsx-lsy \sim rxx-ryy-abr$, est un Lieu à une Hyperbole equilatere, dont nous auons donné la construction dans la Quest. VII. & que la deuxieme Equation constitutiue $ldx-ldy \sim amc-cxy$, est un Lieu à une

Hyperbole entre ses asymptotes, dont nous avons enseigné la description dans la 13. de ces Questions ajoutées: & que cette Question est un Probleme solide, on la pourra resoudre geometriquement en joignant ensemble ces deux lieux, en cette sorte.

Construction geometrique. Ayant fait les deux triangles rectangles ABC, ABD, dont châcun des côtez AB, BC, BD, soit égale à $\sqrt{ab}$; & ayant prolongé indefiniment les hypotenuses AC, AD, vers O, & N, decrivez du centre A, par le point B, entre les asymptotes AN, AO, l'Hyperbole LBM. Aprez cela tirez par le point A, la droite AE, parallele au côté BD, & égale à $\frac{ls}{2r}$, & par le point E, à l'autre côté AB, la parallele indefinie EF, laquelle étant prolongée rencontrera l'asymptote

$AB \backsim \sqrt{ab} \backsim BC \backsim BD.$

$AE \backsim \frac{ls}{2r} \backsim EG.$

$GH \backsim \frac{ld}{c} \backsim HI$

$HP \backsim \sqrt{am}$

$PQ \backsim \frac{ld}{c} + \sqrt{am}.$

$AO \backsim l.$

$AP \backsim r.$

$AQ \backsim s.$

$AR \backsim \sqrt{ab}.$

$AS \backsim c.$

$AT \backsim d.$

$AV \backsim \sqrt{am}.$

$GF \backsim x \backsim FQ.$

$LF \backsim y.$

$IP \backsim \sqrt{am} - \frac{ld}{c}.$

A — $\sqrt{am}$ — V

A — d — T

A — c — S

A — $\sqrt{ab}$ — R

A — s — Q

A — r — P

A — l — O

AO, aussy prolongée au point G, par lequel vous tirerez la droite GH, parallele à la ligne CD, & égale $\frac{ld}{c}$, pour tirer par le point H, à la ligne GF, la parallele indefinie HS, sur laquelle vous prendrez d'un même côté la ligne HI, égale à la ligne GH, & la ligne HP, égale à $\sqrt{am}$, Enfin tirez par le point I, à la ligne CD, la parallele indefinie IR, & par le point P, à la même ligne CD, la parallele PQ, qui se trouvera finie par l'asymptote AO, au point Q, par lequel vous tirerez du centre I, entre les asymptotes IR, IS, l'Hyperbole TQV, qui rencontre icy la premiere LBM, au point L, duquel vous tirerez la droite LF, perpendiculaire à la ligne GF, ou parallele à la ligne CD, & les deux lignes GF, LF, representeront les deux nombres qu'on cherche, comme il est aisé à demontrer.

XXXI.

XXXI.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à l'excez de la difference de leurs quarrez sur un Nombre donné, & à la somme d'un Nombre donné & de leur produit, en raison donnée.

On propose de trouuer deux nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$, soit à l'excez $xx-yy-ab$ de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné ab, comme $1 \backsim r$, à $2 \backsim s$, & à la somme $xy+am$ du nombre donné $9 \backsim am$, & de leur produit xy, comme $1 \backsim c$, à $12 \backsim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ xx-yy-ab :: r, s.$$

$$lx-ly,\ xy+am :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx-lsy \backsim rxx-ryy-abr.$$

$$ldx-ldy \backsim cxy+amc.$$

Dans la seconde $ldx-ldy \backsim cxy+amc$, on trouuera $y \backsim \frac{ldx-amc}{ld+cx}$, & la premiere $lsx-lsy \backsim rxx-ryy-abr$, se changera en celle-cy, $lsx-\frac{lldsx+lamcs}{ld+cx} \backsim rxx-\frac{lldd rxx+2lamcdrx-aammccr}{lldd+2lcdx+ccxx}-abr$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $x^4-\frac{lsx^3}{r}+\frac{2ldx^3}{c}-abxx-\frac{lldsxx}{cr}-\frac{lamsx}{r}+\frac{2lamdx-2labdx}{c} \backsim aamm+\frac{llabdd}{cc}+\frac{llamds}{cr}$, ou $x^4+22x^3-36xx-90x \backsim 2025$, à cause de

$$r \backsim 1.$$

$$s \backsim 2.$$

$$ab \backsim 12.$$

$$c \backsim 1.$$

$$d \backsim 12.$$

$$am \backsim 9.$$

& dans cette Equation, l'on trouuera $x \backsim 5$: c'est pourquoy au lieu de $y \backsim \frac{ldx-amc}{ld+cx}$, on aura $y \backsim 3$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$

$$3.$$

Nous pourrions aussy resoudre cette Question par l'intersection de deux Hyperboles, parce qu'elle est un Probleme solide: Mais comme la construction n'en est pas beaucoup elegante, nous n'en parlerons pas dauantage.

XXXII.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit à l'excez de la difference de leurs quarrez sur Vn Nombre donné, & la somme à la somme d'Vn nombre donné & de leur produit, en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-ab$, de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $12 \sim ab$, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$, & dont la somme $x+y$, soit à la somme $xy+am$ de leur produit xy, & du Nombre donné $25 \sim am$, comme $1 \sim c$, à $5 \sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ xx-yy-ab :: r,\ s.$$

$$lx+ly,\ xy+am :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$lsx-lsy \sim rxx-ryy-abr.$$

$$ldx+ldy \sim cxy+amc.$$

Dans la seconde $ldx+ldy \sim cxy+amc$, on trouvera $x \sim \frac{amc-ldy}{ld-cy}$, & la premiere $lsx-lsy \sim rxx-ryy-abr$, se changera en celle-cy, $\frac{lamcs-2llds y+lcsyy}{ld-cy} \sim \frac{aammccr-2lamcdry+lldd ryy}{lldd-2lcdy+ccyy}-ryy-abr$, laquelle étant reduite, donne celle-cy, $y^4-\frac{lsy^3}{r}-\frac{2ldy^3}{c}+abyy+\frac{3lldsyy}{cr}-\frac{2l^3ddsy}{ccr}-\frac{lamsy}{r}-\frac{2labdy}{c}+\frac{2lamdy}{c} \sim aamm-\frac{llabdd}{cc}-\frac{llamds}{cr}$, ou $y^4-12y^3+42yy-20y \sim 75$, à cause de

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 2.$$

$$ab \sim 12.$$

$$c \sim 1.$$

$$d \sim 5.$$

$$am \sim 25.$$

& dans cette Equation, l'on trouvera $y \sim 3$. C'est pourquoy au lieu de $x \sim \frac{amc-ldy}{ld-cy}$, on aura $x \sim 5$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$5.$$

$$3.$$

Cette Question étant Vn Probleme solide, se peut aussy resoudre geometriquement par deux Hyperboles, comme Vous avez suffisamment vû dans la 29.e & 30.e de ces Questions ajoutées, sans qu'il soit besoin d'en parler davantage.

XXXIII.

Trouuer deux nombres, dont la difference soit à l'excez de la difference de leurs quarrez sur vn nombre donné, & la somme à l'excez de leur produit sur vn nombre donné, en raison donnée.

On propose de trouuer deux nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-ab$, de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $12 \backsim ab$, comme $1 \backsim r$, à $2 \backsim s$: & dont la somme $x+y$ soit à l'excez $xy-am$, de leur produit xy, sur le nombre donné $9 \backsim am$, comme $4 \backsim c$, à $3 \backsim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ xx-yy-ab :: r,\ s.$$

$$lx+ly,\ xy-am :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx-lsy \backsim rxx-ryy-abr.$$

$$ldx+ldy \backsim cxy-amc.$$

Dans la seconde $ldx+ldy \backsim cxy-amc$, on trouuera $y \backsim \frac{amc+ldx}{cx-ld}$, & la premiere $lsx-lsy \backsim rxx-ryy-abr$, se changera en celle-cy, $\frac{lcsxx-2lldsx-lamcs}{cx-ld} \backsim rxx-\frac{aammccr-2lamcdrx-lldd rxx}{ccxx-2lcdx+lldd}-abr$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $x^4-\frac{lsx^3}{r}-\frac{2ldx^3}{c}-abxx+\frac{3lldsxx}{cr}+\frac{2labdx-2lamdx}{c}+\frac{lamsx}{r}-\frac{2l^3ddsx}{ccr} \backsim \frac{llamds}{cr}+aamm+\frac{llabdd}{cc}$, ou $x^4-\frac{7x^3}{2}-\frac{15}{2}xx+\frac{81}{4}x \backsim \frac{405}{4}$, à cause de

$r \backsim 1$.

$s \backsim 2$.

$ab \backsim 12$.

$c \backsim 4$.

$d \backsim 3$.

$am \backsim 9$.

& dans cette Equation, l'on trouuera $x \backsim 5$. C'est pourquoy au lieu de $y \backsim \frac{amc+ldx}{cx-ld}$, on aura $y \backsim 3$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

5.

3.

On void aisément que la quantité x, n'a qu'vne valeur, parcequ'en diuisant l'Equation precedente $x^4-\frac{7x^3}{2}-\frac{15}{2}xx+\frac{81}{4}x \backsim \frac{405}{4}$, ou $x^4-\frac{7}{2}x^3-\frac{15}{2}xx+\frac{81}{4}x-\frac{405}{4} \backsim 0$, par $x-5$, il vient cette Equation impossible $x^3+\frac{3}{2}xx+\frac{81}{4} \backsim 0$.

XXXIV.

Trouuer deux nombres, dont la difference soit à l'excez de la difference de leurs quarrez sur vn Nombre donné, & la somme à l'excez d'vn nombre donné sur leur produit, en raison donnée.

On propose de trouuer deux nombres,

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $xx-yy-ab$ de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $12 \sim ab$, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$: & dont la somme $x+y$ soit à l'excez $am-xy$ du Nombre donné $25 \sim am$, sur leur produit xy, comme $4 \sim c$, à $5 \sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ xx-yy-ab :: r, s.$$

$$lx+ly,\ am-xy :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx-lsy \sim rxx-ryy-abr.$$

$$ldx+ldy \sim amc-cxy.$$

Dans la seconde $ldx+ldy \sim amc-cxy$, on trouuera $y \sim \frac{amc-ldx}{cx+ld}$, & la premiere $lsx-lsy \sim rxx-ryy-abr$, se changera en celle-cy, $\frac{lcsxx+2lldsx-lamcs}{cx+ld} \sim rxx - \frac{aammccr+2lamcdrx-llddrxx}{ccxx+2lcdx+lldd} - abr$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $x^4 - \frac{lsx^3}{r} + \frac{2ldx^3}{c} - abxx - \frac{3lldsxx}{cr} + \frac{lamsx}{r} - \frac{2l^3ddsx}{ccr} + \frac{2lamdx-2labdx}{c} \sim aamm + \frac{llabdd}{cc} - \frac{llamds}{cr}$, ou $x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{39}{2}xx + \frac{305}{4}x \sim \frac{2325}{4}$, à cause de

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 2.$$

$$ab \sim 12.$$

$$c \sim 4.$$

$$d \sim 5.$$

$$am \sim 25.$$

& dans cette Equation, l'on trouuera $x \sim 5$: c'est pourquoy au lieu de $y \sim \frac{amc-ldx}{cx+ld}$, on aura $y \sim 3$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$

$$3.$$

Parcequ'en diuisant l'Equation precedente $x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{39}{2}xx + \frac{305}{4}x \sim \frac{2325}{4}$, par celle-cy, $x-5 \sim 0$, il vient cette Equation impossible, $x^3 + \frac{11}{2}xx + 8x + \frac{465}{4} \sim 0$, on connoit que la quantité inconnue n'a point d'autre valeur veritable que 5.

XXXV.

Trouuer deux nombres, dont la difference soit à l'excez d'vn nombre donné sur la difference de leurs quarrez, & à la somme d'vn nombre donné & de la difference de leurs quarrez en raison données.

On propose de trouuer deux nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $ab-xx+yy$ du Nombre donné $24 \sim ab$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$: & à la somme $am+xx-yy$ du Nombre donné $4 \sim am$, & de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez comme $1 \sim c$, à $12 \sim d$.

Si on multiplie la somme des deux Nombres donnez par le double du Plan sous les antecedens des deux raisons données, & que par le double du produit on diuise l'excez du produit sous le premier Nombre donné & le Plan sous le consequent de la seconde raison donnée & l'antecedent de la premiere sur le produit sous le second Nombre donné & le Plan sous le consequent de la premiere raison donnée & l'antecedent de la seconde: & pareillement si on multiplie le consequent de chaque raison donnée par l'antecedent de l'autre, & que par le double de la somme des deux produits, on diuise le produit sous la somme des deux Nombres donnez & le Plan sous les antecedens des deux raisons données; on aura deux Nombres, dont la somme & la difference donneront les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ ab-xx+yy :: r,\ s.$$

$$lx-ly,\ am+xx-yy :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx-lsy \sim abr-rxx+ryy.$$

$$ldx-ldy \sim amc-cyy+cxx.$$

Pour auoir vn calcul plus aisé, supposez

$$x \sim z+\omega.$$

$$y \sim z-\omega.$$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ ab-4z\omega :: r,\ s.$$

$$2l\omega,\ am+4z\omega :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$$2ls\omega \sim abr-4rz\omega.$$

$$2ld\omega \sim amc+4cz\omega.$$

Dans la premiere $2ls\omega \sim abr - 4rz\omega$, on trouuera $\omega \sim \frac{abr}{4rz+2ls}$, & la deuxieme $2ld\omega \sim amc + 4cz\omega$, se changera en celle-cy, $\frac{labdr}{2rz+ls} \sim amc + \frac{2abcrz}{2rz+ls}$, ou $labdr \sim 2amcrz + 2abcrz + lamcs$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{labdr - lamcr}{2abcr + 2amcr}$. c'est pourquoy au lieu de $\omega \sim \frac{abr}{4rz+2ls}$, on aura $\omega \sim \frac{abcr + amcr}{2ldr + 2lcs}$: & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{labdr - lamcs}{2abcr + 2amcr} + \frac{abcr + amcr}{2ldr + 2lcs}.$$

$$\frac{labdr - lamcs}{2abcr + 2amcr} - \frac{abcr - amcr}{2ldr + 2lcs}.$$

Parceque Nous auons supposé

$r \sim 1$.

$s \sim 2$.

$ab \sim 24$.

$c \sim 1$.

$d \sim 12$.

$am \sim 4$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

6.

4.

Les deux Nombres donnez ab, am, peuuent être égaux entre eux, & alors les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ldr - lcs}{4cr} + \frac{abcr}{ldr + lcs}.$$

$$\frac{ldr - lcs}{4cr} - \frac{abcr}{ldr + lcs}.$$

Parceque Nous auons supposé

$r \sim 1$.

$s \sim 2$.

$c \sim 1$.

$d \sim 12$.

$ab \sim 24$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{59, 11}{14}$.

Au lieu des deux Nombres donnez égaux ab, am, on peut faire que les deux raisons donnéas $\frac{r}{s}$, $\frac{c}{d}$, soient égales, & alors les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{labd - lamd}{2abc + 2amc} + \frac{abc + amc}{4ld}.$$

$$\frac{labd - lamd}{2abc + 2amc} - \frac{abc - amc}{4ld}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$c \sim 1.$$
$$d \sim 12$$
$$ab \sim 24.$$
$$am \sim 4.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{409,\ 311}{84}.$$

XXXVI.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit à l'excez d'un nombre donné sur la difference de leurs quarrez, & de leur somme à l'excez de la somme de leurs quarrez sur un nombre donné, en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la difference $x-y$, soit à l'excez $ab-xx+yy$ du Nombre donné $24 \sim ab$ sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $5 \sim s$: & dont la somme $x+y$ soit à l'excez $xx+yy-am$ de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez sur le Nombre donné $12 \sim am$, comme $1 \sim c$, à $4 \sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ ab-xx+yy :: r,\ s.$$
$$lx+ly,\ xx+yy-am :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$lsx-lsy \sim abr-rxx+ryy.$$
$$ldx+ldy \sim cxx+cyy-amc.$$

Pour avoir un calcul plus aisé, supposez

$$x \sim z+\omega.$$
$$y \sim z-\omega.$$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ ab-4z\omega :: r,\ s.$$
$$2lz,\ 2zz+2\omega\omega-am :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutives,

$$2ls\omega \sim abr-4rz\omega.$$
$$2ldz \sim 2czz+2c\omega\omega-amc.$$

Dans la premiere $2ls\omega \sim abr-4rz\omega$, on trouvera $\omega \sim \frac{abr}{4rz+2ls}$, & la deuxieme $2ldz \sim 2czz+2c\omega\omega-amc$, se changera en celle-cy, $2ldz \sim 2czz+\frac{aabbrrc}{8rrzz+8lrsz+2llss}-amc$, laquelle étant reduite, donne celle-cy, $z^4+\frac{lsz^3}{r}-\frac{ldz^3}{c}-\frac{1}{2}amzz-\frac{lldszz}{cr}+\frac{llsszz}{4rr}-\frac{lamsz}{2r}-\frac{l3dssz}{4crr} \sim \frac{llamss}{8rr}-\frac{1}{16}aabb$, ou $z^4-2z^3-13zz-16z \sim -30$, à cause de

$r \sim 1.$

$s \sim 2.$

$ab \sim 24.$

$c \sim 1.$

$d \sim 4.$

$am \sim 12.$

& dans cette Equation, l'on trouuera $z \sim 5$. c'est pourquoy au lieu de $\omega \sim \frac{abr}{4rz+ls}$, on aura $\omega \sim 1$: & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

6.

4.

On trouuera aussy $z \sim 1$, mais cette valeur n'est pas propre, parcequ'elle donne pour z, vne trop grande valeur, sauoir 3, car ω doit être moindre que z, à cause de $y \sim z - \omega$.

XXXVII.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à l'excez d'vn nombre donné sur la difference de leurs quarrez, & la somme à l'excez d'vn Nombre donné sur la somme de leurs quarrez, en raison donnée.

On propose de trouuer deux nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $ab-xx+yy$, du Nombre donné $24 \sim ab$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$, & dont la somme $x+y$ soit à l'excez $am-xx-yy$ du Nombre donné $64 \sim am$, sur la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme $5 \sim c$, à $6 \sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ ab-xx+yy :: r, s.$$

$$lx+ly,\ am-xx-yy :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx-lsy \sim abr-rxx-ryy.$$

$$ldx+ldy \sim amc-cxx-cyy.$$

Pour auoir vn calcul plus aisé, supposez

$$x \sim z+\omega.$$

$$y \sim z-\omega.$$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ ab-4z\omega :: r, s.$$

$$2lz,\ am-2zz-2\omega\omega :: c, d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$2ls\omega$

$$2ls\omega \sim abr - 4rz\omega.$$

$$2ldz \sim amc - 2czz - 2c\omega\omega.$$

Dans la premiere $2ls\omega \sim abr - 4rz\omega$, on trouuera $\omega \sim \frac{abr}{4rz+2ls}$, & la deuxieme $2ldz \sim amc - 2czz - 2c\omega\omega$, se changera en celle-cy, $2ldz \sim amc - 2czz \frac{-aabbrrc}{8rrzz+8lrsz+2llss}$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $z^4 + \frac{lsz^3}{r} + \frac{ldz^3}{c} + \frac{llsszz}{4rr} - \frac{1}{2}amzz + \frac{lldszz}{cr} - \frac{lamsz}{2r} + \frac{l^3dssz}{4crr} \sim \frac{llamss}{8rr} - \frac{1}{16}aabb$, ou $z^4 + \frac{16}{5}z^3 - \frac{143}{5}zz - \frac{314}{5}z \sim -4$, à cause de

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 2.$$

$$ab \sim 24.$$

$$c \sim 5.$$

$$d \sim 6.$$

$$am \sim 64.$$

& dans cette Equation, l'on trouuera $x \sim 5$. c'est pourquoy au lieu de $\omega \sim \frac{abr}{4rz+2ls}$, on aura $\omega \sim 1$, & les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

6.

4.

XXXVIII.

Trouuer deux nombres, dont la difference soit à l'excez d'un Nombre donné sur la difference de leurs quarrez, & la somme à la somme de leurs quarrez & d'un Nombre donné, en raison donnée.

On propose de trouuer deux nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$, soit à l'excez $ab-xx+yy$ du Nombre donné $24 \sim ab$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$, & dont la somme $x+y$ soit à la somme $am+xx+yy$ du Nombre donné $8 \sim am$, & de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim c$, à $6 \sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ ab-xx+yy :: r,\ s.$$

$$lx+ly,\ am+xx+yy :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx+lsy \sim abr - rxx + ryy.$$

$$ldx+ldy \sim amc + cxx + cyy.$$

Pour auoir un calcul plus aisé, supposez

$$x \sim z + \omega.$$

$$y \sim z - \omega.$$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ ab-4z\omega :: r,\ s.$$
$$2lz,\ am+2zz+2\omega\omega :: c,\ d,$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutives,

$$2ls\omega \sim abr-4rz\omega.$$
$$2ldz \sim amc+2czz+2c\omega\omega.$$

Dans la premiere $2ls\omega \sim abr-4rz\omega$, on trouvera $\omega \sim \frac{abr}{4rz+2ls}$, & la deuxieme $2ldz \sim amc+2czz+2\omega\omega$, se changera en celle-cy, $2ldz \sim amc+2czz+\frac{aabbrrc}{8rrzz+8lrsz+2llss}$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $z^4+\frac{lsz^3}{r}-\frac{ldz^3}{c}+\frac{1}{2}amzz+\frac{llsszz}{4rr}-\frac{lldszz}{cr}+\frac{lamsz}{2r}-\frac{l^3dssz}{4crr}+\frac{1}{16}aabb+\frac{llamss}{8rr}\sim 0$, ou $z^4-4z^3-7zz+2z+40\sim 0$, à cause de

$$r\sim 1.$$
$$s\sim 2.$$
$$ab\sim 24.$$
$$c\sim 1.$$
$$d\sim 6.$$
$$am\sim 8.$$

& dans cette Equation, l'on trouvera $z\sim 5$. c'est pourquoy au lieu de $\omega \sim \frac{abr}{4rz+2ls}$, on aura $\omega \sim 1$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

6.
4.

On trouvera aussy $z\sim 2$, mais cette valeur n'est pas bonne, parcequ'elle donné pour ω, un Nombre trop grand, sçavoir 2, puisque ω, doit être moindre que z, à cause de $y\sim z-\omega$.

XXXIX.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit à l'excez d'un Nombre donné sur la difference de leurs quarrez, & à l'excez d'un Nombre donné sur la somme de leurs quarrez, en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la difference $x-y$, soit à l'excez $ab-xx+yy$, du Nombre donné $24\sim ab$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1\sim r$, à $2\sim s$, & à l'excez $am-xx-yy$, du Nombre donné $60\sim am$, sur la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme $1\sim c$, à $4\sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ ab-xx+yy :: r,\ s.$$
$$lx-ly,\ am-xx-yy :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx - lsy \backsim abr - rxx + ryy.$$
$$ldx - ldy \backsim amc - cxx - cyy.$$

Pour auoir vn calcul plus aisé, supposez

$$x \backsim z + \omega.$$
$$y \backsim z - \omega.$$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ ab - 4z\omega :: r,\ s.$$
$$2l\omega,\ am - 2zz - 2\omega\omega :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$$2ls\omega \backsim abr - 4rz\omega.$$
$$2ld\omega \backsim amc - 2czz - 2c\omega\omega.$$

Dans la premiere $2ls\omega \backsim abr - 4rz\omega$, on trouuera $\omega \backsim \frac{abr}{4rz + 2ls}$, & la deuxieme $2ld\omega \backsim amc - 2czz - 2c\omega\omega$, se changera en celle-cy, $\frac{labdr}{2rz + ls} \backsim amc - 2czz \frac{- aabbrrc}{8rrzz + 8lrsz + 2llss}$, laquelle étant reduite, donne celle-cy, $z^4 + \frac{lsz^3}{r} + \frac{llsszz}{4rr} - \frac{1}{2}amzz + \frac{labdz}{4c} - \frac{lamsz}{2r} \backsim \frac{1}{16}aabb + \frac{llabds}{8cr} - \frac{llamss}{8rr} \backsim 0$, ou $z^4 + 2z^3 - 29zz - 36z + 30 \backsim 0$, à cause de

$$r \backsim 1.$$
$$s \backsim 2.$$
$$ab \backsim 24.$$
$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 4.$$
$$am \backsim 60.$$

& dans cette Equation, l'on trouuera $x \backsim 5$: c'est pourquoy au lieu de $\omega \backsim \frac{abr}{4rz + 2ls}$, on aura $\omega \backsim 1$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$6.$$
$$4.$$

XL.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à l'excez d'vn Nombre donné sur la difference de leurs quarrez, & à l'excez de la somme de leurs quarrez sur vn Nombre donné, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la difference $x - y$ soit à l'excez $ab - xx + yy$, du Nombre donné donné $24 \backsim ab$, sur la difference $xx - yy$ de leurs quarrez, comme $1 \backsim r$, à $2 \backsim s$: & à l'excez $xx + yy - am$, de la somme $xx + yy$ de

leurs quarrez sur le Nombre donné $44 \backsim am$, comme $1 \backsim c$, à $4 \backsim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx - ly,\ ab - xx + yy :: r,\ s.$$
$$lx - ly,\ xx + yy - am :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx - lsy \backsim abr - rxx + ryy.$$
$$ldx - ldy \backsim cxx + cyy - amc.$$

Pour auoir vn calcul plus aisé, supposez

$$x \backsim z + \omega.$$
$$y \backsim z - \omega.$$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ ab - 4z\omega :: r,\ s.$$
$$2l\omega,\ 2zz + 2\omega\omega - am :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$$2ls\omega \backsim abr - 4rz\omega.$$
$$2ld\omega \backsim 2czz + 2c\omega\omega - amc.$$

Dans la premiere $2ls\omega \backsim abr - 4rz\omega$, on trouuera $\omega \backsim \frac{abr}{4rz + 2ls}$, & la deuxieme $2ld\omega \backsim 2czz + 2\omega\omega - amc$, se changera en celle-cy, $\frac{labdr}{2rz + ls} \backsim 2czz + \frac{aabbrrc}{8rrzz + 8lrsz + 2llss} - amc$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $z^4 + \frac{lsz^3}{r} + \frac{llsszz}{4crr} - \frac{1}{2}amzz - \frac{lamsz}{2r} - \frac{labdz}{4c} + \frac{1}{16}aabb - \frac{llamss}{8rr} - \frac{llabds}{8cr} \backsim 0$, ou $z^4 + 2z^3 - 21zz - 68z - 10 \backsim 0$, à cause de

$$r \backsim 1.$$
$$s \backsim 2.$$
$$ab \backsim 24.$$
$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 4.$$
$$am \backsim 44.$$

& dans cette Equation, l'on trouuera $z \backsim 5$. c'est pourquoy au lieu de $\omega \backsim \frac{abr}{4rz + 2ls}$, on aura $\omega \backsim 1$, & les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur

5.
3.

XLI.

Trouuer deux Nombres, dont la difference fait à l'excez d'vn Nombre donné sur la difference de leurs quarrez, & à la somme d'vn Nombre donné & de leurs quarrez, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.
y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $ab-xx+yy$ du Nombre donné $24 \sim ab$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$, & à la somme $am+xx+yy$, du Nombre donné $8 \sim am$, & de la somme $xx+yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim c$, à $30 \sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ ab-xx+yy :: r,\ s.$$
$$lx-ly,\ am+xx+yy :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$lsx-lsy \sim abr-rxx+ryy.$$
$$ldx-ldy \sim amc+cxx+cyy.$$

Pour avoir un calcul plus aisé, supposez

$$x \sim z+\omega.$$
$$y \sim z-\omega.$$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ ab-4z\omega :: r,\ s.$$
$$2l\omega,\ am+2zz+2\omega\omega :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutives,

$$2ls\omega \sim abr-4rz\omega.$$
$$2ld\omega \sim amc+2czz+2c\omega\omega.$$

Dans la premiere $2ls\omega \sim abr-4rz\omega$, on trouvera $\omega \sim \frac{abr}{4rz+2ls}$, & la deuxieme $2ld\omega \sim amc+2czz+2c\omega\omega$, se changera en celle-cy, $\frac{labdr}{2rz+ls} \sim amc+2czz+\frac{aabbrrc}{8rrzz+8lrsz+2llss}$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $z^4+\frac{lsz^3}{r}+\frac{1}{2}amzz+\frac{llsszz}{4rr}+\frac{lamsz}{2r}-\frac{labdz}{4c}+\frac{1}{16}aabb+\frac{llamss}{8rr}-\frac{llabds}{8cr} \sim 0$, ou $z^4+2z^3+5zz-172z-140 \sim 0$, à cause de

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$
$$ab \sim 24.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 30.$$
$$am \sim 8.$$

& dans cette Equation, l'on trouvera $z \sim 5$. C'est pourquoy au lieu de $\omega \sim \frac{abr}{4rz+2ls}$, on aura $\omega \sim 1$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

6.

4.

Toutes ces Questions étant des Problemes solides, se peuvent resoudre par l'intersection des deux lignes Locales, qui conviennent aux deux Equations constitutives, comme vous avez vû dans les Questions precedentes.

XLII.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à l'excez d'vn nombre donné sur la difference de leurs quarrez, & la somme à l'excez de la difference de leurs quarrez sur vn nombre donné, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $ab-xx+yy$ du nombre donné $24 \backsim ab$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \backsim r$, à $2 \backsim s$, & dont la somme $x+y$ soit à l'excez $xx-yy-am$, de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez sur le nombre donné $12 \backsim am$, comme $5 \backsim c$, à $4 \backsim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$lx-ly,\ ab-xx+yy :: r,\ s.$

$lx+ly,\ xx-yy-am :: c,\ d.$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$lsx-lsy \backsim abr-rxx+ryy.$

$ldx+ldy \backsim cxx-cyy-amc.$

Pour auoir vn calcul plus aisé, supposez

$x \backsim z+\omega.$

$y \backsim z-\omega.$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$2l\omega,\ ab-4z\omega :: r,\ s.$

$2lz,\ 4z\omega-am :: c,\ d.$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$2ls\omega \backsim abr-4rz\omega.$

$2ldz \backsim 4cz\omega-amc.$

Dans la premiere $2ls\omega \backsim abr-4rz\omega$, on trouuera $\omega \backsim \frac{abr}{4rz+2ls}$, & la deuxieme $2ldz \backsim 4cz\omega-amc$, se changera en celle-cy, $2ldz \backsim \frac{2abcrz}{2rz+ls}-amc$, laquelle étant reduite, donne celle-cy, $zz+\frac{lsz}{2r}-\frac{abcz}{2dl}+\frac{amcz}{2ld}+\frac{amcs}{4dr} \backsim 0$, ou $zz-\frac{13}{2}z+\frac{15}{2} \backsim 0$, à cause de

$r \backsim 1.$

$s \backsim 2.$

$ab \backsim 24.$

$c \backsim 5.$

$d \backsim 4.$

$am \backsim 12.$

& dans cette Equation, l'on trouuera $x \backsim 5$. c'est pourquoy au

lieu de $\omega \sim \frac{abr}{4rz+2ls}$, on aura $\omega \sim 1$, & les deux Nombres, qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$6.$$

$$4.$$

On trouuera aussy $z \sim \frac{3}{5}$, Mais cette Valeur n'est pas propre, parcequ'elle donne Vn Nombre trop grand pour ω, sauoir $\frac{12}{5}$, puisque ω, doit être moindre que z, à cause de $y \sim z - \omega$.

XLIII.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à l'excez d'Vn Nombre donné sur la difference de leurs quarrez, & la somme à la même difference de leurs quarrez ôtée d'Vn Nombre donné, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$, soit à l'excez $ab-xx+yy$, du Nombre donné $24 \sim ab$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$: & dont la somme $x+y$ soit à l'excez $am-xx+yy$, du Nombre donné $50 \sim am$, sur la difference $xx-yy$ des mêmes quarrez, comme $1 \sim c$, à $3 \sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ ab-xx+yy :: r, s.$$

$$lx+ly,\ am-xx+yy :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx-lsy \sim abr-rxx+ryy.$$

$$ldx+ldy \sim ame-cxx+cyy.$$

Pour auoir Vn calcul plus aisé, supposez

$$x \sim z+\omega.$$

$$y \sim z-\omega.$$

& alors Vous aurez ces deux autres analogies,

$$2l\omega,\ ab-4z\omega :: r, s.$$

$$2lz,\ am-4z\omega :: c, d.$$

& par consequent ces deux autres Equations constitutiues,

$$2ls\omega \sim abr-4rz\omega.$$

$$2ldz \sim amc-4cz\omega.$$

Dans la premiere $2ls\omega \sim abr-4rz\omega$, on trouuera $\omega \sim \frac{abr}{4rz+2ls}$, & la deuxiéme $2ldz \sim amc-4cz\omega$, se changera en celle-cy, $2ldz \sim amc - \frac{2abcrz}{2rz+ls}$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $zz + \frac{lsz}{2r} + \frac{abcz}{2dr} - \frac{amcz}{2ld} - \frac{amcs}{4dr} \sim 0$, ou $zz - \frac{10}{3}z - \frac{25}{3} \sim 0$, à cause de

$r \backsim 1.$

$s \backsim 2.$

$ab \backsim 24.$

$c \backsim 1.$

$d \backsim 3.$

$am \backsim 50.$

& dans cette Equation, l'on trouvera $z \backsim 5$. c'est pourquoy au lieu de $\omega \backsim \frac{abr}{4rz+2ls}$, on aura $\omega \backsim 1$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

6.

4.

On trouvera aussy $z \backsim \frac{5}{3}$, mais cette Valeur n'est pas propre, tant parcequ'elle est nide, que parcequ'elle donne Un nombre aussy Nid, pour ω, sauoir 9, puisque y doit être moindre que x, à cause de $y \backsim z-\omega$, & de $x \backsim z+\omega$.

XLIV.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à l'excez d'Un nombre donné sur la difference de leurs quarrez, & la somme à la somme d'Un nombre donné & de la difference de leurs quarrez en raison donnée.

On propose de trouuer deux nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $ab-xx+yy$ du nombre donné $24 \backsim ab$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \backsim r$, à $2 \backsim s$: & dont la somme $x+y$, soit à la somme $am+xx-yy$ du Nombre donné $am \backsim 10$, & de la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \backsim c$, à $3 \backsim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$lx-ly,\ ab-xx+yy :: r, s.$

$lx+ly,\ am+xx-yy :: c, d.$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$lsx-lsy \backsim abr-rxx+ryy.$

$ldx+ldy \backsim amc+cxx-cyy.$

Pour auoir Un calcul plus aisé, supposez

$x \backsim z+\omega.$

$y \backsim z-\omega.$

& alors vous aurez ces deux autres analogies,

$2l\omega,\ ab-4z\omega :: r, s.$

$2lz,\ am+4z\omega :: c, d.$

&

& par consequent ces deux autres Equations constitutives,

$$2lsw \sim abr - 4rzw.$$

$$2ldz \sim amc + 4czw.$$

Dans la premiere $2lsw \sim abr - 4rzw$, on trouvera $w \sim \frac{abr}{4rz+2ls}$, & la deuxieme $2ldz \sim amc + 4czw$, se changera en celle-cy, $2ldz \sim amc + \frac{2abcrz}{2rz+ls}$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $zz + \frac{lsz}{r} - \frac{amcz}{2ld} - \frac{abcz}{2ld} - \frac{amcs}{4dr} \sim 0$, ou $zz - \frac{14}{3}z - \frac{5}{3} \sim 0$, à cause de

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 2.$$

$$ab \sim 24.$$

$$c \sim 1.$$

$$d \sim 3.$$

$$am \sim 10.$$

& dans cette Equation, l'on trouvera $z \sim 5$. C'est pourquoy au lieu de $w \sim \frac{abr}{4rz+2ls}$, on aura $w \sim 1$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$6.$$

$$4.$$

On trouvera aussy $z \sim -\frac{1}{3}$, ~~mais cette valeur n'est pas propre~~ tant parcequ'elle est niée, que parcequ'elle donne un Nombre trop grand pour w, savoir 9, puisque w, doit être moindre que z, à cause de $y \sim z - w$.

XLV.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit à l'excez d'un Nombre donné sur la difference de leurs quarez, & à l'excez de leur produit sur un Nombre donné, en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x - y$ soit à l'excez $ab - xx + yy$, du Nombre donné $24 \sim ab$, sur la difference $xx - yy$ de leurs quarez, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$: & à l'excez $xy - am$, de leur produit xy sur le Nombre donné $16 \sim am$, comme $1 \sim c$, à $4 \sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx - ly, \; ab - xx + yy :: r, s.$$

$$lx - ly, \; xy - am :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$lsx - lsy \sim abr - rxx + ryy.$$

$$ldx - ldy \sim cxy - amc.$$

Dans la seconde $ldx - ldy \propto cxy - amc$, on trouuera $y \propto \frac{amc+ldx}{cx+ld}$, & la premiere $lsx - lsy \propto abr - rxx + ryy$, se changera en celle-cy, $lsx - \frac{lamcs - lldsx}{cx+ld} \propto abr - rxx + \frac{aammccr + 2lamcdrx + llddrxx}{ccxx + 2lcdx + lldd}$, laquelle étant reduite, donne celle-cy, $x^4 + \frac{2ldx^3}{c} + \frac{lsx^3}{r} + \frac{lldsxx}{cr} - abxx - \frac{2lamdx}{c} - \frac{2labdx}{c} - \frac{lamsx}{r} \propto aamm + \frac{llamds}{cr} + \frac{llabdd}{cc}$, ou $x^4 + 10x^3 - 16xx - 352x \propto 768$, à cause de

$r \propto 1.$

$s \propto 2.$

$ab \propto 24.$

$c \propto 1.$

$d \propto 4.$

$am \propto 16.$

& dans cette Equation, l'on trouuera $x \propto 6$. c'est pourquoy au lieu de $y \propto \frac{amc+ldx}{cx+ld}$ on trouuera $y \propto 4$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

6.

4.

XLVI.

Trouuer deux Nombres dont la difference soit à l'excez d'vn Nombre donné sur la difference de leurs quarrez, & à l'excez d'vn Nombre donné sur leur produit, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $ab - xx + yy$, du nombre donné $24 \propto ab$, sur la difference $xx - yy$ de leurs quarrez, comme $1 \propto r$, à $2 \propto s$, & à l'excez $am - xy$, du Nombre donné $25 \propto am$, sur leur produit xy, comme $2 \propto c$, à $1 \propto d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$lx - ly,\ ab - xx + yy :: r,\ s.$

$lx - ly,\ am - xy :: c,\ d.$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$lsx - lsy \propto abr - rxx + ryy.$

$ldx - ldy \propto amc - cxy.$

Dans la seconde $ldx - ldy \propto amc - cxy$, on trouuera $x \propto \frac{amc + ldy}{ld + cy}$, & la premiere $lsx - lsy \propto abr - rxx + ryy$ se changera en celle-cy, $\frac{lamcs - lcsyy}{ld + cy} \propto abr - \frac{aammccr - 2lamcdry - llddryy}{lldd + 2lcdy + ccyy} + ryy$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $y^4 + \frac{2ldy^3}{c} + \frac{lsy^3}{r} + abyy + \frac{lldsyy}{cr} + \frac{2labdy}{c} - \frac{2lamdy}{c}$

$-\frac{lamsy}{r} \sim aamm + \frac{llamds}{cr} - \frac{llabdd}{cc}$, ou $y^4 + 3y^3 + 25yy - 51y \sim 644$, à cause de

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$
$$ab \sim 24.$$
$$c \sim 2.$$
$$d \sim 1.$$
$$am \sim 25$$

& dans cette Equation, l'on trouuera $y \sim 4$. C'est pourquoy au lieu de $x \sim \frac{amc+ldy}{ld+cy}$, on aura $x \sim 6$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

6.

4.

XLVII.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit à l'excez d'vn Nombre donné sur la difference de leurs quarez & à la somme d'vn Nombre donné & de leur produit, en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la difference $x-y$, soit à l'excez $ab-xx+yy$, du Nombre donné $24 \sim ab$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarez, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$, & à la somme $am+xy$, du Nombre donné $am \sim 16$, & de leur produit xy, comme $1 \sim c$, à $20 \sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ ab-xx+yy :: r, s.$$
$$lx-ly,\ am+xy :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutiues,

$$lsx - lsy \sim abr - rxx + ryy.$$
$$ldx - ldy \sim amc + cxy.$$

Dans la seconde $ldx - ldy \sim amc + cxy$, on trouuera $x \sim \frac{amc+ldy}{ld-cy}$, & la premiere $lsx - lsy \sim abr - rxx + ryy$, se changera en celle-cy, $\frac{lamcs+lcsyy}{ld-cy} \sim abr - \frac{aammccr - 2lamcdry - llddryy}{lldd - 2lcdy + ccyy} + ryy$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $y^4 + \frac{lsy^3}{r} - \frac{2ldy^3}{c} + abyy - \frac{lldsyy}{cr} + \frac{lamsy}{r} - \frac{2labdy - 2lamdy}{c} \sim aamm + \frac{llamds}{cr} - \frac{llabdd}{cc}$, ou $y^4 - 38y^3 - 16yy - 1568y \sim -8704$, à cause de

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$
$$ab \sim 24.$$

$c \propto 1.$

$d \propto 20.$

$am \propto 16.$

& dans cette Equation, l'on trouvera $y \propto 4$. c'est pourquoy au lieu de $x \propto \frac{amc+ldy}{ld-cy}$, on aura $x \propto 6$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

6.

4.

XLVIII.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit à l'excez d'un Nombre donné sur la difference de leurs quarrez, & la somme à la somme d'un Nombre donné & de leur produit, en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $ab-xx+yy$, du Nombre donné $24 \propto ab$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez comme $1 \propto r$, à $2 \propto s$: & dont la somme $x+y$, soit à la somme $am+xy$, du nombre donné $16 \propto am$, & de leur produit xy, comme $1 \propto c$, à $4 \propto d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ ab-xx+yy :: r,\ s.$$

$$lx+ly,\ am+xy :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$lsx-lsy \propto abr-rxx+ryy.$$

$$ldx+ldy \propto amc+cxy.$$

Dans la seconde $ldx+ldy \propto amc+cxy$, on trouvera $y \propto \frac{ldx-amc}{cx-ld}$, & la premiere $lsx-lsy \propto abr-rxx+ryy$, se changera en celle-cy, $\frac{lcsxx-2lldsx+lamcs}{cx-ld} \propto abr-rxx+\frac{llddxx-2lamdcxr+aammccr}{ccxx-2lcdx+lldd}$, laquelle étant reduite, donne celle-cy, $x^4+\frac{lsx^3}{r}-\frac{2ldx^3}{c}-abxx-\frac{3lldsxx}{cr}+\frac{2l^3ddsx}{ccr}+\frac{lamsx}{r}+\frac{2labldx+2lamdx}{c} \propto aamm+\frac{llabdd}{cc}+\frac{llamds}{cr}$, ou $x^4-6x^3-48xx+416x \propto 768$, à cause de

$r \propto 1.$

$s \propto 2.$

$ab \propto 24.$

$c \propto 1.$

$d \propto 4.$

$am \propto 16.$

& dans cette Equation, l'on trouvera $x \propto 6$. c'est pourquoy au lieu de $y \propto \frac{ldx-amc}{cx-ld}$, on aura $y \propto 4$. Ainsy les deux nombres

qu'on cherche, seront de cette grandeur;

6.

4.

On trouvera aussy $x \backsim -8$, mais cette valeur n'est pas propre, puisqu'elle est niée. On trouvera encore $x \backsim 4$, mais cette valeur n'est pas propre non plus, parcequ'elle donné $y \backsim 0$.

XLIX.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit à l'excez d'un Nombre donné sur la difference de leurs quarrez, & la somme à l'excez de leur produit sur un Nombre donné, en raison donnée.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $ab-xx+yy$, du nombre donné $24 \backsim ab$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \backsim r$, à $2 \backsim s$: & dont la somme $x+y$ soit à l'excez $xy-am$, de leur produit xy sur le Nombre donné $15 \backsim am$, comme $10 \backsim c$ à $9 \backsim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ ab-xx+yy :: r,\ s.$$

$$lx+ly,\ xy-am :: c,\ d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$lsx-lsy \backsim abr-rxx+ryy.$$

$$ldx+ldy \backsim cxy-amc.$$

Dans la seconde $ldx+ldy \backsim cxy-amc$, on trouvera $x \backsim \frac{amc+ldy}{cy-ld}$, & la premiere $lsx-lsy \backsim abr-rxx+ryy$, se changera en celle-cy, $\frac{lamcs+2lldsy-lcsyy}{cy-ld} \backsim abr - \frac{aammccr-2lamcdry-lldd ryy}{ccyy-2lcdy+lldd} + ryy$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $y^4 + \frac{lsy^3}{r} - \frac{2ldy^3}{c} + abyy - \frac{3lldsyy}{cr} + \frac{2l^3ddsy}{ccr} - \frac{lamsy}{r} - \frac{2labdy-2lamdy}{c} \backsim aamm - \frac{llamds}{cr} - \frac{llabdd}{cc}$, ou $y^4 + \frac{1}{5}y^3 + \frac{93}{5}yy - \frac{2424y}{25} \backsim \frac{4464}{25}$, à cause de

$r \backsim 1$.

$s \backsim 2$.

$ab \backsim 24$.

$c \backsim 10$.

$d \backsim 9$.

$am \backsim 15$.

& dans cette Equation, l'on trouvera $y \backsim 4$. c'est pourquoy au lieu de $x \backsim \frac{amc+ldy}{cy-ld}$, on aura $x \backsim 6$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

6.

4.

L.

Trouver deux nombres, dont la difference soit à l'excez d'un nombre donné sur la difference de leurs quarrez ; & la somme à l'excez d'un nombre donné sur leur produit, en raison donnée.

On propose de trouver deux nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit à l'excez $ab-xx+yy$, du nombre donné $24 \sim ab$, sur la difference $xx-yy$ de leurs quarrez, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$: & dont la somme $x+y$, soit à l'excez $am-xy$, du nombre donné $25 \sim am$, sur leur produit xy, comme $10 \sim c$, à $1 \sim d$.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$$lx-ly,\ ab-xx+yy :: r, s.$$

$$lx+ly,\ am-xy :: c, d.$$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$$lsx-lsy \sim abr-rxx+ryy.$$

$$ldx+ldy \sim amc-cxy.$$

Dans la seconde $ldx+ldy \sim amc-cxy$, on trouvera $y \sim \frac{amc-ldx}{cx+ld}$, & la premiere $lsx-lsy \sim abr-rxx+ryy$, se changera en celle-cy, $\frac{lcsxx+2lldsx-lamcs}{cx+ld} \sim abr-rxx+\frac{aammccr-2lamcdrx+llddrx}{ccxx+2lcdx+lldd}$, laquelle étant reduite, donne celle-cy, $x^4+\frac{lsx^3}{r}+\frac{2ldx^3}{c}-abxx+\frac{3lldsxx}{cr}+\frac{2l^3ddsx}{ccr}-\frac{lamsx}{r}-\frac{2labdx+2lamdx}{c} \sim aamm+\frac{llabdd}{cc}+\frac{llamds}{r}$, ou $x^4+\frac{11}{5}x^3-\frac{117}{5}xx-\frac{1244}{25}x \sim \frac{15756}{25}$, à cause de

$r \sim 1$.

$s \sim 2$.

$ab \sim 24$.

$c \sim 10$.

$d \sim 1$.

$am \sim 25$.

& dans cette Equation, l'on trouvera $x \sim 6$. c'est pourquoy au lieu de $y \sim \frac{amc-ldx}{cx+ld}$, on aura $y \sim 4$. Ainsy les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

6.

4.

Nous ometons icy plusieurs autres Questions, qu'il est facile de resoudre à l'imitation des precedentes.

Question VIII. & IX.

Trouuer deux Nombres quarrez dont la somme soit égale à vn Nombre quarré donné.

On propose de trouuer deux Nombres quarrez

$$xx.$$
$$yy.$$

dont la somme $xx+yy$ soit égale au quarré donné $16 \backsim aa$.

Si on multiplie chacun des deux côtez d'vn triangle rectangle, par le côté du quarré donné, & qu'on diuise chaque produit par l'hypotenuse; on aura les côtez des deux quarrez qu'on cherche. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$$xx+yy \backsim aa.$$

dans laquelle on trouuera $a \backsim \sqrt{xx+yy}$. Ainsy l'on aura cette Puissance à égaler au quarré $xx+yy$, pour le côté duquel prenant $x - \frac{by}{c}$, ou $x+\frac{by}{c}$, en sorte qu'on ait $a \backsim x - \frac{by}{c}$, ou $a \backsim x+\frac{by}{c}$, on trouuera $x \backsim \frac{bby-ccy}{2bc}$, & par consequent $a \backsim \frac{bby+ccy}{2bc}$, & dans cette derniere Equation, l'on trouuera $y \backsim \frac{2abc}{bb+cc}$. c'est pourquoy au lieu de $x \backsim \frac{bby-ccy}{2bc}$, on aura $x \backsim \frac{abb-acc}{bb+cc}$. Ainsy les côtez des deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abb-acc,\ 2abc}{bb+cc}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \backsim 4.$$

Si l'on suppose

$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 2.$$

ou

$$b \backsim \frac{1}{2}.$$
$$c \backsim \frac{2}{2}.$$

les côtez des deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{16,12}{5}.$$

& les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{256,144}{25}.$$

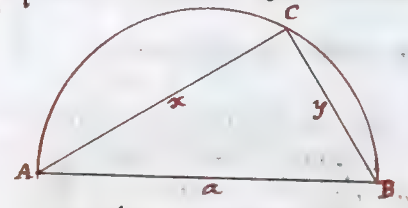
Diophante resoud ainsy cette Question. Dans l'Equation constitutiue $xx+yy \backsim aa$, on trouuera $y \backsim \sqrt{aa-xx}$, & l'on aura cette Puissance à égaler au quarré, $aa-xx$, pour le côté duquel prenant $a - \frac{bx}{c}$, en sorte qu'on ait $y \backsim a - \frac{bx}{c}$, on trouuera $x \backsim \frac{2abc}{bb+cc}$, & par consequent $y \backsim \frac{abb-acc}{bb+cc}$, comme auparauant. Metode de Diophante.

Le canon precedent se peut enoncer autrement en cette sorte.

Canon. Si on divise le double du produit de deux Nombres indeterminez & la difference de leurs quarrez chacun par la somme des mêmes quarrez & qu'on multiplie chaque quotient par le côté du quarré donné, on aura les côtez des deux quarrez qu'on cherche.

Seconde metode de Diophante. L'autre Metode de Diophante, laquelle fait la Quest. IX. est comprise dans celle-cy, car il suppose $y \propto a \cdots \frac{bx}{c}$, comme nous avons deja fait.

Construction geometrique. On void aisément par l'Equation constitutive $xx + yy \propto aa$, que cette Question est un Lieu à un cercle donné, dont le diametre est a: de sorte que si on prend sur la circonference de ce cercle un point à volonté, comme C, & qu'on en tire aux extremitez A, B, du diametre AB, les droites AC, BC, elles representeront les deux nombres qu'on cherche, dont la demonstration est évidente, par 47. 1.



Par le moyen de cette Question, on peut trouver en Nombres autant de triangles rectangles differens que l'on voudra, dont les deux côtez & l'hypotenuse soient exprimez par des Nombres rationnels, en se servant de ce triangle rectangle indefiny,

$$\frac{abb \cdots acc,\ 2abc}{bb + cc},\ a.$$

qui vient d'être trouvé, & que l'on peut avoir en entiers & en moindres termes, en le multipliant par $bb+cc$, & en le divisant par a, car alors on aura cet autre triangle rectangle,

$$bb \cdots cc,\ 2bc,\ bb+cc.$$

dont les deux quantitez indeterminées b, c, sont apelées Nombres generateurs, parcequ'ils servent à former en Nombres indefiniment un triangle rectangle, par ce Canon general.

Canon. Le double du produit des deux Nombres generateurs est l'un des deux côtez du triangle rectangle: la difference de leurs quarrez est l'autre côté: & la somme des mêmes quarrez est l'hypotenuse.

Si l'on suppose

$$b \propto 2.$$
$$c \propto 3.$$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$5,\ 12,\ 13.$$

Question.

Question X.

Trouver deux Nombres quarrez dont la somme soit égale à la somme de deux Nombres quarrez donnez.

On propose de trouver deux nombres quarrez

$$xx,$$
$$yy.$$

dont la somme $xx+yy$, soit égale à la somme 13 $\sim aa+bb$, des deux quarrez donnez

$$4 \sim aa.$$
$$9 \sim bb.$$

Si on multiplie l'un des deux côtez d'un triangle rectangle par le côté de l'un des deux quarrez donnez, & l'autre côté du même triangle rectangle par le côté de l'autre quarré donné, & qu'on divise la somme des deux produits par l'hypotenuse on aura le côté de l'un des deux quarrez qu'on cherche. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$$xx+yy \sim aa+bb.$$

dans laquelle on trouvera $y \sim \sqrt{aa+bb-xx}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $aa+bb-xx$. Pour cette fin, supposez

$$x \sim z-a.$$

pour avoir cette autre Puissance à égaler au quarré, $bb+2az-zz$: pour le côté duquel prenant $b-\frac{cz}{d}$, on trouvera $z \sim \frac{2add+2bcd}{cc+dd}$. c'est pourquoy au lieu de $x \sim z-a$, on aura $x \sim \frac{add-acc+2bcd}{cc+dd}$, & au lieu de $y \sim \sqrt{aa+bb-xx}$, on aura $y \sim \frac{bcc-bdd+2acd}{cc+dd}$. Ainsy les côtez des deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{add-acc+2bcd,\ bcc-bdd+2acd}{cc+dd}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 3.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 1.$$
$$d \sim 2.$$

les côtez des deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{18,\ 1}{5}.$$

& les deux quarrez seront tels,

$$\frac{324,\ 1}{25}.$$

Pour avoir une solution plus generale, supposez

$$x \sim \frac{cz}{d}-a.$$
$$y \sim \frac{mz}{n}-a.$$

& alors vous aurez cette autre Equation,

$$aa - \frac{2acz}{d} + \frac{cczz}{dd} + bb - \frac{2bmz}{n} + \frac{mmzz}{nn} \sim aa + bb,$$

dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{2acdnn + 2bmndd}{ccnn + ddmm}$. c'est pourquoy les côtez des deux quarez qu'on cherche, seront tels,

Solution plus generale.

$$\frac{accnn - addmm + 2bcdmn,\ bddmm - bccnn + 2acdmn}{ccnn + ddmm}.$$

Parceque nous auons supposé

$a \sim 2.$
$b \sim 3.$

si l'on suppose

$c \sim 1.$
$d \sim 2.$
$m \sim 1.$
$n \sim 2.$

les côtez des deux quarez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{18,\ 1}{5}.$$

comme auparauant.

Metode de Diophante.

Diophante resoud cette Question presque de la même façon: car il suppose

$x \sim \frac{cz}{d} + a.$
$y \sim \frac{mz}{n} - b.$

pour auoir cette autre Equation constitutiue,

$$\frac{cczz}{dd} + \frac{2acz}{d} + aa + \frac{mmzz}{nn} - \frac{2bmz}{n} + bb \sim aa + bb.$$

dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{-2acdnn + 2bmndd}{ccnn + ddmm}$, & alors les côtez des deux quarez qu'on cherche, se trouueront tels,

Troisieme Solution.

$$\frac{2bcdmn + addmm - accnn,\ 2acdmn + bccnn - bddmm}{ccnn + ddmm}.$$

Parceque nous auons supposé

$a \sim 2.$
$b \sim 3.$

si l'on suppose

$c \sim 1.$
$d \sim 2.$
$m \sim 1.$
$n \sim 4.$

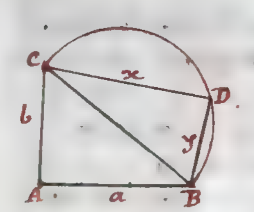
les côtez des deux quarez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{6,\ 17}{5}.$$

& les deux quarez seront tels,

$$\frac{36,\ 289}{25}.$$

On connoit aisément par l'Equation constitutiue $xx + yy \sim aa + bb$, que cette Question est un Lieu à un cercle donné, dont le diametre



est $\sqrt{aa+bb}$. Si donc on fait le triangle rectangle ABC, dont le côté AB, soit égal au nombre donné a, & l'autre côté AC, à l'autre nombre donné b, & qu'alentour de l'hypotenuse BC, on decriue la circonference de cercle BDC, cette circonference BDC sera le lieu qu'on chèrche: de sorte que si du point D, pris à discretion sur cette circonference, on tire aux deux extremitez B, C, du diametre BC, les droites BD, CD, elles representeront les deux nombres qu'on cherche, dont la demonstration est euidente, par 47.1. Construction geometrique.

On void aisément que par le moyen de cette Question, l'on trouue entre deux quarrez donnez deux quarrez moyens en proportion arithmetique, & qu'ainsy on a quatre quarrez en proportion arithmetique, tels que sont les quatre suiuans,

$$4,\ \frac{1}{25},\ \frac{324}{25},\ 9.$$

ou bien les quatre suiuans,

$$4,\ \frac{36}{25},\ \frac{289}{25},\ 9.$$

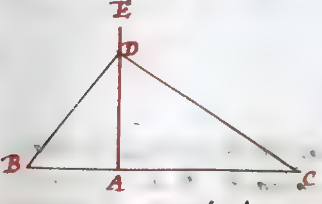
& si l'on les veut en entiers, on n'a qu'à multiplier les quatre quarrez trouuez par le denominateur 25, qui est commun aux deux moyens, & alors on aura ces autre quatre quarrez:

100, 1, 324, 225.

ou bien ces autres quatre,

100, 36, 289, 225.

Comme la somme des deux quarrez AB, AC, est égale à la somme des deux quarrez BD, CD, chacune étant égale au quarré BC, on connoit que par cette Question, on trouue en lignes aussy-bien qu'en nombres, quatre quarrez en proportion arithmetique: ce qui se peut faire plus facilement en cette sorte.



Ayant tiré la ligne BC, d'vne longueur volantaire, tirez-luy par le point A, pris à discretion, la perpendiculaire indefinie AE, & par le point A, pris à volonté sur cette perpendiculaire, tirez aux deux extremitez B, C, de la ligne BC, les droites DB, DC, & alors les quatre quarrez AB, AC, BD, CD, seront en proportion arithmetique, de-sorte que la somme ABq + CDq sera égale à la somme ACq + BDq.

Car puisque la difference BDq − ABq, est égale à la difference CDq − ACq, chacune étant égale au quarré AD, par 47.1. en ajoutant Demonstration.

ABq + ACq, on aura ACq + BDq ∼ ABq + CDq. Ce qu'il faloit demontrer.

On trouue aussy par le moyen de cette Question autant de triangles rectangles qu'on veut en nombres, où l'hypotenuse soit par tout vn même nombre, sauoir celuy qui exprime la somme des deux nombres quarrez donnez, comme icy 13, qui est composé des deux quarrez donnez 4, 9, dont les côtez 2, 3, sont les nombres generateurs de ce triangle rectangle 5, 12, 13: & comme nous auons trouué que le même nombre donné 13, est composé de ces deux quarrez $\frac{1}{25}$, $\frac{324}{25}$, dont les côtez $\frac{1}{5}$, $\frac{18}{5}$, seront par consequent les nombres generateurs de cet autre triangle rectangle $\frac{36}{25}$, $\frac{323}{25}$, 13: & encore comme nous auons trouué que le même nombre donné 13, est composé de ces deux autres quarrez $\frac{36}{25}$, $\frac{289}{25}$, dont les côtez $\frac{6}{5}$, $\frac{17}{5}$, seront par consequent les nombres generateurs de ce troisieme triangle rectangle $\frac{204}{25}$, $\frac{253}{25}$, 13; il s'ensuit que nous auons trois triangles rectangles ayant vne même hypotenuse, sauoir

$$5.\ 12.\ 13.$$
$$\frac{36}{25}.\ \frac{323}{25}.\ 13.$$
$$\frac{204}{25}.\ \frac{253}{25}.\ 13.$$

que l'on aura en les multipliant par le denominateur commun & alors on aura en entiers ces trois autres triangles rectangles,

$$125.\ 300.\ 325.$$
$$36.\ 323.\ 325.$$
$$204.\ 253.\ 325.$$

dont les nombres generateurs sont tels,

$$10.\ 15.$$
$$1.\ 18.$$
$$6.\ 17.$$

ou bien

$$\sqrt{\frac{625}{2}}.\ \sqrt{\frac{25}{2}}.$$
$$\sqrt{\frac{361}{2}}.\ \sqrt{\frac{289}{2}}.$$
$$\sqrt{\frac{529}{2}}.\ \sqrt{\frac{121}{2}}.$$

car vn triangle rectangle a toujours deux paires de nombres generateurs, que l'on trouue en ajoutant & en ôtant de l'hypotenuse l'vn des deux côtez, & en prenant les racines quarrées des moitiez de la somme & du reste.

Il est euident que le nombre donné sera vn nombre quarré, lorsque les côtez des deux quarrez dont il est composé, seront les côtez d'vn triangle rectangle.

A l'occasion de ce qui vient d'être dit, nous ajouterons icy les deux Questions suiuantes.

I.

Trouuer trois Nombres quarrez en proportion arithmetique.

On propose de trouuer trois nombres quarrez

$$xx.$$

$$yy.$$

$$zz.$$

en proportion arithmetique, c'est à dire tels que la somme $xx + zz$ soit égale à $2yy$.

La somme des deux côtez d'un triangle rectangle est le côté caron.
du premier des trois quarrez qu'on cherche, & l'hypotenuse est le côté du moyen, le côté du troisieme étant égal à la difference entre le quarré du plus grand nombre generateur du triangle rectangle & le triple du quarré du plus petit.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$$xx + zz \backsim 2yy.$$

dans laquelle on trouuera $z \backsim \sqrt{2yy - xx}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré $2yy - xx$. Pour cette fin supposez

$$x \backsim \omega + y.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $yy - \omega\omega - 2\omega y$, pour le côté duquel prenant $y - \frac{a\omega}{b}$, on trouuera

$$y \backsim aa + bb.$$

$$\omega \backsim 2ab - 2bb.$$

& par consequent

$$x \backsim aa + 2ab - bb.$$

$$z \backsim aa - 3bb.$$

Ainsy les côtez des trois quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$aa + 2ab - bb.$$

$$aa + bb.$$

$$aa - 3bb.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$

$$b \backsim 1.$$

les côtez des trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

7.

5.

1.

& les trois quarrez seront tels,

49.

25.

1.

Ou bien supposez

$x \sim \omega - y.$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $yy - \omega\omega + 2\omega y$, pour le côté duquel prenant $\frac{a\omega}{b} - y$, on trouvera

$y \sim aa + bb.$

$\omega \sim 2ab + 2bb.$

& par consequent

$x \sim bb - aa + 2ab.$

$z \sim bb - aa - 2ab.$

Ainsy les côtez des trois quarrez qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$bb - aa + 2ab.$

$aa + bb.$

$bb - aa - 2ab.$

Si l'on suppose

$a \sim 1.$

$b \sim 2.$

les côtez des trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

7.

5.

1.

comme auparavant: Mais si l'on suppose

$a \sim 2.$

$b \sim 5.$

les côtez des trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

41.

29.

1.

& les trois quarrez seront tels,

1681.

841.

1.

On tire de cette seconde solution, le canon suivant.

Canon. La somme des deux côtez d'un triangle rectangle est le côté du premier des trois quarrez qu'on cherche, de l'hypotenuse est le côté du moyen, le côté du troisieme étant égal à la difference

des deux côtez du même triangle rectangle.

Pour n'avoir point de Puissance à égaler au quarré, supposez

$$x \sim a-y.$$
$$z \sim b-y.$$

& l'Equation constitutive $xx+zz \sim 2yy$, se changera en celle-cy, $2yy+aa+bb-2ay-2by \sim 2yy$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{aa+bb}{2a+2b}$, & l'on aura une solution semblable à la precedente.

II.

Trouver trois Nombres quarrez en proportion harmonique.

On propose de trouver trois Nombres quarrez

$$xx.$$
$$yy.$$
$$zz.$$

en proportion harmonique, c'est à dire tels que le premier xx, soit au dernier zz, comme la difference $xx-yy$ des deux premiers a la difference $yy-zz$ des deux derniers.

Les produits de deux quelconques de trois quarrez en proportiõ arithmetique, donneront les trois quarrez qu'on cherche. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie

$$xx, zz :: xx-yy, yy-zz.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$xxyy-xxzz \sim xxzz-yyzz.$$

dans laquelle on trouvera $\frac{xy}{z} \sim \sqrt{2xx-yy}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré $2xx-yy$. Pour cette fin supposez

$$x \sim a+y.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $yy+4ay+2aa$, pour le côté duquel prenant $y \cdots b$, ou $\frac{yy+ay}{z}$, à cause de $x \sim a+y$, on trouvera $y \sim \frac{bb-2aa}{4a+2b}$, & par consequent $x \sim \frac{bb+2ab+2aa}{4a+2b}$, & parceque l'on a cette Equation, $\frac{yy+ay}{z} \sim y \cdots b$, on y trouvera $z \sim \frac{yy+ay}{y \cdots b}$, ou $z \sim \frac{b^4+2ab^3-4ba^3-4a^4}{2b^3+12abb+20aab+8a^3}$, à cause de $y \sim \frac{bb-2aa}{4a+2b}$, & les côtez des trois quarrez qu'on cherche, seront en entiers de cette grandeur,

$$b^4+6ab^3+12aabb+12a^3b+4a^4.$$
$$b^4+4ab^3-8a^3b-4a^4.$$
$$b^4+2ab^3-4a^3b-4a^4.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 1.$$

les côtez des trois quarrez qu'on cherche, seront tels,

35.

7.

5.

& les trois quarrez seront de cette grandeur,

1225.

49.

25.

Ou bien supposez

$x \sim a-y.$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $yy-4ay+2aa$, pour le côté duquel prenant $y+b$, on trouvera $y \sim \frac{2aa-bb}{4a+2b}$. c'est pourquoy au lieu de $x \sim a-y$, on aura $x \sim \frac{2aa+2ab+bb}{4a+2b}$, & par consequent $z \sim \frac{4a^4+4a^3b-2ab^3-b^4}{8a^3+20aab+12abb+2b^3}$, & les côtez des trois quarrez qu'on cherche, seront en entiers de cette grandeur,

$4a^4+12a^3b+12aabb+6ab^3+b^4.$

$4a^4+8a^3b-4ab^3-b^4.$

$4a^4+4a^3b-2ab^3-b^4.$

Si l'on suppose

$a \sim 2.$

$b \sim 1.$

les côtez des trois quarrez qu'on cherche, seront tels,

221.

119.

91.

& les trois quarrez seront de cette grandeur,

48841.

14161.

8281.

On peut resoudre autrement cette Question, en cherchant premierement trois Nombres en proportion harmonique, pour les rendre quarrez en aprez, comme vous alez voir en mettant

$x.$

$y.$

$z.$

pour les trois Nombres qu'on cherche, & alors on aura selon la condition de la Question, cette analogie,

$x, z :: x-y, y-z.$

& par consequent cette Equation constitutive,

$xy-$

$$xy - xz \propto xz - yz;$$

dans laquelle on trouuera $z \propto \frac{xy}{2x-y}$, & les trois nombres qu'on cherche, seront en entiers de cette grandeur;

$$2xx - xy.$$
$$2xy - yy.$$
$$xy.$$

que l'on rendra quarrez en cette sorte.

Egalez le premier Nombre $2xx - xy$ au quarré $\frac{aaxx}{bb}$, pour auoir

$$x \propto bb.$$
$$y \propto 2bb - aa.$$

Ainsy le premier Nombre $2xx - xy$ deuiendra quarré, sauoir $aabb$, & l'on aura encore ces deux autres à égaler au quarré,

$$2xy - yy.$$
$$xy.$$

Pour cette fin, on considerera que puisque le troisieme est xy, & que la Valeur de x, a été trouuée égale à vn nombre quarré, sauoir à bb, il faut que la Valeur de y, sauoir $2bb - aa$, soit Vn Nombre quarré. Deplus puisque le second est $2xy - yy$, & que x, est Vn nombre quarré, sauoir bb, il faut que $2x - y$, soit Vn Nombre quarré, comme il est effectiuement, sauoir aa. Il ne faut donc que rendre quarrée la Valeur trouuée de y, sauoir $2bb - aa$. Pour cette fin, supposez

$$b \propto \omega + a.$$

& alors Vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $aa + 4a\omega + 2\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $a - \frac{c\omega}{d}$, on trouuera

$$\omega \propto 4dd + 2cd.$$
$$a \propto cc - 2dd.$$

& par consequent

$$b \propto cc + 2cd + 2dd.$$
$$x \propto c^4 + 4c^3d + 8ccdd + 8cd^3 + 4d^4.$$
$$y \propto c^4 + 8c^3d + 20ccdd + 16cd^3 + 4d^4.$$

c'est pourquoy si l'on suppose

$$c \propto 1.$$
$$d \propto 1.$$

on trouuera

$$a \propto 1.$$
$$b \propto 5.$$
$$\omega \propto 6.$$
$$x \propto 25.$$
$$y \propto 49.$$

& les trois quarez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$25.$$
$$49.$$
$$1225.$$

comme auparauant: mais si l'on suppose

$$c \backsim 3.$$
$$d \backsim 2$$

les trois quarez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$841.$$
$$1681.$$
$$1413721.$$

dont les côtez sont

$$29.$$
$$41.$$
$$1189.$$

Ou bien égalez le second Nombre $2xy-yy$ au quarré $\frac{aayy}{bb}$, pour auoir

$$x \backsim aa+bb.$$
$$y \backsim 2bb.$$

& le premier & le troisieme Nombre se changeront en ces deux autres,

$$2a^4+2aabb.$$
$$2b^4+2aabb.$$

Si l'on diuise le premier $2a^4+2aabb$, par le nombre quarré aa, & le dernier $2b^4+2aabb$, par le Nombre quarré bb, on aura en leur place cette seule Puissance $2aa+2bb$, à égaler au quarré. Pour cette fin, supposez

$$b \backsim \omega - a.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $4aa-4a\omega+2\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $2a+\frac{c\omega}{d}$, on trouuera

$$\omega \backsim 4dd+4cd.$$
$$a \backsim 2dd-cc.$$

& par consequent

$$b \backsim cc+4cd+2dd.$$
$$x \backsim 2c^4+8c^3d+16ccdd+16cd^3+8d^4.$$
$$y \backsim 2c^4+16c^3d+40ccdd+32cd^3+8d^4.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 1.$$

les trois quarrez qu'on cherche, se trouueront de cette grandeur,

25.
49.
1225.

comme auparauant.

Ou bien encore égalez le troisieme Nombre xy au quarré $\frac{aaxx}{bb}$, pour auoir

$$x \backsim bb.$$
$$y \backsim aa.$$

& les deux premiers Nombres se changeront en ces deux autres,

$$2b^4 - aabb.$$
$$2aabb - a^4.$$

Si l'on diuise le premier $2b^4 - aabb$, par le nombre quarré bb, & le second $2aabb - a^4$ par le nombre quarré aa, on aura en leur place cette seule Puissance $2bb - aa$, à égaler au quarré, ce qui se peut faire comme auparauant, sçauoir en supposant

$$b \backsim \omega - a.$$

& alors on aura cette autre Puissance à égaler au quarré

$$aa - 4a\omega + 2\omega\omega.$$

pour le côté duquel prenant $a + \frac{c\omega}{d}$, on trouuera

$$\omega \backsim 2cd + 4dd.$$
$$a \backsim 2dd - cc.$$

& par consequent

$$b \backsim cc + 2cd + 2dd.$$
$$x \backsim c^4 + 4c^3d + 8ccdd + 8cd^3 + 4d^4.$$
$$y \backsim c^4 - 4ccdd + 4d^4.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$$d \backsim 5.$$
$$c \backsim 7.$$

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

1631432881.
57121.
28561.

dont les côtez sont tels,

40391.
239.
169.

Question XI.

Trouver deux Nombres quarrez dont la difference soit égale à Un nombre donné.

On propose de trouver deux nombres quarrez

$$xx.$$

$$yy.$$

dont la difference $xx-yy$ soit égale au nombre donné $60 \sim ab$.

canon Si on diuise la somme & la difference du Nombre donné & du quarré d'Un Nombre indeterminé, par le double de ce Nombre indeterminé, on aura les côtez des deux quarrez qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$$xx-yy \sim ab.$$

dans laquelle on trouuera $x \sim \sqrt{yy+ab}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré $yy+ab$, pour le côté duquel prenant $y \mp c$, on trouuera $y \sim \frac{ab-cc}{2c}$. c'est pourquoy au lieu de $x \sim \sqrt{yy+ab}$, on aura $x \sim \frac{ab+cc}{2c}$. Ainsy les côtez des deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ab+cc,\ ab-cc}{2c}.$$

Parceque nous auons supposé

$$ab \sim 60:$$

Si l'on suppose

$$c \sim 3.$$

ou

$$c \sim 20.$$

les côtez des deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{23,\ 17}{2}.$$

& les deux quarrez seront tels,

$$\frac{529,\ 289}{4}.$$

mais si l'on suppose

$$c \sim 2.$$

ou

$$c \sim 30.$$

les côtez des deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$16.$$

$$14.$$

& les deux quarrez seront tels,

$$256.$$

$$196.$$

& si l'on suppose

$c \sim 6.$

ou

$c \sim 10.$

les côtez des deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

8.

2.

& les deux quarrez seront tels,

64.

4.

On peut resoudre cette Question, sans qu'il soit besoin d'égaler au quarré aucune Puissance, par une Metode, qui vous fera voir l'origine du canon de Diophante, & de la metode dont il se sert pour resoudre les Doubles Egalitez.

Parceque dans l'Equation constitutive $xx-yy \sim ab$, la premiere partie $xx-yy$ a ces deux Nombres produisans $x+y$, $x-y$, & que les deux Nombres produisans de la seconde ab, sont a, b, on égalera le premier Nombre produisant d'une partie au premier de l'autre, & le second au second, par ces deux Equations,

$x+y \sim a.$

$x-y \sim b.$

Dans la premiere $x+y \sim a$, on trouvera $x \sim a-y$, & la deuxieme $x-y \sim b$, se changera en celle-cy, $a-2y \sim b$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{a-b}{2}$. c'est pourquoy au lieu de $x \sim a-y$, on aura $x \sim \frac{a+b}{2}$. Ainsy les côtez des deux quarrez qu'on cherche, seront tels, Seconde Solution.

$\frac{a+b,\ a-b}{2}.$

Si l'on suppose

$a \sim 15.$

$b \sim 4.$

les côtez des deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{19,\ 11}{2}.$

& les deux quarrez seront tels,

$\frac{361,\ 121}{4}.$

& si l'on suppose

$a \sim 12.$

$b \sim 5.$

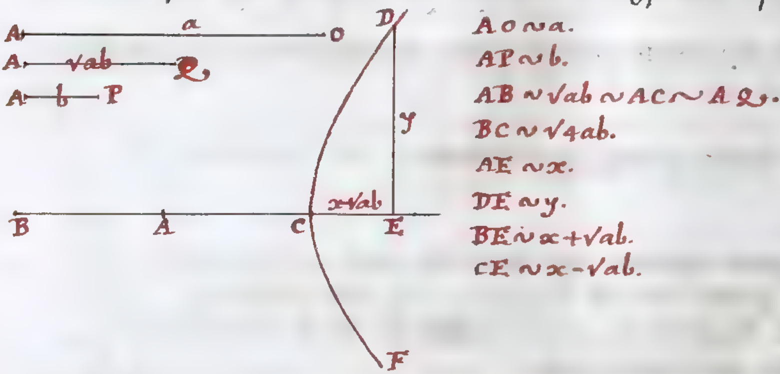
les côtez des deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{17,\ 7}{2}.$

& les deux quarrez seront de cette grandeur,

$\frac{289,\ 49}{4}.$

L'Equation constitutiue $xx - yy \sim ab$, ou $xx - ab \sim yy$, fait connoitre que cette Question est Vn Lieu à l'Hyperbole équilatere,



dont le demidiametre determiné est $\sqrt{ab}$, & dont la description sera facile en substituant des lignes, comme AO, AP, à la place des deux nombres a, b, qui produisent le nombre donné ab.

Construction geometrique. Ayant reduit le Rectangle donné ab, en quarré, c'est à dire ayant trouué entre les deux côtez a, b, ou entre les deux lignes AO, AP, Vne Moyenne proportionnelle AQ, afinque son quarré soit égale au Rectangle ab, par 17. 6. faites la ligne BC, double de la ligne AQ, & de son point de milieu A, comme centre, decriuez par le point C, sur le diametre determiné BC, l'Hyperbole équilatere DCF, qui sera le lieu qu'on cherche: de sorte que si on y prend Vn point à Volonté, comme D, pour en tirer la droite DE, qui soit ordonnée au diametre BC, les deux lignes AE, DE, representeront les deux nombres qu'on cherche, c'est à dire que la difference AEq - DEq sera égale au Rectangle ab, ou au quarré de la ligne AQ, ou AC, son égale.

Demonstration. Car par 6. 2. on a BEC + ACq ∾ AEq: c'est pourquoy si à la place du Rectangle BEC, on met le quarré DE, qui luy est égal, par la Nature de l'Hyperbole, & qu'on l'ôte de chaque côté, il sera le seul quarré AC, égal à la difference AEq - DEq. Ce qu'il faloit demontrer.

On tire de la seconde solution precedente, le canon suiuant, qui est de Diophante.

Canon. Les Moitiez de la somme & de la difference des deux nombres produisans du nombre donné, sont les côtez des deux quarrez qu'on cherche.

Question XII.

Trouver vn nombre, auquel si on ajoute separément deux nombres donnez, chaque somme soit vn nombre quarré.

On propose de trouver vn nombre

x.

auquel si on ajoute separément les deux nombres donnez

$2 \sim a$.

$3 \sim b$.

les deux sommes

$x+a$.

$x+b$.

soient chacune vn nombre quarré.

Si du quarré de la moitié de la somme des deux nombres produisans de la difference des deux nombres donnez, on ôte le plus grand de ces deux mêmes nombres donnez, ou que du quarré de la moitié de la difference on ôte le plus petit; on aura le nombre qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$lx+la$.

$lx+lb$.

La difference de ces deux Puissances est $lb-la$. C'est pourquoy il faut trouver deux quarrez dont la difference soit égale à la difference trouvée $lb-la$, ce qui se peut faire par la Question precedente, & égaler le plus grand de ces deux quarrez à la plus grande Puissance $lx+lb$, ou le plus petit à la plus petite $lx+la$: car ainsy on trouvera vne même valeur pour le nombre x, qu'on cherche.

On pourra donc facilement trouver deux semblables quarrez par le premier Canon de la Question precedente: Mais comme nôtre dessein est d'expliquer icy la Metode de Diophantes, nous nous servirons du second Canon, que vous avez sur la fin de la Question precedente.

Prenez le nombre indeterminé c, pour l'vn des deux nombres produisans, par lequel si vous divisez la difference $lb-la$, vous aurez $\frac{lb-la}{c}$, pour l'autre nombre produisant. Ainsy les deux nombres produisans seront tels,

c.

$\frac{lb-la}{c}$.

La Moitié de leur somme est $\frac{cc+lb-la}{2c}$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la plus grande Puissance $lx+lb$, & la moitié de leur difference est $\frac{cc-lb+la}{2c}$, pour le côté du quarré qu'on doit égaler à la plus petite Puissance $lx+la$. Si donc on égale le quarré de la moitié de la somme à la plus grande Puissance, ou le quarré de la moitié de la difference à la plus petite Puissance, on aura ces deux Equations,

$$\frac{c^4+2lbcc+llbb-2lacc-2llab+llaa}{4cc} \backsim lx+lb.$$

$$\frac{c^4-2lbcc+llbb+2lacc-2llab+llaa}{4cc} \backsim lx+la.$$

& dans chacune on trouuera vne même valeur pour le Nombre x, qu'on cherche, sauoir

$$\frac{c^4-2lacc+llaa+llbb-2lbcc-2llab}{4cc}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \backsim 2.$$

$$b \backsim 3.$$

si l'on suppose

$$c \backsim 4.$$

le nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$\frac{97}{64}.$$

& si l'on suppose

$$c \backsim 5.$$

le nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$\frac{24}{25}.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard du nombre indeterminé c, est qu'il doit être plus grand que $\sqrt{la}+\sqrt{lb}$.

Demonstration. Car dans le Numerateur du Nombre trouué, on a cette inégalité, $c^4+llaa+llbb \oplus 2lacc+2lbcc+2llab$: c'est pourquoy par l'antithese on aura celle-cy, $c^4-2lacc-2lbcc \oplus 2llab-llaa-llbb$, à laquelle ajoutant le quarré $llaa+2llab+llbb$, on aura celle-cy, $c^4-2lacc-2lbcc+llaa+2llab+llbb \oplus 4llab$, dont la Racine quarrée donne celle-cy, $cc-la-lb \oplus \sqrt{4llab}$, & par l'antithese on aura celle-cy, $cc \oplus la+lb+\sqrt{4llab}$, & enfin par la Racine quarrée, on aura celle-cy, $c \oplus \sqrt{la}+\sqrt{lb}$. Ce qu'il faloit demontrer.

On peut resoudre autrement cette double Egalité, sans auoir recours à la Question precedente, par vne metode, qui peut presque toujours seruir quand celle de Diophante ne le peut pas, comme vous verrez dans la suite.

Egalez la premiere Puissance $lx+la$ au quarré yy, & la deuxieme $lx+lb$ au quarré zz par ces deux Equations,

$lx+$

$$lx + la \sim yy.$$
$$lx + lb \sim zz.$$

Dans la premiere $lx + la \sim yy$, on trouuera $lx \sim yy - la$, & la deuxieme $lx + lb \sim zz$ se changera en celle-cy, $yy - la + lb \sim zz$, dans laquelle on trouuera $z \sim \sqrt{yy - la + lb}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $yy - la + lb$, pour le côté duquel prenant $y \cdots c$, on trouuera $y \sim \frac{cc + la - lb}{2c}$, c'est pourquoy au lieu de $z \sim \sqrt{yy - la - lb}$, on aura $z \sim \frac{cc - la + lb}{2c}$, & le Nombre x, qu'on cherche, se trouuera le même qu'auparauant.

Cette metode est équiualente à celle de Diophante, par laquelle il prend garde à ne pas tomber dans vne Double Egalité; sans qu'il soit besoin d'en parler dauantage.

Question XIII.

Trouuer vn nombre, lequel étant ôté separément de deux Nombres donnez, chaque reste soit vn Nombre quarré.

On propose de trouuer vn Nombre

$$x.$$

tel que si on l'ôte separément du Nombre donné $9 \sim a$, & du Nombre $21 \sim b$, les deux restes,

$$a - x.$$
$$b - x.$$

soient chacun vn Nombre quarré.

Si du plus grand des deux Nombres donnez on ôte le quarré de la Moitié de la somme des deux Nombres produisans de la difference des deux Nombres donnez, ou que du plus petit on ôte le quarré de la Moitié de la difference; on aura le nombre qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$la - lx$$
$$lb - lx.$$

Leur difference est $lb - la$, dont les deux Nombres produisans sont

$$c.$$
$$\frac{lb - la}{c}.$$

La Moitié de leur somme est $\frac{cc + lb - la}{2c}$, dont le quarré étant égale à la plus grande Puissance $lb - lx$, le Nombre x, qu'on cherche, se trouuera tel,

$$\frac{2lacc + 2lbcc + 2llab - c4 - llaa - llbb}{4cc}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 9.$$
$$b \sim 21.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 4.$$

le nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$\frac{25}{4}.$$

& si l'on suppose

$$c \sim 5.$$

le nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$\frac{731}{100}.$$

Determination. La determination de cette Question, à l'égard du nombre indeterminé c, est qu'il doit être moindre que $\sqrt{la}+\sqrt{lb}$, & plus grand que $\sqrt{lb-la}$.

Demonstration. Car dans le Numerateur du nombre trouvé, on a cette inégalité, $c^4+llaa+llbb \ominus 2lacc+2lbcc+2llab$, dans laquelle on trouvera comme dans la Question precedente, $c \ominus \sqrt{la}+\sqrt{lb}$. Ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit demontrer.

Mais parceque chacun des deux nombres donnez doit être plus grand que le nombre trouvé par la Nature de la Question, on aura cette inégalité, $a \oplus \frac{2lacc+2lbcc+2llab-c^4-llaa-llbb}{4lcc}$, laquelle étant reduite, donne celle-cy, $c^4+2lacc-2lbcc \oplus 2llab-llaa-llbb$, dans laquelle on trouvera $c \oplus \sqrt{lb-la}$. Ce qui restoit à demontrer.

Question XIV.

Trouver un nombre, duquel si on ôte separément deux nombres donnez; chaque reste soit un nombre quarré.

On propose de trouver un nombre

$$x.$$

duquel si on ôte separément le nombre donné $6 \sim a$, & le nombre donné $7 \sim b$, les deux restes

$$x-a.$$
$$x-b.$$

soient chacun un nombre quarré.

Canon. Si au quarré de la moitié de la somme des deux nombres produisans de la difference des deux nombres donnez, on ajoute le plus petit nombre donné, ou le plus grand au quarré de la moitié de la difference, on aura le nombre qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette double Egalité,

$lx-la.$

$lx-lb.$

laquelle étant resolue par la metode de Diophante, ou par la nôtre; donne pour le Nombre x, qu'on cherche, cette valeur;

$$\frac{c^4+2lacc+llaa+llbb+2lbcc-2llab}{4cc}.$$

Parceque Nous avons supposé

$a \backsim 6.$

$b \backsim 7.$

Si l'on suppose

$c \backsim 2.$

ou

$c \backsim \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$

le nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur;

$$\frac{121}{16}.$$

La determination de cette Question, à l'égard du Nombre indeterminé c, est qu'il doit être plus grand ou plus petit que $\sqrt{lb-la}$. Determination.

Car puisque le Nombre trouvé doit être plus grand que chacun des deux Nombres donnez a, b, par la Nature de la Question, on aura cette inegalité, $\frac{c^4+2lacc+llaa+llbb+2lbcc-2llab}{4cc} \oplus b$, laquelle étant reduite donne celle-cy, $c^4+2lacc-2lbcc+llaa+llbb-2llab \oplus 0$, dont la Racine quarrée, en commençant par c^4, donne $cc+la-lb \oplus 0$, & par consequent $c \oplus \sqrt{lb-la}$, & en commençant par $llbb$, donne $lb-la-cc \oplus 0$, & par consequent $c \ominus \sqrt{lb-la}$. Ce qu'il faloit demontrer. Demonstration.

Nous ajouterons à ces trois dernieres Questions, les trois suivantes;

I.

Trouver un Nombre, lequel étant augmenté & diminué d'un Nombre donné, la somme & le reste soient chacun un Nombre quarré.

On propose de trouver un Nombre

$x.$

en sorte que si on luy ajoute le Nombre donné $4 \backsim a$, & qu'on le diminue du Nombre donné $9 \backsim b$, la somme $x+a$, & la difference $x-b$, soient chacun un Nombre quarré.

Si du quarré de la Moitié de la somme des deux Nombres produisans de la somme des deux Nombres donnez, on ôte le premier des deux mêmes Nombres donnez, ou qu'au quarré de la Moitié de la difference on ajoute le second; on aura le Nombre qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura cette double Egalité,

$$1x + 1a.$$

$$1x - 1b.$$

laquelle étant resolue par la Metode de Diophante, ou par la Nôtre, donne pour le Nombre x, qu'on cherche, cette valeur;

$$\frac{c4 - 2lacc + llaa + 2lbcc + 2llab + llbb}{4cc}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \sim 4.$$

$$b \sim 9.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 1.$$

le Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur;

$$\frac{45}{11}.$$

Trouver Vn Nombre, lequel étant ajouté & ôté d'Vn Nombre donné, la somme & la difference soient des Nombres quarrez.

On propose de trouver Vn Nombre

$$x.$$

lequel étant ajouté au Nombre donné $3 \sim a$, & étant ôté du Nombre donné $10 \sim b$, la somme $a + x$, & la difference $b - x$, soient chacune Vn Nombre quarré.

Canon. Si de l'Vn des deux quarrez, dont la somme des deux Nombres donnez doit être composée, on ôte le premier des deux mêmes Nombres donnez; ou que du second on ôte l'autre quarré; on aura le Nombre qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura cette double Egalité,

$$1a + 1x.$$

$$1b - 1x.$$

Egalez la premiere $1a + 1x$, au quarré yy, & la deuxieme $1b - 1x$, au quarré zz; par ces deux Equations,

$$1a + 1x \sim yy.$$

$$1b - 1x \sim zz.$$

Dans la premiere $1a + 1x \sim yy$, on trouvera $1x \sim yy - 1a$, & la deuxieme $1b - 1x \sim zz$, se changera en celle-cy, $1a + 1b - yy \sim zz$, ou $1a + 1b \sim yy + zz$, où l'on void que la somme $1a + 1b$, ou 13, des deux Nombres donnez $3, 10$, doit être composée de deux quarrez, pour les deux quarrez yy, zz. Ces deux quarrez sont icy $4, 9$, dont les côtez sont $2, 3$.

c'est pourquoy si l'on suppose

$y \sim 2.$

$z \sim 3.$

le Nombre x, qu'on cherche, sera de cette grandeur;

1.

Mais si l'on suppose

$y \sim 3.$

$z \sim 2.$

le Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur;

6.

On pourra trouver d'autres valeurs pour le Nombre x, qu'on cherche, lorsque la somme des deux Nombres donnez sera composée de deux quarrez, comme il arrive icy, ou bien quand la même somme sera un Nombre quarré, parceque par les Quest. IX. X. on la pourra diviser infiniment en deux autres Nombres quarrez.

Mais il y aura une determination à faire touchant ces deux autres Nombres quarrez, car ils doivent être tels que de l'un on puisse ôter le plus petit Nombre donné 3, & que l'autre puisse être ôté du plus grand Nombre donné 10, comme porte le Canon: c'est à dire que l'un doit être moindre que $10 \sim b$, à cause de $x \sim b - zz$, & l'autre plus grand que $3 \sim a$, à cause de $x \sim yy - a$. c'est donc 13 qu'il faut diviser en deux semblables quarrez, ce qui se pourra faire si ces deux quarrez aprochant de la Moitié de 13, ou de $6\frac{1}{2}$, comme il sera enseigné dans la Quest. XII. Liv. V.

III.

Trouver un nombre, lequel étant ôté & diminué d'un nombre donné, chaque reste soit un Nombre quarré.

On propose de trouver un Nombre

$x.$

lequel étant ôté du Nombre donné $19 \sim a$, & duquel ôtant le nombre donné $6 \sim b$, les deux restes

$a - x.$

$x - b.$

soient chacun un Nombre quarré.

Si à l'un des deux quarrez dont la difference des deux Nombres donnez doit être composée, on ajoute le second Nombre donné, ou que du premier on ôte l'autre quarré; on aura le Nombre qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura cette double Egalité,

$$la - lx.$$
$$lx - lb.$$

Si on égale la premiere Puissance $la - lx$, au quarré yy, & la deuxieme $lx - lb$, au quarré zz; par ces deux Equations,

$$la - lx \sim yy.$$
$$lx - lb \sim zz.$$

Dans la premiere $la - lx \sim yy$, on trouvera $lx \sim la - yy$, & la deuxieme $lx - lb \sim zz$, se changera en celle-cy, $la - lb - yy \sim zz$, ou $la - lb \sim yy + zz$, où l'on void que la difference $la - lb$, ou 13, des deux Nombres donnez 19, 6, doit être composée de deux quarrez, pour les deux quarrez yy, zz. Ces deux quarrez sont icy 4, 9, dont les côtez sont 2, 3.

C'est pourquoy si l'on suppose

$$y \sim 2.$$
$$z \sim 3.$$

le Nombre x, qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$15.$$

Mais si l'on suppose

$$y \sim 3.$$
$$z \sim 2.$$

le Nombre qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$6.$$

Les remarques de la Question precedente serviront pour celle-cy.

Question XV.

Trouver deux Nombres & un quarré, en sorte que la somme des deux nombres soit égale à un Nombre donné, & que les sommes du quarré & de chacun de ces deux mêmes Nombres, soient des Nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

& un quarré

$$zz.$$

en sorte que la somme $x + y$ des deux Nombres soit égale au Nombre donné $20 \sim a$, & que si on ajoute chacun de ces deux mêmes au quarré zz, les deux sommes

$$zz + lx.$$
$$zz + ly.$$

Soient chacune un Nombre quarré.

Si on multiplie separément deux Nombres indeterminez par le Nombre donné, pour ajouter au plus grand produit & ôter du plus petit le Solide sous les deux mêmes Nombres & leur difference, & qu'on divise la somme & le reste chacun par la somme de ces deux mêmes Nombres; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Que si on divise par le double de cette somme la difference entre le Nombre donné & la somme des quarrez des deux Nombres indeterminez; on aura le côté du Nombre quarré qu'on cherche. canon.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$$x+y \sim a.$$

& ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$zz+lx.$$
$$zz+ly.$$

Dans l'Equation precedente $x+y \sim a$, on trouvera $x \sim a-y$, & l'on aura ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$zz+la-ly.$$
$$zz+ly.$$

Egalez la premiere $zz+la-ly$ au quarré mm, & la deuxieme $zz+ly$ au quarré nn, par ces deux Equations,

$$zz+la-ly \sim mm.$$
$$zz+ly \sim nn.$$

Dans la premiere $zz+la-ly \sim mm$, on trouvera $ly \sim zz+la-mm$, & la deuxieme $zz+ly \sim nn$, se changera en celle-cy, $2zz+la-mm \sim nn$, ou $2zz \sim mm+nn-la$. Supposez

$$n \sim b \cdots z.$$
$$m \sim c \cdots z.$$

pour avoir cette autre Equation, $2zz \sim bb+cc-2bz-2cz-la+2zz$: dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{bb+cc-la}{2b+2c}$, pour le côté du quarré qu'on cherche. C'est pourquoy le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{b^4+2bbcc+c^4-2labb-2lacc+llaa}{4bb+8bc+4cc}.$$

& au lieu de

$$n \sim b \cdots z.$$
$$m \sim c \cdots z.$$

on aura

$$n \sim \frac{bb+2bc-cc+la}{2b+2c}.$$
$$m \sim \frac{cc+2bc-bb+la}{2b+2c}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{bcc - bbc + lac,\ bbc - bcc + lab}{b+c}$.

Parceque nous avons supposé

$a \sim 20.$

Si l'on suppose

$b \sim 2.$

$c \sim 3.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{66, 34}{5}.$

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

$\frac{49}{100}.$

dont le côté est

$\frac{7}{10}.$

Determination. La determination de cette Question, est que le nombre c doit être plus petit ou plus grand que $\sqrt{la - bb}$, mais toujours moindre que $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{4la + bb}$, lorsque ce même nombre c, est plus grand que le nombre b, dont le quarré bb doit être moindre que le nombre donné a, à cause de $\sqrt{la - bb}$.

Demonstration. Car afinque le côté du quarré trouvé soit reel, on void aisément par son Numerateur $bb + cc - la$, que $bb + cc$, doit être plus grand que la, ou bien plus petit que le même la, auquel cas ce côté sera nié, mais cela n'empêchera pas que son quarré ne soit affirmé. Ainsy on void que c, doit etre plus grand ou plus petit que $\sqrt{la - bb}$. Ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit demontrer.

Deplus afinque chacun des deux nombres trouvez soit affirmé, le Numerateur $bcc - bbc + lac$, du premier fait connoitre que $bc + la$ doit être plus grand que bb, & le Numerateur $bbc - bcc + lab$, fait connoitre que la même somme $bc + la$ doit être plus grande que cc. Ainsy nous aurons ces deux inégalitez:

$$bc + la \oplus bb.$$
$$bc + la \oplus cc.$$

& comme cc, est supposé plus grand que bb, il suffit de resoudre la seconde inégalité, $bc + la \oplus cc$, ou $cc - bc \ominus la$, dans laquelle on trouvera $c \ominus \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{4la + bb}$. Ce qui restoit à demontrer.

Metode de Diophante. Pour resoudre cette Question par la metode de Diophante, laquelle est plus facile, mais moins metodique, égalez la premiere Puissance $zz + lx$ au quarré $zz + 2bz + bb$, & la deuxieme $zz + ly$, au quarré $zz + 2cz + cc$, par ces deux Equations,

$$zz + lx \sim zz + 2bz + bb.$$
$$zz + ly \sim zz + 2cz + cc.$$

Dans

Dans la premiere $zz+lx \backsim zz+2bz+bb$, on trouuera $lx \backsim 2bz+bb$, & dans la seconde $zz+ly \backsim zz+2cz+cc$, on trouuera $ly \backsim 2cz+cc$, & la premiere Equation $x+y \backsim a$, ou $lx+ly \backsim la$, se changera en celle-cy, $2bz+2cz+bb+cc \backsim la$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{la-bb-cc}{2b+2c}$, pour le côté du quarré qu'on cherche, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Si vous voulez une solution plus generale, égalez la premiere Puissance $zz+lx$ au quarré $zz-\frac{2bxz}{c}+\frac{bbxx}{cc}$, & la deuxieme $zz+ly$ au quarré $zz-\frac{2dyz}{m}+\frac{ddyy}{mm}$, par ces deux Equations,

$$zz+lx \backsim zz-\frac{2bxz}{c}+\frac{bbxx}{cc}.$$

$$zz+ly \backsim zz-\frac{2dyz}{m}+\frac{ddyy}{mm}.$$

Dans la premiere $zz+lx \backsim zz-\frac{2bxz}{c}+\frac{bbxx}{cc}$, on trouuera $x \backsim \frac{lcc+2bcz}{bb}$, & dans la seconde $zz+ly \backsim zz-\frac{2dyz}{m}+\frac{ddyy}{mm}$, on trouuera $y \backsim \frac{lmm+2dmz}{dd}$, & la premiere Equation, $x+y \backsim a$, se changera en celle-cy, $\frac{lcc+2bcz}{bb} \backsim \frac{lmm+2dmz}{dd}$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{abbdd-lbbmm-lccdd}{2bcdd+2dmbb}$, pour le côté du quarré qu'on cherche, lequel par consequent sera tel,

$$\frac{aab^4d^4-2lab^4ddmm+llb^4m^4-2labbccd^4+2llbbccddmm+llc^4d^4}{4bbccd^4+8b^3cd^3m+4b^4ddmm}.$$ Solution plus generale.

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abbcdd-lbbcmm+lbccdm}{bbcdd+b^3dm}.$$

$$\frac{ablmdd-lccmdd+lbcdmm}{bbddm+bcd^3}.$$

Parceque nous auons supposé

$a \backsim 20.$

Si l'on suppose

$l \backsim 1.$

$b \backsim 1.$

$c \backsim 1.$

$d \backsim 1.$

$m \backsim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

6.

14.

& le quarré qu'on cherche, sera de cette grandeur;

$\frac{25}{4}.$

dont le côté est

$\frac{5}{2}.$

& le tout sera reel & veritable, pourueûque le nombre m, soit moindre que $\sqrt{\frac{abbdd-lccdd}{lbb}}$, comme il est aisé de voir dans le Numerateur $abbdd-lbbmm-lccdd$, du côté du quarré trouué. Determination.

Si vous voulez une troisieme solution, égalez la premiere Puissance $zz+lx$, au quarré bb, & la deuxieme $zz+ly$, au quarré cc, par ces deux Equations,

$$zz+lx \sim bb.$$
$$zz+ly \sim cc.$$

Dans la premiere $zz+lx \sim bb$, on trouvera $lx \sim bb-zz$, & dans la seconde $zz+ly \sim cc$, on trouvera $ly \sim cc-zz$: & au lieu de l'Equation constitutive $x+y \sim a$, ou $lx+ly \sim la$, se changera en celle-cy, $bb+cc-2zz \sim la$, ou $4zz \sim 2bb+2cc-2la$, dans laquelle on trouvera $2z \sim \sqrt{2bb+2cc-2la}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2bb+2cc-2la$. Supposez

$$b \sim c+d.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $4cc+4cd+2dd-2la$, pour le côté duquel prenant $2c+m$, on trouvera $c \sim \frac{2dd-2la-mm}{4m-4d}$. c'est pourquoy au lieu de $b \sim c+d$, on aura $b \sim \frac{4dm-2dd-2la-mm}{4m-4d}$, & au lieu de $2z \sim \sqrt{2bb+2cc-2la}$, ou de $z \sim \frac{1}{2}\sqrt{2bb+2cc-2la}$, on aura $z \sim \frac{mm-2dm-2la+2dd}{4m-4d}$; pour le côté du quarré qu'on cherche, lequel par consequent sera tel,

$$\frac{m^4-4dm^3+8ddmm-4lamm+8ladm+4llaa-8d^3m-8ladd+4d^4}{16mm-32dm+16dd}.$$

Troisieme Solution.

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4ddmm-6ladm+4ladd-dm^3+lamm-2d^3m}{4mm-8dm+4dd}.$$

$$\frac{2lamm-3ddmm+dm^3-2ladm+2d^3m}{4mm-8dm+4dd}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 20.$$

Si l'on suppose

$$m \sim 3.$$
$$d \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{123,37}{8}.$$

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{1225}{16}.$$

dont le côté est

$$\frac{35}{4}.$$

Determination.

& le tout sera reel & affirmé, pourvûque le nombre m, soit plus grand que le double du nombre d, parceque les valeurs trouvées des côtez b, c, doivent être chacune plus grande que la valeur trouvée du côté z à cause de $lx \sim bb-zz$ & de $ly \sim cc-zz$.

Question XVI.

Trouver deux nombres & un quarré, en sorte que la somme des deux nombres soit égale à un nombre donné, & que l'excez du quarré sur chacun des deux nombres soit un nombre quarré.

On propose de trouver deux nombres

$$x.$$

$$y.$$

& un quarré

$$zz$$

en sorte que la somme $x+y$ des deux nombres soit égale au nombre donné $20 \sim a$, & que si on ôte du quarré zz chacun des deux nombres x, y, les deux restes

$$zz-lx.$$

$$zz-ly.$$

soient chacun un nombre quarré.

Si on multiplie separément deux nombres indeterminez par le nombre donné, pour ajouter au plus petit produit & ôter du plus grand, le solide sous les deux nombres & leur difference, & qu'on multiplie & le reste chacun par la somme des deux mêmes nombres; on aura les deux nombres qu'on cherche: & si par le double de la même somme on divise la somme du nombre donné & des quarrez des deux nombres indeterminez on aura le côté du quarré qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$$x+y \sim a.$$

& ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$zz-lx.$$

$$zz-ly.$$

Egalez la premiere $zz-lx$ au quarré $zz-2bz+bb$, & la deuxieme $zz-ly$ au quarré $zz-2cz+cc$, par ces deux Equations,

$$zz-lx \sim zz-2bz+bb.$$

$$zz-ly \sim zz-2cz+cc.$$

Dans la premiere $zz-lx \sim zz-2bz+bb$, on trouvera $lx \sim 2bz-bb$, & dans la seconde $zz-ly \sim zz-2cz+cc$, on trouvera $ly \sim 2cz-cc$, & l'Equation precedente $x+y \sim a$, ou $lx+ly \sim la$, se changera en celle-cy, $2bz+2cz-bb-cc \sim la$, dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{bb+cc+la}{2b+2c}$, pour le côté du quarré qu'on cherche, lequel par consequent sera tel,

$$\frac{b^4+2bbcc+c^4+2labb+2lacc+llaa}{4bb+8bc+4cc}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bcc-bbc+lab,\ bbc-bcc+lac}{b+c}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \sim 20.$$

Si l'on suppose

$$b \sim 1.$$
$$c \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{38,\ 22}{3}.$$

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{625}{36}.$$

dont le côté est

$$\frac{25}{6}.$$

Determination. La determination de cette Question, est que le Nombre indeterminé b, est Moindre que l'autre Nombre indeterminé c, il doit aussy être Moindre que $\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\sqrt{cc-4la}$, ou bien plus grand que $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{cc-4la}$, où l'on void que cc, doit etre plus grand que $4la$, à cause de $\sqrt{cc-4la}$.

Demonstration. Car on trouuera dans le Numerateur $bcc-bbc+lab$, du premier Nombre trouué, que le Plan bc, doit être Moindre que $cc+la$, & dans le Numerateur $bbc-bcc+lac$, du second Nombre trouué, que le même Plan bc, doit aussy être moindre que $bb+la$. Ainsy Nous auons ces deux inégalitez

$$bc \ominus cc+la.$$
$$bc \ominus bb+la.$$

& comme cc, est supposé plus grand que bb, il suffira de se seruir de la seconde inégalité, $bc \ominus bb+la$, dans laquelle on trouuera $b \ominus \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\sqrt{cc-4la}$, ou $b \oplus \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{cc-4la}$. Ce qu'il faloit demontrer.

On peut rendre cette Solution plus generale par vne metode semblable à celle que Vous auez vûe dans la Question precedente: Mais sans Nous arêter à repeter cette Metode, Nous expliquerons celle de Diophante, laquelle se peut apliquer à la Question precedente.

Metode de Diophante. Si l'on suppose

$$z \sim \omega + c.$$

on aura ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$\omega\omega + 2c\omega + cc - lx.$$
$$\omega\omega + 2c\omega + cc - ly.$$

Egalez la premiere $\omega\omega+2c\omega+cc-lx$, au quarré $\omega\omega$, & la deuxieme $\omega\omega+2c\omega+cc-ly$, au quarré $\omega\omega+2b\omega+bb$, pour auoir ces deux Equations,

$$\omega\omega+2c\omega+cc-lx \backsim \omega\omega.$$

$$\omega\omega+2c\omega+cc-ly \backsim \omega\omega+2b\omega+bb.$$

Dans la premiere $\omega\omega+2c\omega+cc-lx \backsim \omega\omega$, on trouuera $lx \backsim 2c\omega+cc$, & dans la seconde $\omega\omega+2c\omega+cc-ly \backsim \omega\omega+2b\omega+bb$, on trouuera $ly \backsim 2c\omega-2b\omega+cc-bb$, & l'Equation constitutiue $x+y \backsim a$, ou $lx+ly \backsim la$, se changera en celle-cy, $4c\omega-2b\omega+2cc-bb \backsim la$, dans laquelle on trouuera $\omega \backsim \frac{bb-2cc+la}{4c-2b}$. C'est pourquoy au lieu de $z \backsim \omega+c$, on aura $z \backsim \frac{bb-2bc+2cc+la}{4c-2b}$, pour le côté du quarré qu'on cherche, lequel par consequent sera tel,

$$\frac{4c^4+b^4-4b^3c+8bbcc-8bc^3+2labb-4labc+4lacc+llaa}{16cc-16bc+4bb}.$$ Seconde Solution.

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bbc-bcc+lac,\ bcc-bbc-lab+lac}{4c-2b}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \backsim 20.$$

Si l'on suppose

$$b \backsim 1.$$

$$c \backsim 2.$$

les deux Nombres & le quarré qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant. Mais si l'on suppose

$$b \backsim 2.$$

$$c \backsim 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{35,\ 45}{4}.$$

& le quarré qu'on cherche, sera tel

$$\frac{729}{64}.$$

dont le côté est

$$\frac{27}{8}.$$

Si vous voulez vne troisieme Solution, égalez comme dans la Question precedente, la premiere Puissance $zz-lx$, au quarré bb, & la deuxieme $zz-ly$, au quarré cc, par ces deux Equations,

$$zz-lx \backsim bb.$$

$$zz-ly \backsim cc.$$

Dans la premiere $zz-lx \backsim bb$, on trouuera $lx \backsim zz-bb$, & dans la seconde $zz-ly \backsim cc$, on trouuera $ly \backsim zz-cc$, & l'Equation constitutiue $x+y \backsim a$, ou $lx+ly \backsim la$, se changera en celle-cy, $2zz-bb-cc \backsim la$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{1}{2}\sqrt{2bb+2cc+2la}$. Ainsy on aura

cette Puissance à égaler au quarré, $2bb+2cc+2la$. Supposer

$$b \propto c+d.$$

& alors Vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $4cc+4cd+2dd+2la$, pour le côté duquel prenant $2c+m$, on trouuera $c \propto \frac{2dd+2la-mm}{4m-4d}$. c'est pourquoy au lieu de $b \propto c+d$, on aura $b \propto \frac{2la-mm-2dd+4dm}{4m-4d}$, & au lieu de $z \propto \frac{1}{2}\sqrt{2bb+2cc+2la}$, on aura $z \propto \frac{2dd+2la+mm-2dm}{4m-4d}$, pour le côté du quarré qu'on cherche, lequel par consequent sera tel,

$$\frac{4d^4+8ladd+4llaa+8ddmm+4lamm+m^4-8d^3m-8ladm-4dm^3}{16mm-32dm+16dd}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4ladd-3ddmm+2lamm+2d^3m-6ladm+dm^3}{4mm-8dm+4dd}.$$

$$\frac{3ddmm+2lamm-2d^3m-2ladm-dm^3}{4mm-8dm+4dd}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \propto 20.$$

Si l'on suppose

$$m \propto 3.$$

$$d \propto 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{43;\ 117}{8}.$$

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{2025}{64}.$$

dont le côté est

$$\frac{45}{8}.$$

Nous ajouterons icy les Questions suiuantes.

I.

Trouuer deux Nombres, en sorte que la somme des deux Nombres soit égale à Vn Nombre donné, & que les excez de chaque Nombre sur le quarré soient des Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

& Vn quarré

$$zz$$

en sorte que la somme $x+y$, des deux Nombres soit égale au Nombre donné $23 \propto a$, & que si on ôte le quarré zz de chacun de ces deux Mêmes Nombres, les deux restes

$$1x-zz.$$

$$1y-zz.$$

soient chacun un nombre quarré.

Si des deux quarrez & du double quarré, dont le nombre donné doit être composé, on ajoute la moitié du double quarré, (laquelle sera le quarré qu'on cherche) à chacun des deux autres quarrez; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$$x+y \sim a.$$

& ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$lx-zz.$$
$$ly-zz.$$

Egalez la premiere $lx-zz$ au quarré bb, & la deuxieme $ly-zz$ au quarré cc pour ces deux Equations,

$$lx-zz \sim bb.$$
$$ly-zz \sim cc.$$

Dans la premiere $lx-zz \sim bb$, on trouvera $lx \sim bb+zz$; & dans la seconde $ly-zz \sim cc$, on trouvera $ly \sim cc+zz$; & l'Equation constitutive $x+y \sim a$, ou $lx+ly \sim la$, se changera en celle-cy, $bb+cc+2zz \sim la$, où l'on void que le nombre donné la, ou 23, doit être composé de deux quarrez, pour les deux bb, cc, & du double d'un autre quarré, pour le double quarré $2zz$; comme il arrive icy, car 23 est composé des deux quarrez 1, 4, dont les côtez sont 1, 2, & du double quarré 18, dont le côté est 3. C'est pourquoy si l'on suppose

$$b \sim 1.$$
$$c \sim 1.$$
$$z \sim 3.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$10.$$
$$13.$$

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$9.$$

La solution ne sera pas si limitée, quand le nombre donné sera quarré, comme

$$144 \sim aa.$$

& alors on aura cette autre Equation constitutive,

$$lx+ly \sim aa.$$

& par consequent $ly \sim aa-lx$, & l'on aura ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$lx-zz.$$
$$aa-lx-zz.$$

Egalez la premiere $lx-zz$, au quarré bb, & la deuxieme $aa-lx-zz$, au quarré cc, par ces deux Equations,

$$lx-zz \sim bb.$$

$$aa-lx-zz \sim cc.$$

Dans la premiere $lx-zz \sim bb$, on trouvera $lx \sim bb+zz$, & la deuxieme $aa-lx-zz \sim cc$, se changera en celle-cy, $aa-bb-2zz \sim cc$, ou $bb+cc \sim aa-2zz$. Supposez

$$b \sim \omega \cdots z.$$

& l'Equation precedente $bb+cc \sim aa-2zz$, se changera en celle-cy, $2\omega\omega+2zz \sim aa-2zz$, dans laquelle on trouvera $\omega \sim \sqrt{\frac{1}{2}aa-2zz}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré $\frac{1}{2}aa-2zz$: Multipliez-la par le Nombre quarré 4, pour avoir en entiers cette autre Puissance à égaler au quarré $2aa-8zz$, dont les deux Nombres produisans sont

$$2a-4z.$$

$$a+2z.$$

qu'on égalera ensemble par cette Equation, $2a-4z \sim a+2z$, dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{1}{6}a$. C'est pourquoy au lieu de $\omega \sim \sqrt{\frac{1}{2}aa-2zz}$, on aura $\omega \sim \frac{2}{3}a$, & au lieu de $b \sim \omega \cdots z$, on aura $b \sim \frac{5}{6}a$, & par consequent $c \sim \frac{1}{2}a$. Ainsy le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{1}{36}aa.$$

dont le côté est

$$\frac{1}{6}a.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{13aa,\ 5aa}{18}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 12.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

104.

40.

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

4.

Si vous voulez une solution plus generale, multipliez le premier Nombre produisant $2a-4z$ par le Nombre indeterminé $\frac{m}{n}$, & divisez le second $a+2z$ par le même Nombre indeterminé $\frac{m}{n}$, pour avoir ces deux autres Nombres produisans

$$\frac{2am-4mz}{n}.$$

$$\frac{an+2nz}{m}.$$

que vous égalerez ensemble par cette Equation, $\frac{2am-4mz}{n} \sim \frac{an+2nz}{m}$,

Dans

dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{2amm-ann}{4mm+2nn}$, pour le côté du quarré qu'on cherche, lequel par consequent sera tel,

$$\frac{4aam^4-4aammnn+aan^4}{16m^4+16mmnn+4n^4}.$$

& l'on trouuera

$$\omega \backsim \frac{2amn}{2mm+nn}.$$

$$b \backsim \frac{2amm+4amn-ann}{4mm+2nn}.$$

$$c \backsim \frac{4amn-2amm+ann}{4mm+2nn}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aan^4-4aamn^3+4aam^4+8aam^3n+4aammnn}{2n^4+8mmnn+8m^4}.$$

$$\frac{aan^4+4aamn^3+4aam^4-8aam^3n+4aammnn}{2n^4+8mmnn+8m^4}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 12.$$

Si l'on suppose

$$m \backsim 1.$$

$$n \backsim 2.$$

le quarré & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant: Mais si l'on suppose

$$m \backsim 1.$$

$$n \backsim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2664,\ 14760}{121}.$$

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{1764}{121}.$$

dont le côté est

$$\frac{42}{11}.$$

Ou bien égalez la Puissance $2aa-8zz$ au quarré $\frac{bbzz}{cc}$, & vous trouuerez $z \backsim \sqrt{\frac{2aacc}{bb+8cc}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $\frac{2aacc}{bb+8cc}$. Multipliez le Numerateur par le Denominateur, & diuisez le produit par le Nombre quarré $aacc$, pour auoir en entiers & en moindres termes cette autre Puissance à égaler au quarré $2bb+16cc$, pour le côté duquel prenant $4c+\frac{bd}{m}$, on trouuera en entiers,

$$b \backsim 8dm.$$

$$c \backsim 2mm-dd.$$

& par consequent

$$z \backsim \frac{2amm-add}{4mm+2dd}.$$

pour le côté du quarré qu'on cherche, & l'on trouuera une solution semblable à la precedente.

II.

Trouver deux nombres & un quarré, en sorte que la difference des deux nombres soit égale à un nombre donné, & que les sommes du quarré & de chacun de ces deux mêmes nombres, soient des nombres quarrez.

On propose de trouver deux nombres

$$x.$$

$$y.$$

& un quarré

$$zz.$$

en sorte que la difference $x - y$ des deux nombres soit égale au nombre donné $16 \backsim a$, & que si on ajoute le quarré zz à chacun des deux nombres x, y, les deux sommes

$$zz + lx.$$

$$zz + ly.$$

soient chacune un nombre quarré.

Canon. Le Quarré qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & si on l'ôte des quarrez de la somme & de la difference du nombre donné & d'un quarré indeterminé, divisée par le double du côté de ce second quarré; on aura les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$$x - y \backsim a.$$

& ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$zz + lx.$$

$$zz + ly.$$

Egalez la premiere $zz + lx$ au quarré bb, & la deuxième $zz + ly$ au quarré cc, par ces deux Equations,

$$zz + lx \backsim bb.$$

$$zz + ly \backsim cc.$$

dans lesquelles vous trouverez

$$lx \backsim bb - zz.$$

$$ly \backsim cc - zz.$$

& l'Equation constitutive $x - y \backsim a$, ou $lx - ly \backsim la$, se changera en celle-cy, $bb - cc \backsim la$, dans laquelle on trouvera $c \backsim \sqrt{bb - la}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $bb - la$, pour le côté duquel prenant $b \cdots d$, on trouvera $b \backsim \frac{dd + la}{2d}$. C'est pourquoy au lieu de $c \backsim \sqrt{bb - la}$, on aura $c \backsim \frac{dd \cdots la}{2d}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{d^4 + 2ladd + llaa}{4dd} - zz.$$

$$\frac{d^4 - 2ladd + llaa}{4dd} - zz.$$

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

zz;

Parceque Nous auons supposé

$a \backsim 16$.

Si l'on suppose

$d \backsim 8$.

$z \backsim 2$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

21.

5.

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

4.

dont le côté est

2.

Comme le quarré zz est indeterminé, on le peut supposer tel que l'on voudra: c'est pourquoy pour auoir vne solution plus simple, on mettra à sa place le quarré $\frac{1}{4}dd$, & alors les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{llaa+2ladd,\ llaa-2ladd}{4dd}.$$ Seconde Solution.

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

$\frac{1}{4}dd$.

Parceque Nous auons supposé

$a \backsim 16$

Si l'on suppose

$d \backsim 2$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

24.

8.

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

1.

dont le côté est

1.

On tire de cette seconde solution, le Canon suiuant;

Le Quarré qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & si on ajoute & on ôte la Moitié du Nombre donné du quarré du quotient qu'on aura en diuisant le quart du Nombre donné par le côté du premier quarré; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Si vous voulez vne solution encore plus simple, mettez le quarré

$\frac{llaa}{4dd}$, à la place du quarré indeterminé zz, & alors les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Troisieme Solution.

$$\frac{1}{4}dd + \frac{1}{2}la.$$

$$\frac{1}{4}dd - \frac{1}{2}la.$$

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{llaa}{4dd}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 16.$$

Si l'on suppose

$$d \sim 6.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$17.$$

$$1.$$

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{16}{9}.$$

dont le côté est

$$\frac{4}{3}.$$

On tire de cette troisieme Solution, le canon suivant;

Canon. Le Quarré qu'on cherche, est égal au quart du quotient qu'on a en divisant le quarré du Nombre donné par un quarré indeterminé: & si on ajoute & qu'on ôte la moitié du nombre donné du quart du quarré indeterminé, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

III.

Trouver deux nombres & un quarré, en sorte que la difference des deux Nombres soit égale à un Nombre donné, & que les excez du quarré sur châcun des deux mêmes Nombres, soient des Nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

& un quarré

$$zz.$$

en sorte que la difference $x-y$ des deux Nombres soit égale au Nombre donné $16 \sim a$, & que les excez

$$zz - lx.$$

$$zz - ly.$$

du quarré sur les Nombres soient des Nombres quarrez.

Le Quarré qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & si on ôte separément les quarez de la somme & de la difference du Nombre donné & d'un quarré indeterminé, divisée par le double du côté de ce second quarré; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$$x - y \backsim a.$$

& ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$zz - lx.$$

$$zz - ly.$$

Egalez la premiere $zz - lx$, au quarré bb, & la deuxieme $zz - ly$ au quarré cc, par ces deux Equations,

$$zz - lx \backsim bb.$$

$$zz - ly \backsim cc.$$

dans lesquelles on trouvera

$$lx \backsim zz - bb.$$

$$ly \backsim zz - cc.$$

& l'Equation constitutive $x - y \backsim a$, ou $lx - ly \backsim la$, se changera en celle-cy, $cc - bb \backsim la$, dans laquelle on trouvera $c \backsim \sqrt{bb + la}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $bb + la$, pour le côté duquel prenant $b - d$, on trouvera $b \backsim \frac{dd - la}{2d}$. c'est pourquoy au lieu de $c \backsim \sqrt{bb + la}$, on aura $c \backsim \frac{dd + la}{2d}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$zz - \frac{d^4 + 2ladd - llaa}{4dd}.$$

$$zz - \frac{d^4 - 2ladd - llaa}{4dd}.$$

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$zz.$$

Parceque Nous avons supposé

$$a \backsim 16.$$

si l'on suppose

$$d \backsim 2.$$

$$z \backsim 6.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

27.

11.

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

36.

dont le côté est

6.

IV.

Trouver deux Nombres & un Quarré, en sorte que la difference des deux nombres soit égale à un nombre donné, & que les excez de chacun des deux Nombres sur le quarré, soient des nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

& un Quarré

zz.

en sorte que la difference $x-y$ des deux Nombres soit égale au nombre donné 16 $\sim a$, & que les excez

$lx-zz$,

$ly-zz$.

de chaque Nombre sur le quarré, soient des nombres quarrez.

Canon. Le Quarré qu'on cherche, peut être tel que l'on voudra, & si on l'ajoute separément aux quarrez de la somme & de la difference du Nombre donné & d'un quarré indeterminé, divisée par le double du côté de ce second quarré; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$x-y \sim a$.

& ces deux Puissances à égaler au quarré,

$lx-zz$.

$ly-zz$.

Egalez la premiere $lx-zz$ au quarré bb, & la deuxieme $ly-zz$ au quarré cc, par ces deux Equations,

$lx-zz \sim bb$.

$ly-zz \sim cc$.

dans lesquelles on trouvera

$lx \sim zz+bb$.

$ly \sim zz+cc$.

& l'Equation constitutive $x-y \sim a$, ou $lx-ly \sim la$, se changera en celle-cy, $bb-cc \sim la$, dans laquelle on trouvera $c \sim \sqrt{bb-la}$. Ainsy nous aurons cette Puissance à égaler au quarré, $bb-la$, pour le côté duquel prenant $b \ldots d$, on trouvera $b \sim \frac{dd+la}{2d}$. c'est pourquoy au lieu de $c \sim \sqrt{bb-la}$, on aura $c \sim \frac{dd-la}{2d}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{d^4+2ladd+llaa}{4dd}+zz.$$
$$\frac{d^4-2ladd+llaa}{4dd}+zz.$$

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$zz.$$

Parceque nous auons supposé

$$aa \sim 16.$$

Si l'on suppose

$$z \sim 3.$$
$$d \sim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$34.$$
$$18.$$

& le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$9.$$

dont le côté est

$$3.$$

Question XVII.

Trouuer deux Nombres en raison donnée, en sorte que si à châcun on ajoute vn même Nombre quarré donné, les deux sommes soient des Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont le premier x, soit au second y, comme $1 \sim r$, à $3 \sim s$, en sorte que si à chacun on ajoute le quarré donné $9 \sim aa$, les deux sommes

$$aa+lx.$$
$$aa+ly.$$

soient des Nombres quarrez.

Si on diuise les Plan-plans sous le quarré donné, la somme des termes de la raison donnée, & chacun de ces deux mêmes termes, par la huitieme partie du quarré de la difference des deux mêmes termes; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura cette analogie,

$$x, y :: r, s.$$

& par consequent cette Equation,

$$sx \sim ry.$$

& ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$aa+lx.$$
$$aa+ly.$$

Dans l'Equation precedente, $sx \sim ry$, on aura $y \sim \frac{sx}{r}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$

$$\frac{sx}{r}.$$

ou

$$rx.$$

$$sx.$$

& l'on aura ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$aa + rx.$$

$$aa + sx.$$

Leur difference est $sx - rx$, dont les deux Nombres produisans sont

$$2a.$$

$$\frac{sx - rx}{2a}.$$

La moitié de leur somme est $a + \frac{sx - rx}{4a}$, dont le quarré étant égale à la plus grande Puissance $aa + sx$, on trouuera $x \sim \frac{8aar + 8aas}{rr - 2rs + ss}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{8aarr + 8aars,\ 8aass + 8aars}{rr - 2rs + ss}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \sim 3.$$

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$72.$$

$$216.$$

Pour auoir une Solution plus generale, prenez

$$b.$$

$$\frac{sx - rx}{b}.$$

pour les deux Nombres produisans de la difference $sx - rx$.

La moitié de leur somme est $\frac{1}{2}b + \frac{sx - rx}{2b}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $aa + sx$, on trouuera $x \sim \frac{bbr + bbs \mp \sqrt{4b^4rs + 4aabbss - 8aabbrs + 4aabbrr}}{rr - 2rs + ss}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $4b^4rs + 4aabbss - 8aabbrs + 4aabbrr$, pour le côté duquel prenant $2abs \cdots 2abr \ldots 2bbc$, on trouuera $b \sim \frac{2acs \text{ [illegible] } acr}{cc - rs}$, &c.

Parceque nous auons supposé

$$a \sim 3.$$

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 3.$$

Si

Si l'on suppose

$$c \backsim 2.$$

on trouuera

$$b \backsim 24.$$

$$x \backsim 72.$$

ou

$$x \backsim 1080.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

72.

216.

ou

1080.

3240.

Si Vous voulez Vne Solution encore plus generale, seruez-Vous de la Metode de Diophante, & égalez la premiere Puissance $aa+lx$ au quarré $aa+2az+zz$, pour auoir $lx \backsim zz+2az$, & l'Equation constitutiue $sx \backsim ry$, se changera en celle-cy, $szz+2asz \backsim lry$, dans laquelle on trouuera $ly \backsim \frac{szz+2asz}{r}$, & au lieu de la seconde Puissance $aa+ly$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $aa+\frac{szz+2asz}{r}$, pour le côté duquel prenant $a \cdots \frac{bz}{c}$, on trouuera $z \backsim \frac{2accs+2abcr}{bbr-ccs}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, *Metode de Diophante.*

$$\frac{4aabbccrr+4aabc^3rs+4aabbccrs+4aab^3crr}{b^4rr-2bbccrs+c^4ss}.$$

$$\frac{4aabbccrs+4aabc^3ss+4aabbccss+4aab^3crs}{b^4rr-2bbccrs+c^4ss}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 3.$$

$$r \backsim 1.$$

$$s \backsim 3.$$

Si l'on suppose

$$b \backsim 2.$$

$$c \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche seront de cette grandeur,

1080.

3240.

Si Vous voulez Vne analyse plus Naturelle & plus Scientifique, égalez la premiere Puissance $aa+lx$ au quarré bb, & la deuxieme $aa+ly$ au quarré cc, par ces deux Equations,

$$aa+lx \backsim bb.$$

$$aa+ly \backsim cc.$$

dans lesquelles on trouvera

$$lx \sim bb-aa.$$

$$ly \sim cc-aa.$$

& l'Equation constitutive $sx \sim ry$, se changera en celle-cy, $bbs-aas \sim ccr-aar$, dans laquelle on trouvera $b \sim \sqrt{aa+\frac{ccr-aar}{s}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $aa+\frac{ccr-aar}{s}$, comme au quarré aa, & alors on trouvera $c \sim a$: mais comme cette valeur ne se trouve pas propre, supposez

$$c \sim d+a.$$

& vous aurez cette autre Puissance $aa+\frac{ddr+2adr}{s}$, à égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $\frac{pd}{q}$, on trouvera $d \sim \frac{2apqs+2aqqr}{pps-qqr}$. C'est pourquoy au lieu de $c \sim d+a$, on aura $c \sim \frac{apps+2apqs+aqqr}{pps-qqr}$, & au lieu de $b \sim \sqrt{aa+\frac{ccr-aar}{s}}$, on aura $b \sim \frac{apps+2apqr+aqqr}{pps-qqr}$, &c.

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 3.$$

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 3.$$

Si l'on suppose

$$p \sim 1.$$

$$q \sim 2.$$

on trouvera

$$d \sim -60.$$

$$c \sim 57.$$

$$b \sim 33.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

1080.

3240.

Cette Question se peut resoudre encore tres facilement, en multipliant ensemble les deux dernieres Puissances,

$$aa+rx.$$

$$aa+sx.$$

& en égalant leur produit $a^4+aarx+aasx+rsxx$, au quarré, comme au quarré $a^4-2aabx+bbxx$, dont le côté est $aa-bx$, & alors on trouvera $x \sim \frac{aar+2aab+aas}{bb-rs}$, & l'on aura ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$\frac{aabb+2aabr+aarr}{bb-rs}.$$

$$\frac{aabb+2aabs+aass}{bb-rs}.$$

ce qui se fera en égalant seulement au quarré leur denominateur commun $bb-rs$, parceque les numerateurs ont leurs

Racines quarrées

$$ab+ar.$$

$$ab+as.$$

Ainsy nous avons cette Puissance à égaler au quarré, $bb-rs$, pour le côté duquel prenant $b \cdots c$, on trouvera $b \sim \frac{cc+rs}{2c}$, & au lieu de $x \sim \frac{aar+2aab+aas}{bb-rs}$, on aura $x \sim \frac{4aaccr+4aaccs+4aac^3+4aacrs}{c^4-2ccrs+rrss}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4aaccrr+4aaccrs+4aac^3r+4aacrrs}{c^4-2ccrs+rrss}.$$

$$\frac{4aaccss+4aaccrs+4aac^3s+4aacssr}{c^4-2ccrs+rrss}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 3.$$

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 3.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

72.

216.

Ou bien en multipliant la premiere Puissance $aa+rx$ par le quarré indeterminé bb, & la seconde $aa+sx$ par le quarré indeterminé cc, pour avoir ces deux produits,

$$aabb+bbrx.$$

$$aacc+ccsx.$$

que l'on égalera ensemble, par cette Equation, $aabb+bbrx \sim aacc+ccsx$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{aabb-aacc}{ccs-bbr}$, & l'on aura ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$\frac{aaccs-aaccs}{ccs-bbr}.$$

$$\frac{aabbs-aabbr}{ccs-bbr}.$$

Si l'on divise la premiere par le nombre quarré $aacc$, & la deuxieme par le nombre quarré $aabb$, on aura en leur place cette seule Puissance $\frac{s-r}{ccs-bbr}$, à égaler au quarré. Pour cette fin multipliez le Numerateur par le denominateur, pour avoir en entiers cette autre Puissance à égaler au quarré, $ccss-ccrs+bbrr-bbrs$. Supposez

$$c \sim z \cdots b.$$

& alors vous aurez cette autre & derniere Puissance à égaler au quarré, $sszz-rszz-2bssz+2brsz+bbss-2bbrs+bbrr$, pour le côté duquel prenant $bs-br-dz$, on trouvera en entiers,

$$b \sim dd+rs-ss.$$

$$z \sim 2ds-2dr+2rs-2ss.$$

C'est pourquoy au lieu de $c \sim z - b$, on aura $c \sim dd - 2ds + 2dr - rs + ss$, aprez quoy le reste est facile.

Parceque Nous avons supposé

$a \sim 3.$

$r \sim 1.$

$s \sim 3.$

Si l'on suppose

$d \sim 4.$

on trouvera

$b \sim 5.$

$c \sim 3.$

$z \sim 2.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

72.

216.

Il suffit de resoudre cette Question pour l'Vnité, qui est Vn Nombre quarré, car si on Multiplie les deux Nombres trouvez par le quarré donné, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Mais pour trouver deux Nombres pour l'Vnité, il faudra auparavant resoudre ce Probleme.

Trouver deux Nombres triangulaires, dont la raison soit égale à celle de deux Nombres donnez.

tels que sont icy les deux Nombres donnez

$1 \sim r.$

$3 \sim s.$

Si l'on apele x, l'Vn de ces deux Nombres, on aura, afinqu'il devienne triangulaire, cette Puissance à égaler au quarré, $8x+1$, pour le côté duquel prenant $1 - \frac{2cx}{b}$, ou bien $1 + \frac{2cx}{b}$, on trouvera $x \sim \frac{2bb-bc}{cc}$, ou $x \sim \frac{2bb+bc}{cc}$, qui seront deux Nombres triangulaires, ausquelles on donnera la raison donnée $\frac{r}{s}$, par cette analogie, $\frac{2bb-bc}{cc}, \frac{2bb+bc}{cc} :: r, s$, ou $2b-c, 2b+c :: r, s$, de laquelle on tire cette Equation, $2bs - cs \sim 2br + cr$, dans laquelle on trouvera

$b \sim r+s.$

$c \sim 2s - 2r.$

& les deux Nombres triangulaires qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{rr+rs,\ ss+rs}{rr-2rs+ss}.$$

Si on Multiplie chacun de ces deux Nombres par 8, on aura ces deux autres Nombres

$$\frac{8rr+8rs,\ 8ss+8rs}{rr-2rs+ss}.$$

dont chacun avec l'Vnité fait Vn Nombre quarré, par la Nature du Nombre triangulaire. c'est pourquoy si on les multiplie chacun par le quarré donné aa, on aura les deux nombres qu'on cherche, lesquels se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Cette Question se peut aussy resoudre par Vne Triple Égalité, comme Vous alez Voir dans la seconde des deux suiuantes, qui manquent icy, & ausquelles Nous en ajouterons six autres, dont les trois dernieres sont de Bachet.

1.

Trouuer deux Nombres en raison donnée, en sorte que si de chacun on ôte Vn même nombre quarré donné, il reste deux Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont le premier x, soit au second y, comme $4 \sim r$, à $5 \sim s$, en sorte que si de chacun on ôte le quarré donné $9 \sim aa$, les deux restes,

$$lx-aa.$$

$$ly-aa.$$

soient chacun Vn Nombre quarré.

Si par l'Vn des deux quarrez dont le produit sous les deux termes de la raison donnée doit être composé, on diuise le produit sous le quarré donné & la somme des deux termes & du double du côté de l'autre quarré, & que par le quotient on multiplie chacun des deux mêmes termes; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura cette analogie,

$$x, y :: r, s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$sx \sim ry.$$

& ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$lx-aa.$$

$$ly-aa.$$

Dans l'Equation precedente $sx \sim ry$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{sx}{r}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$

$$\frac{sx}{r}.$$

ou en entiers,

$rx.$

$sx.$

& l'on aura ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$rx-aa.$

$sx-aa.$

Leur produit $a^4-aarx-aasx+rsxx$ étant égale au quarré $a^4+2aacx+ccxx$, on trouuera $x \sim \frac{aar+2aac+aas}{rs-cc}$, & les deux Puissances precedentes se changeront en ces deux autres,

$\frac{aarr+2aacr+aacc}{rs-cc}.$

$\frac{aass+2aacs+aacc}{rs-cc}.$

dont les Numerateurs ayant leurs Racines quarrées

$ar+ac.$

$as+ac.$

il suffira d'égaler au quarré leur denominateur commun $rs-cc$, comme au quarré bb, & alors on trouuera $rs \sim bb+cc$, ce qui fait connoitre que rs, ou 20, doit être composé de deux quarrez, tels que sont icy les deux quarrez 4, 16, pour les quarrez bb, cc.

Si donc on suppose

$b \sim 4.$

$c \sim 2.$

on trouuera

$x \sim \frac{117}{16}.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{468,\ 585}{16}.$

Mais si l'on suppose

$b \sim 2.$

$c \sim 4.$

on trouuera

$x \sim \frac{153}{4}.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{612,\ 765}{4}.$

On peut donner aux deux côtez b, c, vne infinité d'autres Valeurs, parceque le produit rs, ou 20, étant composé des deux quarrez 4, 16, se peut diuiser infiniment en deux autres quarrez, pour les deux quarrez bb, cc, par Quest. X. Ce qui se pourra aussy faire par Quest. VIII. lorsque les deux termes de la raison donnée seront des Nombres plans semblables, parcequ'alors leur produit sera vn Nombre quarré. Voyez la 6.e de ces Questions ajoutées.

II.

Trouuer deux Nombres en raison donnée, en sorte que si on ôte châcun d'vn même Nombre quarré donné, il reste deux Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont le premier x, soit au second y, comme $2 \backsim r$; à $1 \backsim s$, ensorte que si on ôte chacun du quarré donné $9 \backsim aa$, les deux restes

$$aa-lx.$$

$$aa-ly.$$

soient chacun vn Nombre quarré.

Si on multiplie chacun des deux termes de la raison donnée par le produit sous les excez d'vn Nombre indeterminé sur chacun des deux mêmes termes & le quadruple du Solide sous le quarré donné & le Nombre indeterminé : & qu'on diuise chaque produit par le quarré de la difference entre le quarré indeterminé & le Plan des deux termes; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura cette analogie,

$$x, y :: r, s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$sx \backsim ry.$$

& ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$aa-lx.$$

$$aa-ly.$$

Dans l'Equation precedente $sx \backsim ry$, on trouuera $y \backsim \frac{sx}{r}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$x.$$

$$\frac{sx}{r}.$$

ou en entiers,

$$rx.$$

$$sx.$$

& l'on aura ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$aa-rx.$$

$$aa-sx.$$

Egalez la premiere $aa-rx$ quarré $aa-2ab+bb$, pour auoir $x \backsim \frac{2ab-bb}{r}$, & au lieu de la seconde $aa-sx$, on aura celle-cy à égaler au quarré $aa-\frac{2abs+bbs}{r}$, pour le côté duquel prenant $a-\frac{bc}{d}$,

on trouvera $b \sim \frac{2adds - 2acdr}{dds - ccr}$; c'est pourquoy au lieu de $x \sim \frac{2ab - bb}{r}$, on aura $x \sim \frac{4aacd^3s - 4aaccdds + 4aadc^3r - 4aaccddr}{d^4ss - 2ccddrs + c^4rr}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4aacd^3rs - 4aaccddrs + 4aadc^3rr - 4aaccddrr}{d^4rss - 2ccddrs + c^4rr}.$$

$$\frac{4aacd^3ss - 4aaccddss + 4aadc^3rs - 4aaccddrs}{d^4rss - 2ccddrs + c^4rr}.$$

Parceque Nous avons suppose

$$r \sim 2.$$

$$s \sim 1.$$

$$a \sim 3.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 1.$$

$$d \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{432, 216}{49}.$$

Ou bien égalez la premiere Puissance $aa - rx$, au quarré bb, & la deuxieme $aa - sx$, au quarré cc, par ces deux Equations,

$$aa - rx \sim bb.$$

$$aa - sx \sim cc.$$

Dans la premiere $aa - rx \sim bb$, on aura $x \sim \frac{aa - bb}{r}$, & dans la seconde $aa - sx \sim cc$, on trouvera le même $x \sim \frac{aa - cc}{s}$. c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{aa - bb}{r} \sim \frac{aa - cc}{s}$, dans laquelle on trouvera $c \sim \sqrt{aa - \frac{aas + bbs}{r}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $aa - \frac{aas + bbs}{r}$. Multipliez-la par le Nombre quarré rr, pour avoir en entiers cette autre Puissance à égaler au quarré, $aarr - aars + bbrs$, pour le côté duquel prenant ar, on trouvera $b \sim a$: & comme comme cette valeur n'est pas propre, parceque a doit être plus grand que b, à cause de $x \sim \frac{aa - bb}{r}$. Supposez

$$b \sim z \cdots a.$$

& alors Vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $aarr + rszz - 2arsz$, pour le côté duquel prenant $ar \cdots dz$, on trouvera $z \sim \frac{2adr - 2ars}{dd - rs}$. c'est pourquoy au lieu de $b \sim z \cdots a$, on aura $b \sim \frac{2adr \cdots ars \cdots add}{dd - rs}$, & au lieu de $x \sim \frac{aa - bb}{r}$, on aura $x \sim \frac{4aad^3 + 4aadrs - 4aaddr - 4aadds}{d^4 - 2ddrs + rrss}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4aad^3r + 4aadrrs - 4aaddrr - 4aaddrs}{d^4 - 2ddrs + rrss}.$$

$$\frac{4aad^3s + 4aaddrs - 4aaddrs - 4aaddss}{d^4 - 2ddrs + rrss}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 2.$$

$s \sim 1.$

$a \sim 3.$

Si l'on suppose

$c \sim 3.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{432, 216}{49}.$

comme auparauant.

On peut resoudre encore autrement la double Egalité precedente

$aa - rx.$

$a - sx.$

ou

$9 - 2x.$

$9 - 1x.$

sauoir en ajoutant cette troisieme Puissance $9 + 3x$, en sorte qu'on ayt ces trois Puissances à égaler au quarré,

$9 - 2x.$

$9 - 1x.$

$9 + 3x.$

que l'on multipliera ensemble ensemble, pour auoir leur produit solide $729 - 63xx + 6x^3$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $27 - \frac{7xx}{6}$, on trouuera $x \sim \frac{216}{49}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront de cette grandeur,

$\frac{432, 216}{49}.$

comme auparauant.

III.

Trouuer deux Nombres quarrez, tels que si de châcun on ôte vn même Nombre quarré donné, les deux restes soient en raison donnée.

On propose de trouuer deux Nombres quarrez

$xx.$

$yy.$

en sorte que si de chacun on ôte le Nombre quarré donné $1 G \sim aa$, le premier reste $xx - aa$, soit au second $yy - aa$, comme $1 \sim r$, à $2 \sim s$.

Si on multiplie separément les doubles de chacun des deux termes de la raison donnée par le Plan sous le côté du quarré donné & le côté d'vn autre quarré indeterminé, & qu'à chaque solide on ajoute le solide sous le côté du quarré donné & la somme du quarré indeterminé & du Plan sous les deux termes, Canon.

& qu'on diuise chaque somme par la difference entre le quarré indeterminé & le Plan des deux termes; on aura les deux quarrez qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$xx-aa,\ yy-aa :: r,\ s.$$

de laquelle on tire cette Equation constitutiue,

$$sxx-aas \sim ryy-aar.$$

dans laquelle on trouuera $y \sim \sqrt{aa-\frac{aas+sxx}{r}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $aa-\frac{aas+sxx}{r}$. Multipliez-la par le Nombre quarré rr, pour auoir en entiers cette autre Puissance à égaler au quarré, $aarr-aars+rsxx$. Supposez

$$x \sim z+a.$$

& alors vous aurez cette autre & derniere Puissance à égaler au quarré, $aarr+2arsz+rszz$; pour le côté duquel prenant $ar \ldots bz$; on trouuera $z \sim \frac{2abr+2ars}{bb-rs}$, & par consequent

$$x \sim \frac{abb+2abr+ars}{bb-rs}.$$

$$y \sim \frac{abb+2abs+ars}{bb-rs}.$$

pour les côtez des deux quarrez qu'on cherche, lesquels par consequent seront tels,

$$\frac{4aabrrs+aab^4+4aab^3r+4aabbrr+2aabbrs+aarrss}{b^4-2bbrs+rrss}.$$

$$\frac{aab^4+4aab^3s+4aabbss+2aabbrs+4aabrss+aarrss}{b^4-2bbrs+rrss}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \sim 4.$$

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 2.$$

Si l'on suppose

$$b \sim 2.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

400.

784.

dont les côtez sont tels,

20.

28.

Si vous voulez vne seconde solution, supposez

$$x \sim z-a.$$

$$y \sim z-a.$$

& alors l'Equation constitutiue, $sxx-aas \sim ryy-aar$, se changera

en celle-cy, $szz - 2asz = rzz + 2arz$, dans laquelle on trouuera $z = \frac{2ar+2as}{s-r}$. c'est pourquoy au lieu de

$$x = z - a.$$
$$y = z + a.$$

on aura

$$x = \frac{3ar+as}{s-r}.$$
$$y = \frac{3as+ar}{s-r}.$$

pour les côtez des deux quarrez qu'on cherche, lesquels par consequent seront tels, *Seconde Solution.*

$$\frac{9aarr+6aars+aass}{ss-2rs+rr}.$$
$$\frac{9aass+6aars+aarr}{ss-2rs+rr}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a = 4.$$
$$r = 1.$$
$$s = 2.$$

les deux quarrez qu'on cherche, se trouueront de cette grandeur,

$$400.$$
$$784.$$

dont les côtez sont tels,

$$20.$$
$$28.$$

comme auparauant.

On tire de cette seconde solution, le Canon suiuant.

Si on diuise la somme des deux Plans sous le côté du quarré donné & la somme de l'Vn des deux termes de la raison donnée & du triple de l'autre, par la difference des mêmes termes; on aura les côtez des deux quarrez qu'on cherche. *Canon.*

Pour auoir Vne solution plus generale, supposez

$$x = \frac{bz}{c} - a.$$
$$y = \frac{dz}{m} + a.$$

& alors l'Equation constitutiue $sxx - aas = ryy - aar$, se changera en celle-cy, $\frac{bbszz}{cc} - \frac{2absz}{c} = \frac{ddrzz}{mm} + \frac{2adrz}{m}$, dans laquelle on trouuera $z = \frac{2acdmr+2abcmms}{bbmms-ccddr}$, & l'on trouuera

$$x = \frac{2abcdmr+abbmms+accddr}{bbmms-ccddr}.$$
$$y = \frac{2abcdms+accddr+abbmms}{bbmms-ccddr}.$$

pour les côtez des deux quarrez qu'on cherche.

Parceque Nous auons supposé

a ∾ 4.

r ∾ 1.

s ∾ 2.

Si l'on suppose

b ∾ 3.

c ∾ 1.

d ∾ 2.

m ∾ 1.

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{4624, 8464}{49}$.

dont les côtez sont tels,

$\frac{68, 92}{7}$.

IV.

Trouuer deux Nombres quarrez, dont chacun étant ôté d'Un même Nombre quarré donné, la raison des deux restes soit donnée.

On propose de trouuer deux Nombres quarrez

xx.

yy.

dont chacun étant ôté du quarré donné

16 ∾ aa.

la raison des deux restes,

aa − xx.

aa − yy.

soit égale à celle des deux Nombres donnez

1 ∾ r.

2 ∾ s.

Canon. Si on multiplie l'Un des deux termes de la raison donnée par Un quarré indeterminé, & l'autre terme par Un autre quarré indeterminé, & que de la somme des deux produits on ôte separément le double du produit solide sous chacun des deux termes & le Plan des deux côtez des deux quarrés indeterminés, & qu'on Multiplie chaque reste par le quotient qui Viendra en diuisant le côté du quarré donné par la difference des deux produits precedens; on aura les côtez des deux quarrez qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$aa - xx,\ aa - yy :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$aas - sxx \backsim aar - ryy.$$

dans laquelle on trouuera $y \backsim \sqrt{aa + \frac{sxx - aas}{r}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $aa + \frac{sxx - aas}{r}$. Supposez

$$x \backsim z \cdots a.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $aa + \frac{szz - 2asz}{r}$, pour le côté duquel prenant $a \cdots \frac{bz}{c}$, on trouuera $z \backsim \frac{2accs - 2abcr}{ccs - bbr}$, & les côtez des deux quarez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abbr - 2abcr + accs,\ abbr - 2abbcs + accs}{ccs - bbr}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \backsim 4.$$

$$r \backsim 1.$$

$$s \backsim 2.$$

Si l'on suppose

$$b \backsim 1.$$

$$c \backsim 2.$$

les deux quarez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{400,\ 16}{49}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{20,\ 4}{7}.$$

Ou bien supposez

$$x \backsim z \cdots a.$$

$$y \backsim \omega \cdots a.$$

& l'Equation constitutiue $aas - sxx \backsim aar - ryy$, se changera en celle-cy, $2asz - szz \backsim 2ar\omega - r\omega\omega$, dans laquelle on trouuera $\omega \backsim a + \sqrt{aa - \frac{2asz + szz}{r}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $aa - \frac{2asz + szz}{r}$, pour le côté duquel prenant $a \cdots \frac{bz}{c}$, on trouuera $z \backsim \frac{2accs - 2abcr}{ccs - bbr}$, & l'on aura vne solution semblable à la precedente.

Si vous voulez vne solution plus generale, supposez

$$x \backsim \frac{bz}{c} - a.$$

$$y \backsim \frac{dz}{m} - a.$$

& l'Equation constitutiue $aas - sxx \backsim aar - ryy$, se changera en celle-cy, $\frac{bbszz}{cc} - \frac{2abz}{c} \backsim \frac{ddrzz}{mm} - \frac{2adrz}{m}$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{2abcmms - 2accdmr}{bbmms - ccddr}$, & les côtez des deux quarez qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{abbmms - 2abcdmr + accddr,\ abbmms - 2abcdms + accddr}{bbmms - ccddr}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \sim 4.$$
$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$

Si l'on suppose

$$b \sim 1.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 1.$$
$$m \sim 3.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{784,\ 2704}{289}.$$

dont les côtez sont tels, $\frac{28,\ 52}{17}.$

V.

Trouuer deux nombres quarrez dont chacun étant ajouté à un même quarré donné, la raison des deux sommes soit égale à celle de deux quarrez donnez.

On propose de trouuer deux nombres quarrez

$$xx.$$
$$yy.$$

dont chacun étant ajouté au quarré donné

$$16 \sim aa.$$

les deux sommes

$$aa + xx.$$
$$aa + yy.$$

soient dans la raison des deux quarrez donnez

$$1 \sim rr.$$
$$4 \sim ss.$$

Canon. Si par le côté du quarré donné on multiplie l'excez de la somme d'un quarré indeterminé & du premier terme de la raison donnée sur le second, & l'excez de la somme du même quarré indeterminé & du second terme sur le premier, & qu'on diuise le premier produit par le double du plan sous le côté du quarré indeterminé & le côté du second terme, & le second produit par le double du plan sous le côté du même quarré indeterminé & le côté du premier terme; on aura les côtez des deux quarrez qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$aa+xx,\ aa+yy :: rr,\ ss.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$aass+ssxx \sim aarr+rryy.$$

dans laquelle on trouvera $ry \sim \sqrt{ssxx-aarr+aass}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $ssxx-aarr+aass$, pour le côté duquel prenant $sx-ab$, on trouvera $x \sim \frac{abb+arr+ass}{2bs}$, & les côtez des deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abb+arr-ass}{2bs}.$$
$$\frac{abb-arr+ass}{2br}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 4.$$
$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$

Si l'on suppose

$$b \sim 2.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\tfrac{1}{4}.$$
$$49.$$

dont les côtez sont tels,

$$\tfrac{1}{2}.$$
$$7.$$

Si vous voulez une solution plus simple, égalez la Puissance precedente $ssxx-aarr+aass$, au quarré $aass$, pour avoir $x \sim \frac{ar}{s}$, & les côtez des deux quarrez qu'on cherche, seront tels, Seconde Solution.

$$\frac{ar}{s}.$$
$$\frac{as}{r}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 4.$$
$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$4.$$
$$64.$$

dont les côtez sont

$$2$$
$$8.$$

On tire de cette solution, le canon suivant;

Si on divise châcun des deux termes de la raison donnée par l'autre, & qu'on multiplie chaque quotient par le côté du quarré donné, on aura les côtez des deux quarrez qu'on cherche. Canon.

VI.

Trouver deux Nombres dans la raison de deux quarrez donnez, en sorte que si de chacun on ôte un même Nombre donné, il reste deux nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

dont la raison soit égale à celle des deux quarrez donnez

$1 \sim rr$.

$4 \sim ss$.

en sorte que si de chacun on ôte le Nombre donné

$5 \sim a$.

les deux restes

$x - a$.

$y - a$.

soient chacun un nombre quarré.

Canon. Si on divise la difference du produit sous le premier terme de la raison donnée & la somme du nombre donné & d'un quarré indeterminé, & du produit sous le nombre donné & le second terme, par le double du produit sous le côté du quarré indeterminé & les côtez des deux termes, & qu'au quarré du quotient on ajoute le nombre donné; on aura le premier des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant multiplié par le second terme, & le produit étant divisé par le premier, on aura le second.

Selon les conditions de la Question, on aura cette analogie,

$x, y :: rr, ss$.

& par consequent cette Equation constitutive.

$ssx \sim rry$.

& ces deux Puissances à égaler au quarré,

$lx - la$.

$ly - la$.

Egalez la premiere $lx - la$ au quarré bb, pour avoir $lx \sim bb + la$, & l'Equation constitutive $ssx \sim ryy$, se changera en celle-cy, $bbss + lass \sim lrry$, dans laquelle on trouvera $ly \sim \frac{bbss + lass}{rr}$, & au lieu de la seconde Puissance $ly - la$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $\frac{bbss + lass}{rr} - la$, pour le côté duquel prenant $\frac{bs}{r} \cdots c$, on trouvera $b \sim \frac{ccrr + larr - lass}{2crs}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^4r^4 - 2llaarrss + 2laccrrss + 2laccr^4 + llaar^4 + llaas^4}{4ccrrss}.$$

$$\frac{c^4r^4 - 2llaarrss + 2laccrrss + 2laccr^4 + llaar^4 + llaas^4}{4ccr^4}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \backsim 1.$$

$$s \backsim 2.$$

$$a \backsim 5.$$

Si l'on suppose

$$c \backsim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{21}{4}.$$

$$21.$$

Ou bien égalez la premiere Puissance $lx - la$ au quarré bb, & la seconde $ly - la$ au quarré cc, par ces deux Equations,

$$lx - la \backsim bb.$$

$$ly - la \backsim cc.$$

dans lesquelles vous trouuerez

$$lx \backsim bb + la.$$

$$ly \backsim cc + la.$$

& l'Equation constitutiue $ssx \backsim rry$, se changera en celle-cy, $bbss + lass \backsim ccrr + larr$, dans laquelle on trouuera $cr \backsim \sqrt{bbss + lass - larr}$, Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $bbss + lass - larr$, pour le côté duquel prenant $bs - dd$, on trouuera $b \backsim \frac{add + lrr - lss}{2ds}$, & par consequent $c \backsim \frac{add - lrr + lss}{2dr}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aad^4 + 2laddrr + llr^4 + 2laddss - 2llrrss + lls^4}{4ddss}.$$ Seconde Solution.

$$\frac{aad^4 + 2laddrr + llr^4 + 2laddss - 2llrrss + lls^4}{4ddrr}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \backsim 1.$$

$$s \backsim 2.$$

$$a \backsim 5.$$

Si l'on suppose

$$d \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{21}{4}.$$

$$21.$$

comme auparauant: Mais si l'on suppose

$$d \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{609}{64}.$$

$$\frac{609}{16}.$$

On tire de cette seconde solution le canon suiuant;

Canon. Si par le double du Plan sous le côté du second terme de la raison donnée & Un nombre indeterminé, on diuise la Difference entre la somme du Solide sous le Nombre donné & le quarré indeterminé & du premier terme, & le second terme, & par le double du Plan sous le côté du premier terme & le même Nombre indeterminé, la difference entre la somme du Solide sous le nombre donné & le quarré indeterminé & du second terme, & le premier terme, & qu'au quarré de chaque quotient on ajoute le nombre donné; on aura les deux nombres qu'on cherche.

Si Vous voulez Une solution plus generale, supposez

$$llx \sim rrz.$$

$$lly \sim ssz.$$

afinque les deux nombres qu'on cherche, soient dans la raison donnée $\frac{rr}{ss}$, & alors on aura ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$lrrz - l^3a.$$

$$lssz - l^3a.$$

Egalez la premiere $lrrz - l^3a$ au quarré $bbcc$, & la seconde $lssz - l^3a$ au quarré $ddmm$, par ces deux Equations,

$$lrrz - l^3a \sim bbcc.$$

$$lssz - l^3a \sim ddmm.$$

Dans la premiere $lrrz - l^3a \sim bbcc$, on trouuera $lz \sim \frac{bbcc + l^3a}{rr}$, & dans la seconde $lssz - l^3a \sim ddmm$, on trouuera le même $lz \sim \frac{ddmm + l^3a}{ss}$. c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{bbcc + l^3a}{rr} \sim \frac{ddmm + l^3a}{ss}$, dans laquelle on trouuera $\frac{dmr}{s} \sim \sqrt{bbcc + l^3a - \frac{l^3arr}{ss}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $bbcc + l^3a - \frac{l^3arr}{ss}$, pour le côté duquel prenant $bc - pq$, on trouuera $bc \sim \frac{ppqqss + l^3arr - l^3ass}{2pqss}$, & par consequent $dm \sim \frac{ppqqss - l^3arr + l^3ass}{2pqrs}$. c'est pourquoy au lieu de $lz \sim \frac{bbcc + l^3a}{rr}$, ou de $lz \sim \frac{ddmm + l^3a}{ss}$, on trouuera $lz \sim \frac{p^4q^4s^4 + 2l^3appqqrrss + l^6aar^4 + 2l^3appqqs^4 - 2l^6aarrss + l^6aas^4}{4ppqqs^4}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{p^4q^4s^4 + 2l^3appqqrrss + l^6aar^4 + 2l^3appqqs^4 - 2l^6aarrss + l^6aas^4}{4ppqqs^4}.$$

$$\frac{p^4q^4s^4 + 2l^3appqqrrss + l^6aar^4 + 2l^3appqqs^4 - 2l^6aarrss + l^6aas^4}{4ppqqrrss}.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 2.$$

$$a \sim 5.$$

Si l'on suppose

p ∾ 1.

q ∾ 1.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{441}{64}$.

$\frac{441}{16}$.

VII.

Trouuer deux Nombres dans la raison de deux quarrez donnez, en sorte que si on ôte chacun d'vn même Nombre donné, il reste deux Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres

x.

y.

dont la raison soit égale à celle des deux quarrez donnez

1 ∾ rr.

4 ∾ ss.

en sorte que si on ôte chacun du Nombre donné

20 ∾ a.

les deux restes

$a-x$.

$a-y$.

soient chacun vn Nombre quarré.

Si on diuise la somme du produit sous le Nombre donné & le second terme de la raison donnée, & du produit sous le premier terme & la difference d'vn quarré indeterminé & du nombre donné, par le double du produit sous le côté du quarré indeterminé & les côtez des deux termes, & que du Nombre donné on ôte le quarré du quotient, on aura le premier des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant multiplié par le second terme, & le produit étant diuisé par le premier, on aura l'autre Nombre qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura cette analogie,

$x, y :: rr, ss$.

& par consequent cette Equation constitutiue,

ssx ∾ rry.

& ces deux Puissances à égaler au quarré,

$la-lx$.

$la-ly$.

Egaler la premiere $la-lx$ au quarré bb, pour auoir lx ∾ $la-bb$,

& l'Equation constitutiue $ssx \sim rry$, se changera en celle-cy, $lass - bbss \sim lrry$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{lass-bbss}{rr}$, & au lieu de la seconde Puissance $la - ly$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $la - \frac{lass+bbss}{rr}$, pour le côté duquel prenant $\frac{br}{s} - c$, on trouuera $b \sim \frac{ccrr - larr + lass}{2crs}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2laccrrss + 2laccr^4 + 2llaarrss - c^4r^4 - llaar^4 - llaas^4}{4ccrrss}.$$

$$\frac{2laccrrss + 2laccr^4 + 2llaarrss - c^4r^4 - llaar^4 - llaas^4}{4ccr^4}.$$

Parceque nous auons supposé

$r \sim 1.$

$s \sim 2.$

$a \sim 20.$

Si l'on suppose

$c \sim 6.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

16.

VIII.

Trouuer deux Nombres dans la raison de deux quarrez donnez; en sorte que si on ajoute chacun à vn même Nombre donné, les deux sommes soient des Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la raison soit égale à celle des deux quarrez donnez

$1 \sim rr.$

$4 \sim ss.$

en sorte que si à chacun on ajoute le nombre donné

$10 \sim a.$

les deux sommes

$x + a.$

$y + a.$

soient chacune vn nombre quarré.

Canon. Si on diuise la somme du produit sous le premier terme de la raison donnée & vn quarré indeterminé, & du produit sous le Nombre donné & la difference des deux termes, par le double du produit sous le côté du quarré indeterminé & les

côtez des deux termes, & que du quarré du quotient on ôte le Nombre donné, on aura le premier des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant multiplié par le second terme, & le produit étant divisé par le premier terme, le quotient donnera l'autre Nombre qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura cette analogie,

$$x, y :: rr, ss.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$ssx \sim rry.$$

& ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$lx + la.$$

$$ly + la.$$

Egalez la premiere $lx + la$, au quarré bb, pour avoir $lx \sim bb - la$, & l'Equation constitutive $ssx \sim rry$, se changera en celle-cy, $bbss - lass \sim lrry$, dans laquelle on trouvera $ly \sim \frac{bbss - lass}{rr}$, & au lieu de la seconde Puissance $ly + la$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $\frac{bbss - lass}{rr} + la$, pour le côté duquel prenant $\frac{bs}{r} - c$, on trouvera $b \sim \frac{ccrr - larr + lass}{2crs}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^4r^4 - 2laccrrss - 2laccr^4 - 2llaarrss + llaar^4 + llaas^4}{4ccrrss}.$$

$$\frac{c^4r^4 - 2laccrrss - 2laccr^4 - 2llaarrss + llaar^4 + llaas^4}{4ccr^4}.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 2.$$

$$a \sim 10.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 10.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{9}{16}.$$

$$\frac{9}{4}.$$

qui sont icy des Nombres quarrez, dont les côtez sont tels,

$$\frac{3}{4}.$$

$$\frac{3}{2}.$$

Mais si l'on suppose

$$c \sim 12.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{201}{64}.$$

$$\frac{201}{16}.$$

Question XVIII.

Trouver trois Nombres, tels que si de chacun on ôte sa partie donnée & encore son Nombre donné, & qu'au reste on ajoute la partie donnée du Nombre qui precede, & encore son Nombre donné, les deux sommes soient égales entre elles.

On propose de trouver trois Nombres

x.

y.

z.

en sorte que si du premier x, on ôte sa partie donnée $\frac{1}{5}x \sim \frac{rx}{s}$, & encore son Nombre donné $6 \sim a$, & qu'au reste $x - \frac{rx}{s} - a$, on ajoute la partie donnée $\frac{1}{7}z \sim \frac{mz}{n}$, du troisieme z, & encore son Nombre donné $8 \sim p$: & que si du second y, on ôte sa partie donnée $\frac{1}{6}y \sim \frac{cy}{d}$, & encore son Nombre donné $7 \sim b$, & qu'au reste $y - \frac{cy}{d} - b$, on ajoute la partie donnée $\frac{rx}{s}$ du premier x, & encore son Nombre donné a: & enfin que si du troisieme z, on ôte sa partie donnée $\frac{mz}{n}$, & encore son Nombre donné p, & qu'au reste $z - \frac{mz}{n} - p$, on ajoute la partie donnée $\frac{cy}{d}$ du second y, & encore son Nombre donné p, les trois sommes

$$x - \frac{rx}{s} - a + \frac{mz}{n} + p.$$
$$y - \frac{cy}{d} - b + \frac{rx}{s} + a.$$
$$z - \frac{mz}{n} - p + \frac{cy}{d} + b.$$

soient égales entre elles.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Equations,

$$x - \frac{rx}{s} - a + \frac{mz}{n} + p \sim y - \frac{cy}{d} - b + \frac{rx}{s} + a.$$
$$x - \frac{rx}{s} - a + \frac{mz}{n} + p \sim z - \frac{mz}{n} - p + \frac{cy}{d} + b.$$

Dans la premiere $x - \frac{rx}{s} - a + \frac{mz}{n} + p \sim y - \frac{cy}{d} - b + \frac{rx}{s} + a$, on trouvera $x \sim \frac{dnsy - cnsy - bdns + 2adns - dmsz - dnps}{dns - 2dnr}$, & au lieu de la seconde $x - \frac{rx}{s} - a + \frac{mz}{n} + p \sim z - \frac{mz}{n} - p + \frac{cy}{d} + b$, on aura celle-cy, $z - \frac{mz}{n} - p + \frac{cy}{d} + b \sim \frac{dnsy - dnry - bdns + adns - cnsy + cnry + bdnr - dnpr - dmrz}{dns - 2dnr}$, dans laquelle on trouvera

$$y \sim \frac{dnsz - 2dnrz - dmsz + 3dmrz - dnps + 3dnpr + 2bdns - 3bdnr - adns}{dns - dnr - 2cns + 3cnr}.$$

& alors on trouvera

$$x \sim \frac{dnsz - 2dmsz - cnsz + 3cmsz - 2dnps + bdns + 3cnps + adns - 3acns}{dns - dnr - 2cns + 3cnr}.$$

& la Question sera resolue.

Parceque Nous avons supposé

$r \sim 1$.

$s \sim 5$.

$a \sim 6.$

$m \sim 1.$

$n \sim 7.$

$p \sim 8.$

$c \sim 1.$

$d \sim 6.$

$b \sim 7.$

Si l'on suppose

$z \sim 15.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{90}{7}.$

$\frac{108}{7}.$

$15.$

Question XIX.

Trouuer trois Nombres de la qualité des trois de la Question precedente, en sorte que leur somme soit égale à Vn Nombre donné.

Si l'on donné $80 \sim q$, pour la somme des trois Nombres qu'on cherche, en égalant la somme des trois nombres precedens au Nombre donné q, on trouuera

$$z \sim \frac{dnqs - dnqr - 2cnqs + 3cnqr + 3dnps - 3dnpr - 3cnps + 3bdnr - 3bdns + 3acns}{3dns - 3dnr - 3dms + 3dmr + 3cms + 3cnr - 3cns}.$$

aprez quoy il ne sera pas difficile de trouuer les deux autres nombres.

Parceque Nous auons supposé

$r \sim 1.$

$s \sim 5.$

$a \sim 6.$

$m \sim 1.$

$n \sim 7.$

$p \sim 8.$

$c \sim 1.$

$d \sim 6.$

$b \sim 7.$

$q \sim 80.$

les trois nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{9440,\ 9786,\ 9814}{363}.$

Question XX.

Trouuer trois Nombres quarrez, tels que l'excez du plus grand sur le Moyen soit à l'excez du Moyen sur le plus petit, en raison donnée.

On propose de trouuer trois Nombres quarrez

$$xx.$$
$$yy.$$
$$zz.$$

en sorte que l'excez $xx-yy$ du plus grand xx, sur le moyen yy, soit à l'excez $yy-zz$ du moyen yy sur le plus petit zz, comme $3 \sim r$, à $1 \sim s$.

Canon. Le premier terme de la raison donnée, la somme du premier & du quadruple du second, & la somme du triple du premier & du même quadruple du second, sont les côtez des trois quarrez qu'on cherche.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$xx-yy,\ yy-zz :: r, s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$sxx-syy \sim ryy-rzz.$$

dans laquelle on trouuera $x \sim \sqrt{yy+\frac{ryy-rzz}{s}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $yy+\frac{ryy-rzz}{s}$. Multipliez la par le Nombre quarré ss, pour auoir en entiers cette autre Puissance à égaler au quarré, $ssyy+rsyy-rszz$. Supposez

$$y \sim \omega - z.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $ss\omega\omega+rs\omega\omega-2rsz\omega-2ssz\omega+sszz$, pour le côté duquel prenant $sz+s\omega$, on trouuera en entiers,

$$z \sim r.$$
$$\omega \sim 2r+4s.$$

& par consequent

$$y \sim r+4s.$$
$$x \sim 3r+4s.$$

& les trois quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$9rr+24rs+16ss.$$
$$rr+8rs+16ss.$$
$$rr.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 3.$$
$$s \sim 1.$$

Les

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur;

169.

49.

9.

dont les côtez sont tels,

13.

7.

3.

Pour auoir vne solution plus generale, au lieu de prendre $sz+s\omega$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance precedente $ss\omega\omega+rs\omega\omega-2rsz\omega-2ssz\omega+sszz$, prenez $sz+a\omega$ & alors vous trouuerez en entiers,

$$z \backsim ss+rs-aa.$$

$$\omega \backsim 2as+2rs+2ss.$$

& les côtez des trois quarrez qu'on cherche, seront tels, *Seconde Solution.*

$$aa+2as+ss+2ar+rs.$$

$$aa+2as+ss+rs.$$

$$ss+rs-aa.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \backsim 3.$$

$$s \backsim 1.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur;

169.

49.

9.

comme auparauant: Mais si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur;

1369.

361.

25.

dont les côtez sont tels,

37.

19.

5.

Si vous voulez vne solution encore plus generale que la precedente, mettez

$$x+y.$$
$$x-y.$$
$$x-\frac{ay}{b}.$$

pour les côtez des trois quarrez qu'on cherche, lesquels par consequent seront tels,

$$xx+2xy+yy.$$
$$xx-2xy+yy.$$
$$xx-\frac{2axy}{b}+\frac{aayy}{bb}.$$

où l'on doit conceuoir $a \Theta b$, afinque le troisieme quarré soit le plus petit, & alors selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$4xy,\ yy-\frac{aayy}{bb}+\frac{2axy}{b}-2xy :: r, s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$4sxy \sim ryy-\frac{aaryy}{bb}+\frac{2arxy}{b}-2rxy.$$

dans laquelle on trouuera en entiers,

$$x \sim bbr-aar.$$
$$y \sim 4bbs+2bbr-2abr.$$

& les côtez des trois quarrez qu'on cherche, seront tels,

Troisieme Solution.

$$4bbs+3bbr-2abr-aar.$$
$$4bbs+bbr-2abr+aar.$$
$$4abs+2abr-bbr-aar.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 3.$$
$$s \sim 1.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 2.$$

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

1369.

361.

25.

comme auparauant: Mais si l'on suppose

$$a \sim 3.$$
$$b \sim 4.$$

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

11881.

4489.

2025.

dont les côtez sont tels,

$$109.$$
$$67.$$
$$45.$$

Pour resoudre cette Question par la Metode de Diophante, mettez *Metode de Diophante.*

$$x.$$
$$z+a.$$
$$z.$$

pour les côtez des trois quarez qu'on cherche, lesquels par consequent seront tels,

$$xx.$$
$$zz+2az+aa.$$
$$zz.$$

& selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$xx-zz-2az-aa,\ 2az+aa::r,s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$sxx-szz-2asz-aas \backsim 2arz+aar.$$

dans laquelle on trouuera $x \backsim \sqrt{zz+2az+\frac{2arz}{s}+aa+\frac{aar}{s}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $zz+2az+\frac{2arz}{s}+aa+\frac{aar}{s}$, pour le côté duquel prenant $z+b$, comme Diophante, on trouuera $z \backsim \frac{bbs-aar-aas}{2ar+2as-2bs}$, & les côtez des trois quarez qu'on cherche, seront en entiers de cette grandeur, *Quatrieme Solution.*

$$2abr+2abs-aar-aas-bbs.$$
$$aar+aas-2abs+bbs.$$
$$aar+aas-bbs.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \backsim 3.$$
$$s \backsim 1.$$

si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 2.$$

comme Diophante, les trois quarez qu'on cherche, seront tels,

$$121.$$
$$49.$$
$$25.$$

dont les côtez sont tels,

$$11.$$
$$7.$$
$$5.$$

Toutes ces Solutions differentes soufrent des determinations, qu'il ne sera pas difficile de trouuer à l'imitation de plusieurs qui ont été faites auparauant: Mais si vous en voulez une sans aucune determination, au lieu de prendre comme Diophante, $z+b$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance $zz+2az+\frac{2arz}{s}+aa+\frac{aar}{s}$, prenez $z \ldots b$, & alors vous trouuerez $z \propto \frac{bbs-aar-aas}{2ar+2as+2bs}$, & les côtez des trois quarrez qu'on cherche, seront en entiers de cette grandeur,

Cinquieme Solution.

$aar+aas+2abr+2abs+bbs.$

$aar+aas+2abs+bbs.$

$aar+aas \ldots bbs.$

Parceque nous auons supposé

$r \propto 3.$

$s \propto 1.$

Si l'on suppose

$a \propto 1.$

$b \propto 1.$

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

169.

49.

9.

comme dans la premiere Solution: Mais si l'on suppose

$a \propto 2.$

$b \propto 3.$

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

5329.

1369.

49.

dont les côtez sont tels,

73.

37.

7.

& si l'on suppose

$a \propto 3.$

$b \propto 2.$

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

484.

169.

64.

dont les côtez sont tels,

22.

13.

8.

On tire de cette cinquieme solution, le Canon suiuant;

Si au Solide sous le second terme de la raison donnée & le quarré de la somme de deux Nombres indeterminez on ajoute le solide sous le premier terme & le quarré du premier Nombre indeterminé, on aura le côté du quarré Moyen des trois que l'on cherche. Si au côté de ce quarré Moyen on ajoute le double du Solide solide sous le premier terme & les deux Nombres indeterminez, on aura le côté du plus grand quarré des trois que l'on cherche. Enfin si au Solide sous le second terme & la difference des quarrez des deux Nombres indeterminez on ajoute le Solide sous le premier terme & le quarré du premier Nombre indeterminé, on aura le côté du plus petit des trois quarrez que l'on cherche. Canon.

Cette Question se peut aussy resoudre tres facilement, en mettant

$$x+y+z.$$

$$x+y.$$

$$x.$$

pour les côtez des trois quarrez qu'on cherche, lesquels par consequent seront tels,

$$xx+2xy+yy+2xz+2yz+zz.$$

$$xx+2xy+yy.$$

$$xx.$$

& alors selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$2xz+2yz+zz,\ 2xy+yy :: r,\ s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$2sxz+2syz+szz \backsim 2rxy+ryy.$$

dans laquelle on trouuera $z \backsim \sqrt{xx+2xy+yy+\frac{2rxy+ryy}{s}}-x-y$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $xx+2xy+yy+\frac{2rxy+ryy}{s}$. Multipliez-la par le Nombre quarré ss, pour auoir en entiers cette autre Puissance à égaler au quarré, $ssxx+2ssxy+ssyy+2rsxy+rsyy$, pour le côté duquel prenant $sx \cdots ay$, on trouuera en entiers,

$$x \backsim aa-ss-rs.$$

$$y \backsim 2ss+2as+2rs.$$

C'est pourquoy au lieu de $z \backsim \sqrt{xx+2xy+yy+\frac{2rxy+ryy}{s}} - x - y$, on aura $z \backsim 2ar$, & les côtez des trois quarrez qu'on cherche, seront tels,

Sixieme Solution.

$$aa+2ar+2as+ss+rs.$$
$$aa+2as+ss+rs.$$
$$aa-ss-rs.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \backsim 3.$$
$$s \backsim 1.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

169.
49.
9.

comme dans la premiere solution: Mais si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

1369.
361.
25.

comme dans la troisieme solution. Que si l'on suppose

$$a \backsim 5.$$

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4761.
1521.
441.

dont les côtez sont tels,

69.
39.
21.

& si l'on suppose

$$a \backsim 7.$$

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

11881.
4489.
2025.

comme dans la troisieme solution.

Il est évident que les deux termes r, s, seront égaux, on

aura trouvé par cette Question trois quarrez en proportion arithmetique.

A l'occasion de cette Question, Nous ajouterons icy les suivantes.

1.

Trouver trois Nombres en proportion geometrique, en sorte que l'excez du plus grand sur le moyen, soit à l'excez du moyen sur le plus petit, en raison donnée.

On propose de trouver trois nombres geometriquement proportionnels,

x.

y.

z.

en sorte que l'excez $x-y$, du plus grand x, sur le moyen y, soit à l'excez $y-z$: du moyen y, sur le plus petit z, comme $3\sim r$, à $1\sim s$.

Le produit & les quarrez des deux termes de la raison donnée, sont les trois Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$x, y :: y, z$.

$x-y, y-z :: r, s$.

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$xz \sim yy$.

$sx-sy \sim ry-rz$.

Dans la premiere $xz \sim yy$, on trouvera $z \sim \frac{yy}{x}$, & la seconde $sx-sy \sim ry-rz$, se changera en celle-cy, $sx-sy \sim ry-\frac{ryy}{x}$, ou $sxx-sxy \sim rxy-ryy$, laquelle étant divisée par $x-y$, on aura celle-cy, $sx \sim ry$, dans laquelle on trouvera en entiers,

$x \sim r$.

$y \sim s$.

c'est pourquoy au lieu de $z \sim \frac{yy}{x}$, on aura $z \sim \frac{ss}{r}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront en entiers de cette grandeur,

rr.

rs.

ss.

Parceque Nous avons supposé

$r \sim 3$.

$s \sim 1$.

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

9.

3.

1.

II.

Trouver quatre Nombres en proportion geometrique, en sorte que la difference des deux plus grands soit à la difference des deux plus petits, en raison donnée.

On propose de trouver quatre Nombres geometriquement proportionnels,

$x.$

$y.$

$z.$

$\omega.$

en sorte que la difference $x-y$, des deux plus grands x, y, soit à la difference $z-\omega$, des deux plus petits z, ω, comme $3 \sim r$, à $1 \sim s$.

Canon Si on multiplie deux Nombres indeterminez, chacun par leur somme, & chaque produit par le plus grand terme de la raison donnée, on aura les deux plus grands des quatre Nombres qu'on cherche: & si on multiplie chacun des deux mêmes produits par le plus petit terme, on aura les deux plus petits.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux analogies,

$x, y :: z, \omega.$

$x-y, z-\omega :: r, s.$

& par consequent ces deux Equations constitutives,

$x\omega \sim yz.$

$sx - sy \sim rz - r\omega.$

Dans la premiere $x\omega \sim yz$ on trouvera $\omega \sim \frac{yz}{x}$, & la seconde $sx - sy \sim rz - r\omega$ se changera en celle-cy, $sx - sy \sim rz - \frac{ryz}{\omega}$, dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{sxx + sxy}{rx + ry}$. C'est pourquoy au lieu de $\omega \sim \frac{yz}{x}$, on aura $\omega \sim \frac{syy + sxy}{rx + ry}$, & les quatre Nombres qu'on cherche, seront en entiers de cette grandeur,

$rxx + rxy.$

$ryy + rxy.$

$sxx + sxy.$

$syy + sxy.$

Parceque nous avons supposé

$r \sim 3.$

$s \sim 1.$

les quatre nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

18.

9.

6.

3.

en supposant

$x \sim 2.$

$y \sim 1.$

On

On peut avoir de Nombres plus petits, savoir en divisant les quatre Nombres trouvez par $x+y$, & alors les quatre Nombres qu'on cherche, seront en moindres termes de cette grandeur;

$$rx.$$
$$ry.$$ Seconde Solution.
$$sx.$$
$$sy.$$

Parceque nous avons supposé

$$r \sim 3$$
$$s \sim 1.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 3.$$
$$y \sim 2.$$

les quatre Nombres qu'on cherche, seront tels,

9.
6.
3.
2.

On tire de cette seconde Solution, le Canon suivant;

Si on multiplie deux Nombres indeterminez, chacun par chacun des deux termes de la raison donnée, on aura les quatre Nombres qu'on cherche. Canon.

Comme cette Question est indeterminée, à cause des deux quantitez indeterminées x, y, qui demeurent dans la solution indefinie, on luy peut ajouter encore deux conditions. Comme si on veut que la somme des deux extrêmes des quatre Nombres qu'on cherche, soit égale à un Nombre donné, comme au Nombre donné $7 \sim ab$, & la somme des deux moyens à un autre Nombre donné, comme au Nombre donné $5 \sim cd$. Alors on aura ces deux Equations à resoudre.

$$rx+sy \sim ab.$$
$$ry+sx \sim cd.$$

Dans la première $rx+sy \sim ab$, on trouvera $\frac{ab-sy}{r} \sim x$, & la seconde $ry+sx \sim cd$, se changera en celle-cy, $ry+\frac{abs-ssy}{r} \sim cd$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{cdr-abs}{rr-ss}$. c'est pourquoy au lieu de $x \sim \frac{ab-sy}{r}$, on aura $x \sim \frac{abr-cds}{rr-ss}$, & les quatre Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abrr-cdrs,\ cdrr-abrs,\ abrs-cdss,\ cdrs-abss}{rr-ss}.$$

Parceque nous auons supposé

$r \backsim 3.$

$s \backsim 1.$

$ab \backsim 7.$

$cd \backsim 5.$

Les quatre Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

6.

3.

2.

1.

III.

Trouuer trois nombres quarrez, tels que la somme des deux premiers soit à la somme des deux derniers, dans la raison de de. deux quarrez donnez.

On propose de trouuer trois nombres quarrez

$xx.$

$yy.$

$zz.$

en sorte que la somme $xx+yy$ des deux premiers soit à la somme $yy+zz$ des deux derniers, comme le quarré donné $1 \backsim rr$, au quarré donné $4 \backsim ss.$

Canon. Si on multiplie le côté du premier quarré donné par le double d'Vn nombre indeterminé, on aura le côté du quarré moyen des trois que l'on cherche. Le côté du troisieme quarré est égal à la difference entre le premier quarré donné & la somme du second quarré donné & du quarré du Nombre indeterminé; Et le côté du premier quarré qu'on cherche est égal à la difference du Plan sous les côtez des deux quarrez donnez & du quotient qu'on aura en diuisant par le côté du second quarré donné le Solide sous le côté du premier quarré donné & la somme de ce même quarré & du quarré du Nombre indeterminé.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$xx+yy,\ yy+zz :: rr,\ ss.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$ssxx+ssyy \backsim rryy+rrzz.$$

dans la quelle on trouuera $sx \backsim \sqrt{rryy+rrzz-ssyy}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $rryy+rrzz-ssyy$, pour le côté duquel prenant $rz - ay$, on trouuera en entiers

$y \backsim 2ar.$

$z \backsim aa-rr+ss.$

c'est pourquoy au lieu de $sx \backsim \sqrt{rryy + rrzz - ssyy}$, on aura $sx \backsim aar + r^3 \ldots rss$, & par consequent $x \backsim \frac{aar + r^3}{s} \ldots rs$, & les côtez des trois quarez qu'on cherche, seront en entiers de cette grandeur;

$$aar + r^3 \ldots rss.$$

$$2ars.$$

$$aas + s^3 \ldots rrs.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \backsim 1.$$

$$s \backsim 2.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$

Les trois quarez qu'on cherche, seront en moindres termes,

1.

4.

16.

dont les côtez sont tels,

1.

2.

4.

On aura une solution plus simple, si à la place de a, on met r, car les trois côtez precedens se changeront en ces trois autres, Seconde Solution.

$$2r^3 \ldots rss.$$

$$2rrs.$$

$$s^3.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \backsim 1.$$

$$s \backsim 2.$$

les trois quarez qu'on cherche, seront de cette grandeur;

1.

4.

16.

comme auparauant.

On tire de cette seconde solution, le Canon suiuant;

Le second quaré donné est le côté du dernier des trois quarrez qu'on cherche. Le double du premier quaré donné est le côté du second quaré qu'on cherche; Et le côté du premier quaré est égal à la difference des deux côtez precedens diuisée par le côté du second quaré donné. Canon.

Ou bien si à la place du même nombre indeterminé a, on met s, car alors on aura ces trois autres cotez;

Troisieme Solution.

r^3.

rss.

$2s^3 ... rss$.

Parceque Nous auons supposé

$r \sim 1$.

$s \sim 2$.

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur;

1.

64.

196.

dont les côtez sont tels,

1.

8.

14.

On tire de cette troisieme Solution, le canon suiuant;

Canon. Le côté du premier des trois quarrez qu'on cherche, est égal au premier quarré donné. Le double du second quarré donné est le côté du second quarré qu'on cherche. Et on aura le côté du troisieme quarré en diuisant le solide sous le côté du second quarré donné & la difference entre le premier quarré donné & le double du second, par le côté du premier.

On aura Une solution encore plus simple, en faisant que les trois quarrez qu'on cherche, soient en proportion geometrique. Pour cette fin on mettra $r+s$, à la place de a, & alors les trois quarrez qu'on cherche, seront tels,

Quatrieme Solution.

r^4.

$rrss$.

s^4.

dont les côtez sont tels,

rr.

rs

ss.

Parceque Nous auons suppose

$r \sim 1$.

$s \sim 2$.

les trois quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur;

1.

4.

16.

comme dans les deux Premieres Solutions.

On tire de cette quatrieme solution, le Canon suiuant;

Les deux quarrez donnez & le produit sous leurs côtez, sont les côtez des trois quarrez qu'on cherche. Canon.

IV.

Trouuer trois nombres en proportion arithmetique, en sorte que l'excez du quarré du plus grand sur le quarré du moyen, soit à l'excez du quarré du moyen sur le quarré du plus petit, en raison donnée.

On propose de trouuer trois Nombres en proportion arithmetique,

$$x.$$
$$x+y.$$
$$x+2y.$$

dont les quarrez

$$xx.$$
$$xx+2xy+yy.$$
$$xx+4xy+4yy.$$

soient tels, que l'excez $3yy+2xy$ du plus grand sur le Moyen, soit à l'excez $yy+2xy$ du moyen sur le plus petit, comme r à s.

La somme des deux termes de la raison donnée est le Moyen des trois nombres qu'on cherche. La difference entre le plus petit terme & le triple du plus grand est le plus grand Nombre. Et la difference entre le plus grand terme & le triple du plus petit est le plus petit Nombre. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$3yy+2xy,\ yy+2xy :: r, s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$3syy+2sxy \sim ryy+2rxy.$$

dans laquelle on trouuera en entiers,

$$x \sim 3s-r.$$
$$y \sim 2r-2s.$$

& les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$3s \cdots r.$$
$$r+s.$$
$$3r \cdots s.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 2.$$
$$s \sim 1.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

1.
3.
5.

Determination. La determination de cette Question, à l'égard de la raison donnée $\frac{r}{s}$, est qu'elle doit être moindre ou plus grande que $\frac{1}{3}$, à cause du premier Nombre trouvé $3s \cdots r$, & du troisieme $3r \cdots s$.

Si vous voulez avoir une solution plus generale, mettez

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$

pour les trois Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez cette Equation constitutive

$$x+z \backsim 2y.$$

& cette analogie,

$$xx-yy,\ yy-zz :: r, s.$$

d'où l'on tire cette autre Equation constitutive,

$$sxx-syy \backsim ryy-rzz.$$

dans laquelle on trouvera $z \backsim \sqrt{yy+\frac{syy-sxx}{r}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $yy+\frac{syy-sxx}{r}$. Supposez

$$y \backsim x \cdots \frac{a\omega}{b}.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $xx-\frac{2ax\omega}{b}+\frac{aa\omega\omega}{bb}-\frac{2asx\omega}{br}+\frac{aas\omega\omega}{bbr}$, pour le côté duquel prenant $x+\frac{c\omega}{d}$, on trouvera en entiers,

$$x \backsim addr+adds \cdots bbccr.$$
$$\omega \backsim 2bbcdr+2abddr+2abdds.$$

& par consequent

$$y \backsim aaddr+aadds+bbccr+2abcdr.$$
$$z \backsim aaddr+aadds+bbccr+2abcdr+2abcds.$$

& au lieu de l'Equation constitutive, $x+z \backsim 2y$, on aura celle-cy, $2aaddr+2aadds+2abcdr+2abcds \backsim 2aaddr+2aadds+2bbccr+4abcdr$, dans laquelle on trouvera en entiers,

$$c \backsim as-ar.$$
$$d \backsim br.$$

& les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$3aabbrrs-aabbrss.$$
$$aabbrrs+aabbrss.$$
$$3aabbrss-aabbrrs.$$

Mais cette solution est équivalente à la premiere, parceque chacun de ces trois Nombres ainsy trouvez se peut diviser par $aabbrs$.

V.

Trouver quatre Nombres quarrez, tels que la difference des deux premiers soit à la difference des deux derniers, en raison donnée.

On propose de trouver quatre nombres quarrez

$$xx.$$
$$yy.$$
$$zz.$$
$$ww.$$

en sorte que la difference $xx-yy$ des deux premiers soit à la difference $zz-ww$, des deux derniers, comme $1 \backsim r$, à $3 \backsim s$.

On peut prendre pour les côtez des deux derniers quarrez des quatre que l'on cherche, deux Nombres indeterminez: & pour trouver les côtez des deux premiers, on ajoutera & on ôtera du Solide sous le second terme de la raison donnée & le quarré d'un Nombre indeterminé, le Solide sous le premier terme & la difference des deux derniers quarrez; & on divisera la somme & le reste par le double du Plan sous le second terme & le Nombre indeterminé. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$xx-yy, zz-ww :: r, s.$$

& par consequent cette Equation constitutive,

$$sxx-syy \backsim rzz-rww.$$

dans laquelle on trouvera $x \backsim \sqrt{yy+\frac{rzz-rww}{s}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $yy+\frac{rzz-rww}{s}$, pour le côté duquel prenant $\overline{y-a}$, on trouvera $y \backsim \frac{aas-rzz+rww}{s}$. C'est pourquoy au lieu de $x \backsim \sqrt{yy+\frac{rzz-rww}{s}}$, on aura $x \backsim \frac{aas+rzz-rww}{s}$, & les côtez des quatre quarrez qu'on cherche, seront en entiers de cette grandeur,

$$aas+rzz-rww.$$
$$aas-rzz+rww$$
$$2asz.$$
$$2asw.$$

Parceque Nous avons supposé

$$r \backsim 1.$$
$$s \backsim 3.$$

Si l'on suppose

$$w \backsim 1.$$
$$z \backsim 2.$$
$$a \backsim 2.$$

les quatre quarez qu'on cherche, seront tels,

25.
9.
64.
16.

dont les côtez sont de cette grandeur;

5.
3.
8.
4.

Il est évident que cette Question étant indeterminée, à cause des trois quantitez indeterminées a, z, ω, qui demeurent dans la solution, on luy peut ajouter d'autres conditions; comme si l'on veut que la somme des deux premiers côtez soit égale à la somme des deux derniers, alors on aura cette Equation à resoudre, $2aas \sim 2asz + 2as\omega$, dans laquelle on trouvera $\omega \sim a - z$, & les côtez des trois quarez qu'on cherche, seront en moindres termes de cette grandeur;

Seconde Solution.

$as - ax + 2xz$.
$as + ax - 2xz$.
$2sz$.
$2as - 2sz$.

Parceque nous avons supposé

$x \sim 1$.
$s \sim 2$.

Si l'on suppose

$a \sim 3$.
$z \sim 1$.

les quatre quarez qu'on cherche, seront tels,

25.
49.
16.
64.

dont les côtez sont de cette grandeur;

5.
7.
4.
8.

On peut autrement égaler au quarré la Puissance precedente

$yy+\frac{rzz-r\omega\omega}{s}$, sauoir en supposant

$$z \backsim y+\omega.$$

& alors on aura cette autre Puissance à égaler au quarré, $yy+\frac{ryy+2ry\omega}{s}$, pour le côté duquel prenant $\frac{ay}{b}$, on trouuera en entiers,

$$y \backsim 2bbr.$$
$$\omega \backsim aas-bbr-bbs.$$

C'est pourquoy au lieu de $z \backsim y+\omega$, on aura $z \backsim aas+bbr-bbs$, & au lieu de $x \backsim \sqrt{yy+\frac{rzz-r\omega\omega}{s}}$, on aura $x \backsim 2abr$. Ainsy les côtez des quatre quarrez qu'on cherche, seront tels,

Troisiéme Solution.

$$2abr.$$
$$2bbr.$$
$$aas+bbr-bbs.$$
$$aas-bbr-bbs.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \backsim 1.$$
$$s \backsim 3.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$

les quatre quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.
1.
25.
16.

dont les côtez sont tels,

2.
1.
5.
4.

Si vous voulez comme auparauant, que la somme des deux premiers de ces quatre côtez ainsy trouuez, soit égale à la somme des deux derniers, vous aurez cette Equation à resoudre, $2abr+2bbr \backsim 2aas-2bbs$, dans laquelle on trouuera en entiers,

$$a \backsim r+s.$$
$$b \backsim s.$$

& les côtez des quatre quarrez qu'on cherche, seront en moindres termes de cette grandeur,

Quatrieme Solution.

$2x+2s.$

$2s.$

$x+3s.$

$x+s.$

Parceque Nous auons supposé

$x \sim 1.$

$s \sim 3.$

les quatre quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur;

16.

9.

25.

4.

dont les côtez sont tels,

4.

3.

5.

2.

On tire de cette quatrieme solution, le canon suiuant;

Canon. La somme des deux termes de la raison donnée est le côté du dernier des quatre quarrez que l'on cherche. le double de ce côté est le côté du premier: & le côté du second quarré est égal au double du second terme: le côté du troisieme quarré étant égal à l'excez de la somme des côtez des deux premiers quarrez sur le côté du quatrieme.

Par le Moyen de cette Question ainsy resolue, on resoud la suiuante;

Trouuer quatre Nombres en proportion arithmetique, dont les quarrez soient tels, que la difference des deux Moyens soit à la difference des deux extrémes, en raison donnée.

VI.

Trouuer quatre Nombres quarrez, tels que la somme des deux premiers soit à la somme des deux derniers dans la raison de deux quarrez donnez.

On propose de trouuer quatre Nombres quarrez

$xx.$

$yy.$

$zz.$

$ww.$

en sorte que la somme $xx+yy$ des deux premiers soit à la

somme $zz+ww$, des deux derniers, comme le quarré donné $1 \sim rr$, au quarré donné $4 \sim ss$.

Le côté du premier des quatre quarrez qu'on cherche, est égal à la difference du produit sous Vn quarré indeterminé & le double du premier terme de la raison donnée, & du produit sous Vn autre quarré indeterminé & le second terme. Le côté du second quarré est égal au double du produit sous les quatre côtez des deux quarrez indeterminez & des deux termes. Le côté du troisieme quarré est égal au double du produit sous les côtez des deux termes & le second quarré indeterminé. On aura le côté du quatrieme quarré en diuisant le produit sous le premier quarré indeterminé & le cube du côté du second terme, par le côté du premier terme. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$xx+yy,\ zz+ww :: rr,\ ss.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$ssxx+ssyy \sim rrzz+rrww.$$

dans laquelle on trouuera $x \sim \sqrt{\frac{rrzz+rrww}{ss}-yy}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $\frac{rrzz+rrww}{ss}-yy$, pour le côté duquel prenant $\frac{rz}{s} \cdots a$, on trouuera $z \sim \frac{aass+ssyy-rrww}{2ars}$. C'est pourquoy au lieu de $x \sim \sqrt{\frac{rrzz+rrww}{ss}-yy}$, on aura $x \sim \frac{aass-ssyy+rrww}{2ass}$, & les côtez des quatre quarrez qu'on cherche, seront en entiers, de cette grandeur,

$$aarss \cdots rssyy+r^3ww.$$
$$2arssy.$$
$$aas^3+s^3yy \cdots rrsww.$$
$$2arssw.$$

Parceque Nous auons Supposé

$$r \sim 1.$$
$$s \sim 2.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$y \sim 2.$$
$$w \sim 3.$$

les quatre quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

9.
256.
484.
576.

dont les côtez sont tels,

$$3.$$
$$16.$$
$$22.$$
$$24.$$

Le Canon precedent n'a pas été tiré de cette solution, mais de la suiuante, que Nous auons trouuée en égalant la Puissance precedente $\frac{rrzz+rr\omega\omega}{ss}-yy$, au quarré $\frac{rrzz-2rrz\omega+rr\omega\omega}{ss}$, dont le côté est $\frac{rz-r\omega}{s}$, & alors on trouuera $\omega\sim\frac{ssyy}{2rrz}$: & au lieu de $x\sim\sqrt{\frac{rrzz+rr\omega\omega}{ss}-yy}$, on aura $x\sim\frac{2r^3zz-rssyy}{2rrsz}$, & les côtez des quatre quarrez qu'on cherche, seront en entiers de cette grandeur,

Seconde Solution.

$$2r^3zz \cdots rssyy.$$
$$2rrsyz.$$
$$2rrszz.$$
$$s^3yy.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r\sim1.$$
$$s\sim2.$$

Si l'on suppose

$$y\sim2.$$
$$z\sim3.$$

les quatre quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$1.$$
$$144.$$
$$324.$$
$$256.$$

dont les côtez sont tels,

$$1.$$
$$12.$$
$$8.$$
$$16.$$

Si Vous voulez une troisieme solution, supposez

$$\omega\sim\frac{sy+rz}{r}.$$

& au lieu de la Puissance precedente $\frac{rrzz+rr\omega\omega}{ss}-yy$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $\frac{rrzz}{ss}+zz+2yz$, pour le côté duquel prenant $\frac{az}{b}$, on trouuera en entiers

$$y\sim aass \cdots bbrr \cdots bbss.$$
$$z\sim2bbsy.$$

& les côtez des quatre quarrez qu'on cherche, seront en entiers,

de cette grandeur;

$$2abrss.$$
$$aarss \ldots bbr^3 \ldots bbrss.$$
$$2bbrss.$$
$$aas^3 \ldots bbrss + bbs^3.$$

Troisieme Solution.

Parceque Nous auons supposé

$$r \backsim 1.$$
$$s \backsim 2.$$

si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$

les quatre quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur;

256.
121.
64.
1444.

dont les côtez sont tels,

16.
11.
8.
38.

VII.

Trouuer quatre Nombres en continuelle proportion arithmetique, en sorte que la difference des quarrez des deux premiers soit à la difference des quarrez des deux derniers, en raison donnée.

On propose de trouuer quatre Nombres en continuelle proportion arithmetique,

$$x.$$
$$x+y.$$
$$x+2y.$$
$$x+3y.$$

dont les quarrez

$$xx.$$
$$xx+2xy+yy.$$
$$xx+4xy+4yy.$$
$$xx+6xy+9yy.$$

soient tels, que la difference $yy+2xy$ des deux premiers soit à la difference $yy+2xy$ des deux derniers, comme $1 \backsim r$, à $2 \backsim s$.

Canon. Les differences entre l'vn des deux termes de la raison donnée & le quintuple de l'autre, sont les deux extrémes de quatre nombres qu'on cherche, les deux moyens étant égaux aux deux sommes de l'vn des termes & du triple de l'autre.

Selon la condition de la Question, on aura cette analogie,

$$yy + 2xy,\ 5yy + 2xy :: r, s.$$

& par consequent cette Equation constitutiue,

$$syy + 2sxy \sim 5ryy + 2rxy.$$

dans laquelle on trouuera en entiers,

$$x \sim 5r - s.$$

$$y \sim 2s - 2r.$$

& les quatre nombres qu'on cherche, seront tels,

$$5r - s.$$

$$3r + s.$$

$$3s + r.$$

$$5s - r.$$

Parceque nous auons supposé

$$r \sim 1.$$

$$s \sim 2.$$

les quatre nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

3.

5.

7.

9.

Question XXI.

Trouuer deux nombres, dont chacun étant ajouté au quarré de l'autre, il vienne deux nombres quarrez.

On propose de trouuer deux nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que la somme $lx + yy$, du premier & du quarré du second, & la somme $ly + xx$, du second & du quarré du premier soient chacune vn nombre quarré,

Canon. Si l'on diuise deux nombres indeterminez chacune par le quadruple de leur somme, on aura les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$lx + yy.$$

$$ly + xx.$$

Egalez la première $lx+yy$ au quarré $aa+2ay+yy$, dont le côté est $a+y$, pour avoir $lx \backsim aa+2ay$, & au lieu de la seconde $ly+xx$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $4aayy+4a^3y+l^3y+a^4$, pour le côté duquel prenant $2ay \cdots bc$, on trouvera $y \backsim \frac{bbcc-a^4}{4a^3+4abc+l^3}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2abbcc+2a^5+4a^3bc+l^3aa,\ bbcc-a^4}{4a^3+4abc+l^3}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 2.$$
$$c \backsim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{19,\ 3}{13}.$$

Cette Metode est toutafait la même que celle de Diophante, mais on peut autrement rendre quarrée la Puissance precedente, $4aayy+4a^3y+l^3y+a^4$, savoir en prenant $aa \cdots by$, pour le côté du quarré qu'on luy doit égaler, & alors on trouvera $y \backsim \frac{4a^3+2aab+l^3}{bb-4aa}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{4a^4+4a^3b+aabb+2l^3a,\ 4la^3+2laab+l^4}{bb-4aa}.$$

Seconde Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 3.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{27,\ 11}{5}.$$

Si vous voulez une solution plus simple, égalez la premiere Puissance $lx+yy$, au quarré aa, pour avoir $lx \backsim aa-yy$, & au lieu de la seconde Puissance $ly+xx$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $a^4+l^3y-2aayy+y^4$, pour le côté duquel prenant $aa+yy$, on trouvera $lx \backsim \frac{16a^6-16}{16a^4}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4l+aa,\ 16a^6-16}{16a^4}.$$

Troisieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{4,\ 15}{16}.$$

Ou bien égalez la premiere Puissance $lx+yy$ au quarré $xx+2xy+yy$, dont le côté est $x+y$, pour avoir $y \backsim \frac{1}{2}l-\frac{1}{2}x$, & au lieu de la seconde Puissance $ly+xx$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $\frac{1}{2}ll-\frac{1}{2}lx+xx$, pour le côté duquel prenant $x \cdots a$, on trouvera $x \backsim \frac{2aa-ll}{4a-l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2aa-ll,\ 2la-aa}{4a-l}.$$

Quatrieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim \frac{3}{2}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{14, 3}{20}.$$

Pour n'auoir pas vne solution si limitée, égalez la premiere Puissance $lx+yy$ au quarré $xx-2xy+yy$, pour auoir $y \sim \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}l$, & au lieu de la seconde Puissance $ly+xx$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $\frac{1}{2}lx-\frac{1}{2}ll+xx$, pour le côté duquel prenant $x \cdots a$, on trouuera $x \sim \frac{2aa+ll}{4a+l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Cinquieme Solution.

$$\frac{2aa+ll,\ aa-2la}{4a+l}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{33, 8}{17}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{19, 3}{13}.$$

comme dans la premiere solution.

Ou bien supposez

$$y \sim \frac{ax}{b}.$$

pour auoir ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$lx+\frac{aaxx}{bb}.$$

$$\frac{lax}{b}+xx.$$

lesquelles étant multipliées par le Nombre quarré bb, on aura en entiers ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$lbbx+aaxx.$$

$$labx+bbxx.$$

Multipliez la premiere $lbbx+aaxx$, par le Nombre quarré bb, & la deuxieme $labx+bbxx$, par le Nombre quarré aa, pour auoir en leur place ces deux autres,

$$lb^4x+aabbxx.$$

$$la^3bx+aabbxx.$$

Leur difference est lb^4x-la^3bx, dont les deux Nombres produisans sont

$$2abx.$$

$$\frac{lb^3}{2a}-\frac{1}{2}laa.$$

La moitié de leur somme est $abx+\frac{lb^3}{4a}-\frac{1}{4}laa$, dont le quarré

étant

étant égalé à la plus grande Puissance $lb^4x + aabbxx$, on trouuera $x \sim \frac{a^6 - 2a^3b^3 + b^6}{8aab^4 + 8a^5b}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^6 - 2a^3b^3 + b^6}{8aab^4 + 8a^5b}.$$ Sixieme Solution.

$$\frac{a^6 - 2a^3b^3 + b^6}{8a^4bb + 8ab^5}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

$$b \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{49, 98}{288}.$$

On tire de cette sixieme Solution, le canon suiuant;

Si de deux nombres indeterminez on Multiplie chaque Solide sous le double de l'Vn & le quarré du double de l'autre par la somme de leurs cubes, & que par chaque produit on diuise le quarré de la difference des mêmes cubes; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Le premier Canon a été tiré de la Solution suiuante, que nous auons trouuée en supposant

$$lx \sim az.$$

$$ly \sim bz.$$

pour auoir ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$llaz + bbzz.$$

$$llbz + aazz.$$

Leur difference est $bbzz - aazz + llaz + llbz$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$$bz - az.$$

$$bz + az - ll.$$

La Moitié de leur somme est $bz - \frac{1}{2}ll$, dont le quarré $bbzz - llbz + \frac{1}{4}l^4$ étant égalé à la plus grande Puissance $llaz + bbzz$, on trouuera $\frac{ll}{4a+4b}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a, b}{4a+4b}.$$

Si l'on suppose Settieme Solution.

$$a \sim 1.$$

$$b \sim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{1, 2}{12}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 9.$$

$$b \sim 16.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{9,\ 16}{100}.$$

qui sont tous deux quarez : & aussy leur somme, ce qui arrivera toujours, lorsque pour les deux Nombres indeterminez a, b, on mettra les quarez des deux côtez d'un triangle rectangle. Ainsy on pourra trouver autant d'autres Nombres que l'on voudra par le moyen du Canon suivant.

Canon. Si on divise les quarez des deux côtez d'un triangle rectangle, chacun par le quadruple du quarré de l'hypotenuse, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Question XXII.

Trouver deux Nombres, dont chacun étant ôté du quarré de l'autre, il reste deux Nombres quarez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que l'excez $yy-lx$, du quarré du second sur le premier, & l'excez $xx-ly$, du quarré du premier sur le second, soient chacun un nombre quarré.

Canon. Si l'on divise la difference de deux quarez indeterminez & la somme du plus & du double du plus petit, chacune par l'excez du plus grand sur le quadruple du plus petit, on aura les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$yy-lx.$$
$$xx-ly.$$

Egalez la premiere $yy-lx$, au quarré $yy-\frac{2axy}{b}+\frac{aaxx}{bb}$, pour avoir $y \backsim \frac{aax+lbb}{2ab}$, & au lieu de la seconde $xx-ly$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $xx-\frac{laax-llbb}{2ab}$, pour le côté duquel prenant $x \ldots c$, on trouvera $x \backsim \frac{2abcc+llbb}{4abc-laa}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{llbb+2abcc,\ aacc+2lbbc}{4abc-laa}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2,\ 8}{7}.$$

Pour resoudre cette Question par la metode de Diophante, supposez

Metode de Diophante.

$$x \sim z + l.$$

& alors vous aurez ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$yy - lz - ll.$$
$$zz + 2lz + ll - ly.$$

Si on égale la deuxieme $zz + 2lz + ll - ly$, au quarré zz, on aura $y \sim 2z + l$, & la premiere $yy - lz - ll$ se changera en celle-cy, $4zz + 3lz$, laquelle étant égalée au quarré $\frac{aazz}{bb}$, on trouvera $z \sim \frac{3lbb}{aa - 4bb}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa - bb,\ aa + 2bb}{aa - bb}.$$

Seconde Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 3.$$
$$b \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{8,\ 11}{5}.$$

Pour auoir une solution sans aucune determination, au lieu d'égaler la Puissance $4zz + 3lz$ au quarré $\frac{aazz}{bb}$, comme Diophante, on l'égalera au quarré $4zz - 4az + aa$, dont le côté est $2z \cdots a$, & alors on trouuera $z \sim \frac{aa}{4a + 3l}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa + 4la + 3ll,\ 2aa + 4la + 3ll}{4a + 3l}.$$

Troisieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 6.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{7,\ 11}{3}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim \frac{3}{2}.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{5,\ 6}{4}.$$

dont la difference est un nombre quarré, ce qui arriuera toujours, lorsque le denominateur commun $4a + 3l$, sera un nombre quarré, ce qui se peut faire en une infinité de manieres.

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'unité, mettez

$$\frac{x,\ y}{z}.$$

pour les deux nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, on aura en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$yy - xz.$$
$$xx - yz.$$

Si on égale la premiere $yy-xz$ au quarré $yy-2ay+aa$, dont le côté est $y \cdots a$, on trouuera $z \propto \frac{2ay-aa}{x}$, & la deuxieme $xx-yz$ se changera en celle-cy, $xx-\frac{2ayy+aay}{x}$, laquelle étant égalée au quarré $xx-2xy+yy$, dont le côté est $x \cdots y$, on trouuera $y \propto \frac{aa+2xx}{2a+x}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Quatriéme Solution.

$$\frac{xx+2ax,\ 2xx+aa}{4ax-aa}.$$

Si l'on suppose

$$x \propto 1.$$
$$a \propto 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{5,\ 6}{4}.$$

dont la difference est vn Nombre quarré, ce qui arriuera toujours, pourueûque le denominateur commun $4ax-aa$, soit vn Nombre quarré, ce qui se peut faire en vne infinité de Manieres.

Au lieu d'égaler la Puissance precedente $xx-\frac{2ayy+aay}{x}$, au quarré $xx-2xy+yy$, on la peut égaler au quarré $xx-\frac{2bxy}{c}+\frac{bbyy}{c}$, dont le côté est $x \cdots \frac{by}{c}$, pour auoir vne Solution plus generale, & alors on trouuera $y \propto \frac{2bcxx+aacc}{bbx+2acc}$, & par consequent $z \propto \frac{4abcx-aabb}{bbx+2acc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bbxx+2accx,\ 2bcxx+aacc}{4abcx-aabb},$$

Si l'on suppose

$$a \propto 1.$$
$$b \propto 1.$$
$$c \propto 1.$$
$$x \propto 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{8,\ 9}{7}.$$

Il manque dans Diophante la Question suiuante, à laquelle nous en ajouterons trois autres.

I.

Trouuer deux nombres, tels que si de chacun on ôte le quarré de l'autre, il reste deux nombres quarrez.

On propose de trouuer deux nombres

$$\frac{x,\ y}{z}.$$

en sorte que si du premier $\frac{x}{z}$ on ôte le quarré $\frac{yy}{zz}$ du second, & du second $\frac{y}{z}$ le quarré $\frac{xx}{zz}$ du premier, les deux restes,

$$\frac{x}{z}-\frac{yy}{zz}.$$
$$\frac{y}{z}-\frac{xx}{zz}.$$

soient chacun vn nombre quarré.

Si de deux Nombres indeterminez on multiplie le quarré de chacun par le quarré-quarré de l'autre, & qu'on divise chaque produit par la somme des Quarré-de-cubes des mêmes Nombres, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xz - yy.$$
$$yz - xx.$$

Leur difference est $xz - yz + xx - yy$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$$x - y.$$
$$x + y + z.$$

& comme ils ne sont pas propres à resoudre cette double Egalité, Nous en chercherons deux autres, en multipliant le premier $x - y$ par le Nombre indeterminé $\frac{a}{b}$, & en divisant le second $x + y + z$ par le même Nombre $\frac{a}{b}$, pour avoir en leur place ces deux autres Nombres produisans,

$$\frac{ax - ay}{b}.$$
$$\frac{bx + by + bz}{a}.$$

La moitié de leur somme est $\frac{aax + bbx - aay + bby + bbz}{2ab}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xz - yy$, on trouvera $z \sim -x - y + \frac{aax + aay}{bb} + \frac{2aa}{bb}\sqrt{aaxy - bbxx - bbyy - bbxy}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $aaxy - bbxx - bbyy - bbxy$; & comme elle n'a aucun terme qui soit quarré, pour faire que cela arrive, concevons que les deux quantitez indeterminées a, b, soient connues, & faisons que la somme des Unitez $aa - 3bb$ soit un Nombre quarré. Ainsy Nous avons cette Puissance à égaler au quarré, $aa - 3bb$, pour le côté duquel prenant $a \ldots \frac{bc}{d}$, on trouvera en entiers

$$a \sim cc + 3dd.$$
$$b \sim 2cd.$$

& la premiere Puissance $aaxy - bbxx - bbyy - bbxy$, se changera en celle-cy, $c^4xy + 2ccddxy + 9d^4xy - 4ccddxx - 4ccddyy$, où la somme des Unitez fait ce Nombre quarré $c^4 - 6ccdd + 9d^4$, dont le côté est $cc \ldots 3dd$. C'est pourquoy pour rendre quarrée cette derniere Puissance, supposez

$$y \sim \omega + x.$$

& Vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré,

$c^4xx - 6ccddxx + 9d^4xx + c^4x\omega - 6ccddx\omega + d^4x\omega - 4ccdd\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $ccx \ldots 3ddx \ldots mn\omega$, on trouuera en entiers,

$$\omega \sim c^4 - 6ccdd + 9d^4 - 6ddmn + 2ccmn.$$

$$x \sim 4ccdd + mmnn.$$

c'est pourquoy au lieu de $y \sim \omega + x$, on aura $y \sim c^4 - 2ccdd + 9d^4 - 6ddmn + 2ccmn + mmnn$, &c.

Si l'on suppose

$$m \sim 1.$$
$$n \sim 1.$$
$$c \sim \sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$
$$d \sim \sqrt{\tfrac{1}{6}}.$$

on trouuera

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$
$$x \sim 2.$$
$$y \sim 5.$$
$$z \sim 25.$$
$$\omega \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur.

$$\frac{2, 5}{25}.$$

& si l'on suppose

$$m \sim 1.$$
$$n \sim 2.$$
$$c \sim 2.$$
$$d \sim 1.$$

on trouuera

$$a \sim 7.$$
$$b \sim 4.$$
$$x \sim 4.$$
$$y \sim 5.$$
$$z \sim \frac{325}{16}.$$
$$\omega \sim 1.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels

$$\frac{64, 80}{325}.$$

Pour auoir vne solution plus simple, égalez la premiere Puissance $xz - yy$ au quarré aa, pour auoir $z \sim \frac{aa+yy}{x}$, & la deuxieme $yz - xx$ au quarré bb, pour auoir le même $z \sim \frac{bb+xx}{y}$, & par consequent cette Equation, $\frac{aa+yy}{x} \sim \frac{bb+xx}{y}$, ou $aay + y^3 \sim bbx + x^3$, que l'on reduira en ces deux,

$aay \sim x^3.$

$bbx \sim y^3.$

Dans la premiere $aay \sim x^3$, on trouuera $y \sim \frac{x^3}{aa}$, & la deuxieme $bbx \sim y^3$, se changera en celle-cy, $bbx \sim \frac{x^9}{a^6}$, dans laquelle on trouuera $x \sim \sqrt{\sqrt{a^3b}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré-quarré, a^3b, pour le côté duquel prenant $\frac{ac}{d}$, on trouuera en entiers

$a \sim d^4.$

$b \sim c^4.$

& par consequent

$x \sim cd^3.$

$y \sim c^3d.$

$z \sim \frac{c^6+d^6}{cd}.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{ccd^4,\ c^4dd}{c^6+d^6}.$

Seconde Solution.

Si l'on suppose

$c \sim 1.$

$d \sim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{16,\ 4}{65}.$

Ou bien dans la seconde Equation, $bbx \sim y^3$, on trouuera $x \sim \frac{y^3}{bb}$, & la premiere $aay \sim x^3$, se changera en celle-cy, $aay \sim \frac{y^9}{b^6}$, dans laquelle on trouuera $a \sim \frac{y^4}{b^3}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{bby^4,\ b^4yy}{b^6+y^6}.$

Si l'on suppose

$b \sim 1.$

$y \sim 3.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{81,\ 9}{730}.$

Ou bien encore Multipliez ensemble les deux Puissances $xz-yy$, $yz-xx$, pour auoir leur produit $xxyy-x^3z-y^3z+xyzz$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant xy, on trouuera $z \sim \frac{x^3+y^3}{xy}$, & les deux Puissances precedentes $xz-yy$, $yz-xx$, se changeront en ces deux autres,

$\frac{x^3}{y}.$

$\frac{y^3}{x}.$

dont la premiere $\frac{x^3}{y}$ étant égalée au quarré, $\frac{aaxx}{bb}$, on trouuera

$x \sim aa.$

$y \sim bb.$

c'est pourquoy on trouuera $z \sim \frac{a^6+b^6}{aa+bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^4bb,\ aab^4}{a^6+b^6}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{144,\ 324}{793}.$$

Pour auoir une solution plus generale, au lieu de prendre xy pour le côté du quarré qu'il faut égaler au produit $xxyy - x^3z - y^3z + xyzz$, on prend $xy - az$, & alors on trouuera $z \sim \frac{2axy-x^3-y^3}{aa-xy}$, & les deux Puissances precedentes $xz-yy$, $yz-xx$, se changeront en ces deux autres,

$$\frac{2axxy-x^4-aayy,\ 2axyy-y^4-aaxx}{aa-xy}.$$

Si vous diuisez la premiere par le quarré $x^4-2axxy+aayy$, dont le côté est $xx-ay$, ou la deuxieme par le quarré $y^4-2axxy$ $+aaxx$, dont le côté est $yy-ax$, on aura en leur place cette seule Puissance à égaler au quarré, $\frac{1}{xy-aa}$, pour le côté duquel prenant $\frac{1}{b}$, on trouuera $y \sim \frac{aa+bb}{x}$. C'est pourquoy au lieu de $z \sim \frac{2axy-x^3-y^3}{aa-xy}$, on aura $z \sim \frac{a^6+3a^4bb+3aab^4+b^6-2a^3x^3-2abbx^3+x^6}{bbx^3}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Troisieme Solution.

$$\frac{bbx^4,\ aabbxx+b^4xx}{a^6+3a^4bb+3aab^4-b^6-2a^3x^3-2abbx^3+x^6}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 1.$$
$$x \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 2}{5}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 2.$$
$$x \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 5}{29}.$$

Mais si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$
$$x \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 5}{106}.$$

$\frac{15}{106}$.

On peut resoudre autrement la double Egalité precedente,

$xz - yy$.

$yz - xx$.

Sauoir en multipliant la premiere Puissance $xz - yy$ par le Nombre quarré aa, & la deuxieme $yz - xx$, par le Nombre quarré bb, pour auoir ces deux produits,

$aaxz - aayy$.

$bbyz - bbxx$.

que l'on égalera ensemble, par cette Equation, $aaxz - aayy \sim bbyz - bbxx$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{aayy - bbxx}{aax - bby}$, & les deux Puissances precedentes se changeront en ces deux autres,

$\frac{bby^3 - bbx^3,\ aay^3 - aax^3}{aax - bby}$.

dont la premiere étant diuisée par le quarré bb, & la deuxieme par le quarré aa, on aura en leur place cette seule Puissance à égaler au quarré, $\frac{y^3 - x^3}{aax - bby}$. Pour cette fin égalez le Numerateur au denominateur, par cette Equation, $y^3 - x^3 \sim aax - bby$, que l'on reduira en ces deux autres,

$y^3 \sim aax$.

$x^3 \sim bby$.

Dans la premiere $y^3 \sim aax$, on trouuera $x \sim \frac{y^3}{aa}$, & par consequent $x^3 \sim \frac{y^9}{a^6}$, & la deuxieme $x^3 \sim bby$, se changera en celle-cy $\frac{y^9}{a^6} \sim bby$, dans laquelle on trouuera $b \sim \frac{y^4}{a^3}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{aay^4,\ a^4yy}{a^6 + y^6}$.

Si l'on suppose

$a \sim 3$

$y \sim 4$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{2304,\ 1296}{4825}$.

Pour auoir Vne Solution plus generale, il faut égaler au quarré la Puissance precedente $\frac{y^3 - x^3}{aax - bby}$, en en diminuant le Nombre des termes, par cette Equation, $\frac{y^3}{aax} \sim \frac{x^3}{bby}$, dans laquelle on trouuera $b \sim \frac{axx}{yy}$, & l'on aura cette autre Puissance à égaler au quarré, $\frac{y^3}{aax}$, pour le côté duquel prenant $\frac{cy}{dm}$, on trouuera en entiers,

$x \sim ddmm$.

$y \sim aacc$.

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aacc d^4 m^4,\ a^4c^4 dd mm}{a^6c^6 + d^6m^6}.$$

Quatrieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 1.$$
$$m \sim 3.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{81,\ 9}{730}.$$

On bien Multipliez le Numerateur y^3-x^3 par le nombre quarré cc, & le denominateur $aax-bby$ par le Nombre quarré dd, & égalez ensemble les deux produits, par cette Equation, $ccy^3 - ccx^3 \sim aaddx - bbddy$, que vous reduirez en ces deux,

$$ccy^3 \sim aaddx.$$
$$ccx^3 \sim bbddy.$$

Dans la premiere $ccy^3 \sim aaddx$, on trouuera $x \sim \frac{ccy^3}{aadd}$, & par consequent $x^3 \sim \frac{c^6y^9}{a^6d^6}$, & la deuxieme $ccx^3 \sim bbddy$, se changera en celle-cy, $\frac{c^8y^9}{a^6d^6} \sim bbddy$, dans laquelle on trouuera $b \sim \frac{c^4y^4}{a^3d^4}$. C'est pourquoy on aura $z \sim \frac{a^{12}d^{12} - c^{12}y^{12}}{a^{10}d^{10}ccy - a^4c^8d^4y^7}$, ou $z \sim \frac{a^6d^6 + c^6y^6}{a^4d^4ccy}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aac^4ddy^4,\ a^4ccd^4yy}{a^6d^6 + c^6y^6}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$c \sim 2.$$
$$d \sim 1.$$
$$y \sim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{256,\ 16}{4097}.$$

On peut resoudre encore autrement la double égalité precedente

$$xz - yy.$$
$$yz - xx.$$

en multipliant la premiere Puissance $xz-yy$ par le quarré-quarré a^4, & la deuxieme $yz-xx$ par le quarré-quarré b^4, pour auoir ces deux produits,

$$a^4xz - a^4yy.$$
$$b^4yz - b^4xx.$$

que l'on égalera ensemble, par cette Equation, $a^4xz - a^4yy \sim b^4yz - b^4xx$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{a^4yy - b^4xx}{a^4x - b^4y}$, & les deux Puissances precedentes se changeront en ces deux autres,

$$\frac{b^4y^3 - b^4x^3,\ a^4y^3 - a^4x^3}{a^4x - b^4y}.$$

dont la premiere étant diuisée par le nombre quarré b^4, & la deuxieme par le Nombre quarré a^4, on aura en leur place cette seule Puissance à égaler au quarré, $\frac{y^3-x^3}{a^4x-b^4y}$. Pour cette fin, on la reduira à moindres termes, en faisant cette analogie, $y^3, x^3 :: a^4x, b^4y$, de laquelle on tire cette Equation, $b^4y^4 \sim a^4x^4$, dans laquelle on trouuera en entiers,

$$x \sim b.$$

$$y \sim a.$$

& au lieu de la Puissance precedente $\frac{y^3-x^3}{a^4x-b^4y}$, on aura en moindres termes, celle-cy à égaler au quarré $\frac{1}{ab}$, pour le côté duquel prenant $\frac{1}{c}$, on trouuera $b \sim \frac{cc}{a}$, & par consequent $x \sim \frac{cc}{a}$, & $z \sim \frac{a^{12}-c^{12}}{a^9cc-a^3c^8}$, ou $z \sim \frac{a^6+c^6}{a^3cc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^4cc,\ aac^4}{a^6+c^6}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

$$b \sim 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{400,\ 2500}{15689}.$$

On trouuera vne semblable solution, en multipliant le Numerateur y^3-x^3 de la Puissance precedente $\frac{y^3-x^3}{a^4x-b^4y}$, par le denominateur a^4x-b^4y, pour auoir en entiers cette autre Puissance à égaler au quarré, $a^4xy^3-a^4x^4-b^4y^4+b^4x^3y$. Pour cette fin, on en diminuera le Nombre des termes en égalant ensemble les deux moyens, par cette Equation $a^4x^4 \sim b^4y^4$, dans laquelle on trouuera

$$x \sim b.$$

$$y \sim a.$$

& l'on aura en Moins de termes cette autre Puissance à égaler au quarré, $a^7b-2a^4b^4+ab^7$, que l'on diuisera par le Nombre quarré $a^6-2a^3b^3+b^6$, dont le côté est $a^3 \ldots b^3$, pour auoir en moindres termes cette autre Puissance à égaler au quarré, ab, pour le côté duquel prenant $\frac{ac}{d}$, on trouuera en entiers,

$$a \sim dd.$$

$$b \sim cc.$$

c'est pourquoy on aura

$$x \sim cc.$$

$$y \sim dd.$$

$$z \sim \frac{d^{12}-c^{12}}{ccd^8-c^8dd}$$

ou

$$z \sim \frac{c^6+d^6}{ccdd}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^4dd,\ ccd^4}{c^6+d^6}.$$

Si l'on suppose

$$c \propto 1.$$

$$d \propto 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{25,\ 625}{15626}.$$

Pour auoir vne Solution differente des precedentes, on égalera autrement au quarré la Puissance precedente $\frac{y^3-x^3}{a^4x-b^4y}$, sauoir en multipliant le Numerateur y^3-x^3 par le Nombre quarré cc, & en égalant le produit au Denominateur par cette Equation, $ccy^3-ccx^3 \propto a^4x-b^4y$, que l'on reduira en ces deux autres,

$$ccy^3 \propto a^4x.$$

$$ccx^3 \propto b^4y.$$

Dans la premiere $ccy^3 \propto a^4x$, on trouuera $x \propto \frac{ccy^3}{a^4}$; & par consequent $x^3 \propto \frac{c^6y^9}{a^{12}}$, & la deuxieme $ccx^3 \propto b^4y$, se changera en celle-cy, $\frac{c^8y^9}{a^{12}} \propto b^4y$, dans laquelle on trouuera $b \propto \frac{ccyy}{a^3}$, & au lieu de $z \propto \frac{a^4yy-b^4xx}{a^4x-b^4y}$, on aura $z \propto \frac{a^{24}-c^{12}y^{12}}{a^{20}ccy-a^8c^8y^7}$, ou $z \propto \frac{a^{12}+c^6y^6}{a^8ccy}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Cinquieme Solution.

$$\frac{a^4c^4y^4,\ a^8ccyy}{a^{12}+c^6y^6}.$$

Si l'on suppose

$$a \propto 1.$$

$$c \propto 1.$$

$$y \propto 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{16,\ 4}{65}.$$

On peut par le moyen de cette multiplication trouuer autant d'autres Solutions differentes, que l'on voudra, comme si l'on veut vne Solution differente des precedentes, on multipliera la premiere la premiere Puissance $xz-yy$ par le quarré-de-cube a^6, & la deuxieme $yz-xx$ par le quarré-de-cube b^6, pour auoir ces deux produits,

$$a^6xz-a^6yy.$$

$$b^6yz-b^6xx.$$

que l'on égalera ensemble par cette Equation, $a^6xz-a^6yy \propto b^6yz-b^6xx$, dans laquelle on trouuera $z \propto \frac{a^6yy-b^6xx}{a^6x-b^6y}$, & les deux Puissances precedentes se changeront en ces deux autres,

$$\frac{b^6y^3-b^6x^3,\ a^6y^3-a^6x^3}{a^6x-b^6y}.$$

dont la premiere étant diuisée par le quarré b^6, & la deuxieme

par le quarré a^6, on aura en leur place cette seule Puissance à égaler au quarré, $\frac{y^3-x^3}{a^6x-b^6y}$. Pour cette fin Multipliez le Numerateur y^3-x^3 par le quarré-quarré c^4, & égalez le produit au denominateur par cette Equation, $c^4y^3-c^4x^3 \sim a^6x-b^6y$, que Vous réduirez en ces deux autres,

$$c^4y^3 \sim a^6x.$$
$$c^4x^3 \sim b^6y.$$

Dans la premiere $c^4y^3 \sim a^6x$, on trouuera $x \sim \frac{c^4y^3}{a^6}$, & par consequent $x^3 \sim \frac{c^{12}y^9}{a^{18}}$, & la deuxieme $c^4x^3 \sim b^6y$, se changera en celle-cy, $\frac{c^{16}y^9}{a^{18}} \sim b^6y$, dans laquelle on trouuera $a^3b \sim \sqrt{③}\, c^8y^4$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au cube c^8y^4, pour le côté duquel prenant $ccdy$, on trouuera $b \sim \frac{d^3}{a^3}$, & par consequent $x \sim \frac{d^9}{a^6cc}$, & au lieu de $z \sim \frac{a^6yy-b^6xx}{a^6x-b^6y}$, on aura $z \sim \frac{a^{18}+d^{18}}{a^{12}ccd^3}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^6d^{12},\ a^{12}d^6}{a^{18}+d^{18}}.$$

Sixieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$d \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{4096,\ 64}{262145}.$$

On peut encore autrement & tres facilement rendre quarrées les deux Puissances precedentes,

$$xz-yy.$$
$$yz-xx.$$

en supposant

$$x \sim \frac{ay}{b}.$$

pour auoir en entiers ces deux autres Puissances à égaler au quarré

$$abyz-bbyy.$$
$$bbyz-aayy.$$

dont la premiere $abyz-bbyy$, a ces deux nombres produisans,

$$by.$$
$$az-by.$$

que l'on égera entre eux par cette Equation, $by \sim az-by$, dans laquelle on trouuera en entiers,

$$y \sim a.$$
$$z \sim 2b.$$

& la deuxieme Puissance $bbyz-aayy$, se changera en celle-cy, $2ab^3-a^4$, qu'il faut égaler au quarré. Pour cette fin supposez

$$b \sim \omega + a.$$

pour auoir cette autre Puissance à égaler au quarré, $a^4+6a^3\omega+6aa\omega\omega+2a\omega^3$, pour le côté duquel prenant $aa+3a\omega$, on trouuera

$$a \backsim 2.$$
$$\omega \backsim 3.$$

& par consequent

$$y \backsim 2.$$
$$b \backsim 5.$$
$$z \backsim 10.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2,5}{25}.$$

Pour auoir vne autre Solution, au lieu de prendre $aa+3a\omega$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance precedente $a^4+6a^3\omega+6aa\omega\omega+2a\omega^3$, on doit prendre $aa+3a\omega - \frac{3}{2}\omega\omega$, & alors on trouuera en entiers,

$$a \backsim 9.$$
$$\omega \backsim 44.$$

& par consequent

$$b \backsim 53.$$
$$y \backsim 9.$$
$$x \backsim \frac{81}{53}.$$
$$z \backsim 106.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{81,477}{5618}.$$

Par le moyen de l'vne de ces deux solutions, on en pourra trouuer autant d'autres que l'on voudra. Comme si l'on veut se seruir de la premiere solution, où nous auons trouué

$$a \backsim 2.$$
$$\omega \backsim 3.$$

on supposera

$$\omega \backsim u+3.$$

& au lieu de la Puissance precedente $a^4+6a^3\omega+6aa\omega\omega+2a\omega^3$, on aura en moindres termes, celle-cy à égaler au quarré, $121+75u+15uu$, pour le côté duquel prenant $11+\frac{75}{22}u$, on trouuera $u \backsim -\frac{1635}{484}$, & par consequent

$$\omega \backsim -\frac{183}{484}.$$
$$b \backsim \frac{785}{484}.$$
$$x \backsim \frac{1936}{785}.$$
$$y \backsim 2.$$
$$z \backsim \frac{785}{242}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{468512,\ 379940}{616225}.$$

Mais il vaudra mieux chercher vne Solution indefinie, en multipliant le premier Nombre produisant by, par le quarré indeterminé cc, & le deuxieme $az-by$, par le quarré indeterminé dd, pour auoir ces deux produits,

$$bccy.$$
$$addz-bddy.$$

que l'on égalera ensemble par cette Equation, $bccy \backsim addz-bddy$, dans laquelle on trouuera en entiers,

$$y \backsim add.$$
$$z \backsim bcc+bdd.$$

& la deuxieme Puissance $bbyz-aayy$, se changera en celle-cy, $ab^3cc+ab^3dd-a^4dd$, qu'il faut égaler au quarré. Pour cette fin supposez comme auparauant,

$$b \backsim a+\omega.$$

pour auoir cette autre Puissance à égaler au quarré, $a^4cc+3a^3cc\omega+3a^3dd\omega+3aacc\omega\omega+3aadd\omega\omega+acc\omega^3+add\omega^3$, pour le côté duquel prenant $aac+\frac{3}{2}ac\omega+\frac{3add\omega}{2c}$, on trouuera en entiers,

$$a \backsim 4c^4+4ccdd.$$
$$\omega \backsim 9d^4+6ccdd-3c^4.$$

& par consequent

$$b \backsim c^4+10ccdd+9d^4.$$
$$z \backsim c^6+11c^4dd+19ccd^4+9d^6.$$
$$y \backsim 4ccd^4+4c^4dd.$$
$$x \backsim 16c^4d^6+32c^6d^4+16c^8dd.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Settieme Solution.

$$\frac{16c^4d^6+32c^6d^4+16c^8dd,\ 4c^6d^4+40c^4d^6+36ccd^8+4c^8dd+40c^6d^4+36c^4d^6}{c^{10}+22c^8dd+138c^6d^4+298c^4d^6+261ccd^8+81d^{10}}.$$

Si l'on suppose

$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2,\ 2}{25}.$$

& si l'on suppose

$$c \backsim 2.$$
$$d \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{256,\ 208}{845}.$$

On aura vne Solution plus simple, si on égale autrement

au quarré la Puissance precedente $ab^3cc + ab^3\partial\partial - a^4\partial\partial$, ce qui se fera par le Moyen de ses deux Nombres produisans,

$$ab.$$

$$bbcc + bb\partial\partial - \frac{a^3\partial\partial}{b}.$$

que l'on rendra quarrez en cette sorte.

Egalez le second $bbcc + bb\partial\partial - \frac{a^3\partial\partial}{b}$, au quarré $bbcc - 2bbc\partial + bb\partial\partial$, dont le côté est $bc \ldots b\partial$, pour avoir en entiers,

$$c \sim a^3.$$

$$\partial \sim 2b^3.$$

& le premier ab, au quarré mm, pour avoir

$$a \sim \frac{mm}{b}.$$

& par consequent

$$c \sim \frac{m^6}{b^3}.$$

$$y \sim 4b^5mm.$$

$$z \sim \frac{m^{12}}{b^5} + 4b^7.$$

$$x \sim 4b^3m^4.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Huitieme Solution.

$$\frac{4b^8m^4,\ 4b^{10}mm}{m^{12} + 4b^{12}}.$$

Si l'on suppose

$$b \sim 1.$$

$$m \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{16,\ 4}{1025}.$$

Si vous voulez une Solution plus generale, égalez le second Nombre produisant $bbcc + bb\partial\partial - \frac{a^3\partial\partial}{b}$, au quarré $bbcc - 2bc\partial m + \partial\partial mm$, dont le côté est $bc \ldots \partial m$, pour avoir

$$c \sim a^3 - b^3 + bmm.$$

$$\partial \sim 2bbm.$$

& le premier ab, au quarré pp, pour avoir

$$a \sim \frac{pp}{b}.$$

& par consequent

$$c \sim \frac{p^6 - b^6 + b^4mm}{b^3}.$$

$$y \sim 4b^3ppmm.$$

$$x \sim 4bmmp^4.$$

$$z \sim \frac{b^{12} - b^6p^6 + p^{12} + 2b^4mmp^6 + 2b^{10}mm + b^8m^4}{b^5}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Neuvieme Solution.

$$\frac{4b^6mmp^4,\ 4b^8mmpp}{b^{12} - b^6p^6 + p^{12} + 2b^4mmp^6 + 2b^{10}mm + b^8m^4}.$$

Si l'on suppose

$b \sim 2.$

$b \sim 1.$

$m \sim 1.$

$p \sim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{164}{1025}.$

La derniere Puissance $bbyz-aayy$ a aussy ces deux Nombres produisans,

$by.$

$bz-\frac{aay}{b}.$

dont on fera cette Equation, $by \sim bz-\frac{aay}{b}$, dans laquelle on trouuera en entiers,

$y \sim bb.$

$z \sim aa+bb.$

& la premiere Puissance $abyz-bbyy$ se changera en celle-cy, $a^3b^3+ab^5-b^6$, ou en moindres termes, $a^3b+ab^3-b^4$, que l'on rendra quarrée en supposant

$a \sim \omega+b.$

pour auoir cette autre Puissance à égaler au quarré, $b^4+4b^3\omega+3bb\omega\omega+b\omega^3$, pour le côté duquel prenant $bb+2b\omega$, on trouuera en entiers

$\omega \sim 1.$

$b \sim 1.$

& par consequent

$a \sim 2.$

$y \sim 1.$

$z \sim 5.$

$x \sim 2.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{12}{5}.$

Pour auoir Vne autre solution, au lieu de prendre $bb+2b\omega$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance $b^4+4b^3\omega+3bb\omega\omega+b\omega^3$, prenez $bb+2b\omega \cdots \frac{1}{4}\omega\omega$, & vous trouuerez

$\omega \sim 12.$

$b \sim 1.$

& par consequent

$a \sim 13.$

$y \sim 1.$

$z \sim 170.$

$x \sim 13.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{13,\ 1}{170}.$$

Par le Moyen de ces deux solutions, on en peut trouuer autant d'autres que l'on voudra, comme si l'on veut se seruir de la premiere, où Nous auons trouué

$$b \sim 1.$$
$$\omega \sim 1.$$

on supposera

$$\omega \sim u+1.$$

& au lieu de la Puissance $b^4+4b^3\omega+3bb\omega\omega+b\omega^3$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $9+13u+6uu+u^3$, pour le côté duquel prenant $3+\frac{13}{6}u$, on trouuera

$$u \sim -\frac{47}{36}.$$
$$\omega \sim -\frac{11}{36}.$$
$$a \sim \frac{25}{36}.$$
$$y \sim 1.$$
$$z \sim \frac{1921}{1296}.$$
$$x \sim \frac{25}{36}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{900,\ 1296}{1921}.$$

Mais il vaudra mieux resoudre la Question indefiniment, sauoir en multipliant le premier nombre produisant by, par le quarré indeterminé cc, & le deuxieme $bz-\frac{aay}{b}$, par le quarré indeterminé dd, pour auoir ces deux produits,

$$bccy.$$
$$bddz-\frac{aaddy}{b}.$$

que l'on égalera ensemble par cette Equation, $bddz \sim \frac{aadd}{b}y$, dans laquelle on trouuera en entiers,

$$y \sim bbdd.$$
$$z \sim aadd+bbcc.$$

& au lieu de la premiere Puissance $abyz-bbyy$, on aura en Moindres termes, celle-cy à égaler au quarré, $a^3bd^4+ab^3ccdd-b^4d^4$. Pour cette fin on en diminuera le Nombre des termes par cette Equation, $ab^3ccdd \sim b^4d^4$, dans laquelle on trouuera

$$a \sim dd.$$
$$b \sim cc.$$

C'est pourquoy on aura

$$y \sim c^4dd$$
$$z \sim c^6+d^6.$$
$$x \sim ccd^6.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ccd4,\ c4dd}{c6+d6}.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 4.$$

$$d \sim 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{10000,\ 6400}{19721}.$$

Nous Nous sommes contenté de diminuer seulement le Nombre des termes de la Puissance $a^3bd^4 + ab^3ccdd - b^4d^4$, parceque ainsy elle est deuenue quarrée, mais on la peut autrement rendre quarrée, sauoir en égalant auparauant au quarré le terme a^3bd^4, ou bien le terme ab^3ccdd, ce qui se fera tout ensemble, si on égale au quarré le Plan ab, comme au quarré mm, & alors on trouuera $b \sim \frac{mm}{a}$, & au lieu de la Puissance precedente $a^3bd^4 + ab^3ccdd - b^4d^4$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $aad^4mm + \frac{ccddm^6}{aa} - \frac{d^4m^8}{a^4}$, pour le côté duquel prenant $addm \cdots \frac{cdm^3}{a}$, on trouuera en entiers,

$$c \sim m^4.$$

$$d \sim 2a^4.$$

$$y \sim 4a^6m^4.$$

$$x \sim 4a^8mm.$$

$$z \sim 4a^{10} + \frac{m^{12}}{aa}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4a^{10}mm,\ 4a^8m^4}{4a^{12}+m^{12}}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$

$$m \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{36,\ 324}{531445}.$$

Mais sans qu'il soit besoin de faire aucune supposition particuliere, on peut tres facilement rendre quarrées les deux premieres Puissances

$$xz - yy.$$

$$yz - xx.$$

par une metode differente des precedentes, comme vous alez voir.

Les deux Nombres produisans de la premiere Puissance $xz - yy$, sont tels,

$$x.$$

$$z - \frac{yy}{x}.$$

dont le premier x, étant multiplié par le quarré indeterminé & le deuxieme $z-\frac{yy}{x}$ par le quarré indeterminé bb, on aura ces deux produits,

$$aax.$$
$$bbz-\frac{bbyy}{x}.$$

que l'on égalera ensemble par cette Equation, $aax \sim bbz-\frac{bbyy}{x}$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{aaxx+bbyy}{bbx}$, & la seconde Puissance $yz-xx$, se changera en celle-cy, $\frac{aaxxy+bby^3}{bbx}-xx$, que l'on multipliera par le nombre quarré $bbxx$, pour auoir en entiers cette autre autre Puissance à égaler au quarré, $aax^3y+bbxy^3-bbx^4$. Pour cette fin, supposez

$$y \sim w+x.$$

& vous aurez cette autre & derniere Puissance à égaler au quarré, $aax^4+aax^3w+3bbx^3w+3bbxxww+bbxw^3$, pour le côté duquel prenant $axx+\frac{1}{2}axw+\frac{3bbxw}{2a}$, on trouuera en entiers,

$$x \sim 4aabb.$$
$$w \sim a^4-6aabb+9b^4.$$

& par consequent

$$y \sim a^4-2aabb+9b^4$$
$$z \sim \frac{a^8+12a^6bb+22a^4b^4-36aab^6+81b^8}{4aabb}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Dixieme Solution.

$$\frac{16a^4b^4,\ 4a^6bb-8a^4b^4+36aab^6}{a^8+12a^6bb+22a^4b^4-36aab^6+81b^8}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{256,\ 272}{1313}.$$

On peut autrement rendre quarrée la Puissance precedente $aax^3y+bbxy^3-bbx^4$, en faisant éuanouir le premier & le dernier terme, qui sont de differente affection, par cette Equation, $aax^3y \sim bbx^4$, dans laquelle on trouuera en entiers,

$$x \sim aa.$$
$$y \sim bb.$$

& la Puissance $aax^3y+bbxy^3-bbx^4$, se changera en celle-cy, aab^8, laquelle se rencontrant quarrée, le Question se trouue resolue, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{[illegible]4bb,\ [illegible]ab4}{a^6+b^6}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 6.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{36,\ 1296}{46657}.$$

Ainsy vous voyez que par plusieurs metodes differentes on trouve la même solution, car la solution precedente est la même que la deuxieme, que nous avons deja trouvée par plusieurs autres metodes differentes. Mais si vous voulez une solution differente de la precedente, où nous avons trouvé

$$x \sim aa.$$

$$y \sim bb.$$

Supposez

$$y \sim c\omega + bb.$$

& au lieu de la Puissance precedente $aax^3y + bbxy^3 - bbx^4$, vous aurez en moindres termes celle-cy à égaler au quarré, $b^8 + a^6cc\omega + 3b^6c\omega + 3b^4cc\omega\omega + bbc^3\omega^3$, pour le côté duquel prenant $b^4 + \frac{a^6c\omega}{2b^4} + \frac{3}{2}bbc\omega$, on trouvera

$$\omega \sim \frac{a^{12} + 6a^6b^6 - 3b^{12}}{4b^{10}c}.$$

& par consequent

$$y \sim \frac{a^{12} + 6a^6b^6 + b^{12}}{4b^{10}}.$$

$$z \sim \frac{a^{24} + 12a^{18}b^6 + 38a^{12}b^{12} + 28a^6b^{18} + b^{24}}{16aab^{20}}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{16a^4b^{20},\ 4a^{14}b^{10} + 24a^8b^{16} + 4aab^{12}}{a^{24} + 12a^{18}b^6 + 38a^{12}b^{12} + 28a^6b^{18} + b^{24}}.$$ onzieme solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{256,\ 71676}{20080385}.$$

On trouvera encore la même seconde solution dans la premiere double Egalité,

$$xz - yy.$$

$$yz - xx.$$

Si on égale la premiere Puissance $xz - yy$ au quarré $\frac{aayy}{bb}$, pour avoir $z \sim \frac{aayy + bbyy}{bbx}$, & la deuxieme $yz - xx$ au quarré $\frac{ccxx}{dd}$, pour avoir le même $z \sim \frac{ccxx + ddxx}{ddy}$: ce qui donne cette Equation, $\frac{aayy + bbyy}{bbx} \sim \frac{ccxx + ddxx}{ddy}$, ou $y^3 \sim \frac{bbccx^3 + bbddx^3}{aadd + bbdd}$, ou $y \sim x\sqrt[3]{\frac{bbcc + bbdd}{aadd + bbdd}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au cube, $\frac{bbcc + bbdd}{aadd + bbdd}$. Divisez-la par le cube $\frac{b^3}{d^3}$, & vous aurez cette autre Puissance à égaler au cube, $\frac{ccd + d^3}{aab + b^3}$. Pour cette fin, supposez

$$d \sim \frac{ac}{b}.$$

& alors vous aurez cette autre & derniere Puissance à

égaler au cube, $\frac{a}{b}$, pour le côté duquel prenant $\frac{m}{b}$, on trouuera $a \sim \frac{m^3}{bb}$. c'est pourquoy au lieu de $d \sim \frac{ac}{b}$, on aura $d \sim \frac{cm^3}{b^3}$, & au lieu de $y \sim x\sqrt{(3)\frac{bbcc+bbdd}{aadd+bbdd}}$, on aura $y \sim \frac{bbx}{mm}$, & dans cette Equation, l'on trouuera en entiers,

$$x \sim mm.$$

$$y \sim bb.$$

& au lieu de $z \sim \frac{aayy+bbyy}{bbx}$, ou de $z \sim \frac{ccxx+ddxx}{ddy}$, on aura $z \sim \frac{b^6+m^6}{bbmm}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bbm4,\ b4mm}{b^6+m^6}.$$

Si l'on suppose

$$b \sim 5.$$

$$m \sim 6.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{32400,\ 22500}{62281}.$$

On void aisément par cette solution & par plusieurs autres des precedentes, que l'on peut donner aux deux Nombres qu'on cherche, la raison de deux quarez. Ainsy on pourra mettre

$$\frac{xx,\ yy}{z\omega}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & alors selon les conditions de la Question, on aura en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$z\omega xx - y4.$$

$$z\omega yy - x4.$$

Egalez la premiere $z\omega xx - y4$, au quarré $aabb$, pour auoir $z \sim \frac{aabb+y4}{xx\omega}$, & la deuxieme $z\omega yy - x^4$ au quarré $ccdd$, pour auoir le même $z \sim \frac{ccdd+x4}{yy\omega}$, & par consequent cette Equation, $\frac{aabb+y4}{xx\omega} \sim \frac{ccdd+x4}{yy\omega}$, ou $aabbyy + y6 - ccddxx - x^6 \sim 0$. Il en faut detruire les deux termes $aabbyy$, $x6$, qui sont de differente affection, par cette Equation, $aabbyy \sim x^6$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{x^3}{ab}$, & par consequent $y3 \sim \frac{x^9}{a^3b3}$, & au lieu de l'Equation precedente $aabbyy + y6 - ccddxx - x6 \sim 0$, on aura celle-cy, $y^6 - ccddxx \sim 0$, dans laquelle on trouuera $d \sim \frac{x^8}{a^3b3c}$, & au lieu de $z \sim \frac{aabb+y4}{xx\omega}$, ou de $z \sim \frac{ccdd+x4}{yy\omega}$, on aura $z \sim \frac{a^6b^6+x^{12}}{a4b4xx\omega}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^4b^4x^4,\ aabbx^8}{a^6b^6+x^{12}}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$

$$b \sim 1.$$

$$x \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{16,256}{4097}.$$

On peut autrement égaler au quarré les deux Puissances precedentes

$$z\omega xx - y^4.$$
$$z\omega yy - x^4.$$

sauoir par le moyen des deux nombres produisans de la premiere $z\omega xx - y^4$, qui sont tels,

$$zx.$$
$$\omega x - \frac{y^4}{zx}.$$

que l'on égalera ensemble par cette Equation, $zx \backsim \omega x - \frac{y^4}{zx}$, dans laquelle on trouuera $\omega \backsim \frac{xxzz + y^4}{xxz}$, & au lieu de la seconde Puissance $z\omega yy - x^4$, on aura en entiers celle-cy à égaler au quarré, $y^6 + xxyyzz - x^6$, pour le côté duquel prenant y^3, on trouuera $z \backsim \frac{xx}{y}$. c'est pourquoy au lieu de $\omega \backsim \frac{xxzz + y^4}{xxz}$, on aura $\omega \backsim \frac{x^6 + y^6}{x^4 y}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{x^4yy,\ xxy^4}{x^6 + y^6}$$

Si l'on suppose

$$x \backsim 3.$$
$$y \backsim 7.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3969,\ 21609}{118378}.$$

Vous voyez par cette solution, que l'on peut donner aux deux Nombres qu'on cherche, la raison de deux quarrez donnez: Mais on aura vne autre Solution, si l'on suppose

$$z \backsim u \dots \frac{xx}{y}.$$

& alors la Puissance precedente $y^6 + xxyyzz - x^6$, se changera en celle-cy, $uuxxyy - 2ux^4y + x^6$, laquelle étant égalée au quarré $uuxxyy$, on trouuera $u \backsim \frac{y^5}{2x^4}$. c'est pourquoy au lieu de $z \backsim u \dots \frac{xx}{y}$, on aura $z \backsim \frac{y^6 \dots 2x^6}{2x^4y}$, & au lieu de $\omega \backsim \frac{xxzz + y^4}{xxz}$, on aura $\omega \backsim \frac{4x^{12} + y^{12}}{2x^4y^7 \dots 4x^{10}y}$, & par consequent $z\omega \backsim \frac{y^{18} + 4x^{12}y^6 \dots 2y^{12}x^6 \dots 8x^{18}}{4x^8y^8 - 8x^{14}yy}$, ou $z\omega \backsim \frac{4x^{12} + y^{12}}{4x^8yy}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4x^{10}y^4,\ 4x^8y^4}{4x^{12} + y^{12}}.$$

Parceque nous auons supposé

$$x \backsim 3.$$
$$y \backsim 7.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{11573604,\ 63011844}{13843412965}.$$

& si l'on suppose

$x \sim 1.$

$y \sim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur, $\frac{4,16}{1025}$.

On trouuera la même Solution que la deuxieme des deux precedentes, en Multipliant ensemble les deux Puissances

$zwxx - y^4.$

$zwyy - x^4.$

& en égalant leur produit $xxyyzzww - x^6zw - y^6zw + x^4y^4$, au quarré x^4y^4, pour auoir $zw \sim \frac{x^6+y^6}{xxyy}$, &c.

La Même Solution viendra encore, si aprez auoir égalé comme auparauant, la premiere Puissance $zwxx - y^4$, au quarré $aabb$, pour auoir $zw \sim \frac{aabb+y^4}{xx}$, & la deuxieme $zwyy - x^4$, au quarré $ccdd$, pour auoir le Même $zw \sim \frac{ccdd+x^4}{yy}$, & par consequent cette Equation, $\frac{aabb+y^4}{xx} \sim \frac{ccdd+x^4}{yy}$, ou $x^6 - y^6 \sim aabbyy - ccddxx$, on Multiplie cette derniere Equation par $x^6 - y^6$, pour auoir cette autre Equation, $x^{12} - 2x^6y^6 + y^{12} \sim aabbx^6yy - ccddx^8 - aabby^8 + ccddxxy^6$, dont la Racine quarré donne celle-cy, $x^6 - y^6 \sim \sqrt{aabbx^6yy - ccddx^8 - aabby^8 + ccddxxy^6}$, Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $aabbx^6yy - ccddx^8 - aabby^8 + ccddxxy^6$, pour le côté duquel prenant $abx^3y - cdxy^3$, en sorte qu'on ayt cette Equation, $x^6 - y^6 \sim abx^3y - cdxy^3$, on aura cette autre Equation, $ccddx^8 - 2abcdx^4y^4 + aabby^8 \sim 0$, dont la Racine quarrée donne celle-cy, $cdx^4 - aby^4 \sim 0$, dans laquelle on trouuera $cd \sim \frac{aby^4}{x^4}$, & au lieu de l'Equation precedente, $x^6 - y^6 \sim abx^3y - cdxy^3$, on aura celle-cy, $x^6 - y^6 \sim abx^3y - \frac{aby^7}{x^3}$, ou $x^9 - x^3y^6 \sim abx^6y - aby^7$, laquelle étant diuisée par $x^6 - y^6$, on aura celle-cy, $x^3 \sim aby$, dans laquelle on trouuera $ab \sim \frac{x^3}{y}$. c'est pourquoy au lieu de $cd \sim \frac{aby^4}{x^4}$, on aura $cd \sim \frac{y^3}{x}$, & au lieu de $zw \sim \frac{aabb+y^4}{xx}$, ou de $zw \sim \frac{ccdd+x^4}{yy}$, on aura $zw \sim \frac{x^6+y^6}{xxyy}$, comme auparauant.

Pour auoir Une autre Solution, Vous trouuerez dans l'Equation precedente $x^3 \sim aby$,

$y \sim \frac{x^3}{ab}.$

c'est pourquoy au lieu de $zw \sim \frac{aabb+y^4}{xx}$, ou de $zw \sim \frac{ccdd+x^4}{yy}$, on aura $zw \sim \frac{a^6b^6+x^{12}}{a^4b^4xx}$, & l'on trouuera Une Solution semblable à la premiere des deux precedentes.

On peut donner aux deux Nombres qu'on cherche, la raison de deux Puissances semblables telles que l'on voudra: ~~comme~~ comme si on leur veut donner la raison de deux cubes, on

mettra

$$\frac{x^3,\ y^3}{uz\omega}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, on aura en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$uz\omega x^3 - y^6.$$

$$uz\omega y^3 - x^6.$$

Egalez la premiere $uz\omega x^3 - y^6$ au quarré a^6, pour avoir $uz\omega \sim \frac{a^6+y^6}{x^3}$, & la deuxieme $uz\omega y^3 - x^6$ au quarré b^6, pour avoir le même $uz\omega \sim \frac{b^6+x^6}{y^3}$, & par consequent cette Equation, $\frac{a^6+y^6}{x^3} \sim \frac{b^6+x^6}{y^3}$, ou $a^6y^3 + y^9 \sim b^6x^3 + x^9$, que vous reduirez en ces deux,

$$x^9 \sim a^6y^3.$$

$$y^9 \sim b^6x^3.$$

Dans la premiere $x^9 \sim a^6y^3$, on trouvera $y \sim \frac{x^3}{aa}$, & par consequent $y^9 \sim \frac{x^{27}}{a^{18}}$, & la deuxieme $y^9 \sim b^6x^3$, se changera en celle-cy, $\frac{x^{27}}{a^{18}} \sim b^6x^3$, ou $x^{24} \sim a^{18}b^6$, dans laquelle on trouvera $b \sim \frac{x^4}{a^3}$, & au lieu de $uz\omega \sim \frac{a^6+y^6}{x^3}$, ou de $uz\omega \sim \frac{b^6+x^6}{y^3}$, on aura $uz\omega \sim \frac{a^{18}+x^{18}}{a^{12}x^3}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^{12}x^6,\ a^6x^{12}}{a^{18}+x^{18}}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$

$$x \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{64,\ 4096}{262145}.$$

Enfin on peut donner aux deux Nombres qu'on cherche, telle raison que l'on voudra, pourvû qu'elle soit égale à celle d'un quarré donné à un Nombre donné composé de ce quarré & d'un autre quarré donné. Comme si l'on donne ces deux Nombres,

$$4 \sim bb.$$

$$13 \sim aa+bb.$$

où l'on a

$$b \sim 2.$$

$$a \sim 3.$$

on mettra

$$\frac{bb,\ aa+bb}{xx+yy}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, on aura en entiers cette double Egalité,

$$bbxx+bbyy-a^4-2aabb-b^4.$$

$$aaxx+bbxx+aayy+bbyy-b^4.$$

Si on égale la premiere Puissance $bbxx+bbyy-a^4-2aabb-b^4$ au quarré $bbyy$, on trouuera $x \sim \frac{aa}{b}+b$, & la deuxieme $aaxx+bbxx+aayy+bbyy-b^4$, se changera en celle-cy, $\frac{a^6}{bb}+3a^4+3aabb+aayy+bbyy$, laquelle étant égalée au quarré $\frac{a^6}{bb}+4a^4+4aabb$, dont le côté est $\frac{a^3}{b}+2ab$, on trouuera $y \sim a$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

Douzieme Solution.

$$\frac{b^4,\ aabb+b^4}{a^4+3aabb+b^4}.$$

Parceque nous auons supposé

$a \sim 3.$

$b \sim 2.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{16,\ 52}{205}.$$

On tire de cette solution indefinie, le canon suiuant;

Canon. Si au quarré du second terme de la raison donnée on ajoute le produit des deux quarrez dont ce second terme est composé, & que par la somme on diuise le quarré du premier terme, & le produit des deux termes; on aura les deux nombres qu'on cherche.

Il s'ensuit que l'on peut donner aux deux nombres qu'on cherche, une raison double, auquel cas les deux quarrez aa, bb, seront égaux entre eux, & alors les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 2}{5}.$$

par le moyen desquels on en peut trouuer autant d'autres que l'on voudra dans la même raison double, en mettant

$$\frac{1,\ 2}{x+5}.$$

pour les deux nombres qu'on cherche, & alors selon les conditions de la Question, on aura en entiers cette double Egalité,

$1x+1.$

$2x+9.$

La difference de ces deux Puissances est $1x+8$, dont les deux nombres produisans sont tels,

$4.$

$\frac{1}{4}x+2.$

La moitié de leur somme est $\frac{1}{8}x+3$, dont le quarré $\frac{1}{64}xx+\frac{3}{4}x+9$, étant égalé à la plus grande Puissance $2x+9$, on trouuera $x \sim 80$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1,\ 2}{85}.$$

Pour auoir vne solution indefinie, égalez la premiere Puissance $2x+1$, au quarré indeterminé aa, pour auoir $x \backsim aa-1$, & la deuxieme $2x+9$, au quarré indeterminé bb, pour auoir le même $x \backsim \frac{1}{2}bb - \frac{9}{2}$, & par consequent cette Equation, $aa-1 \backsim \frac{1}{2}bb - \frac{9}{2}$, dans laquelle on trouuera $b \backsim \sqrt{2aa+7}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2aa+7$. Pour cette fin, supposez

$$a \backsim y+1.$$

pour auoir cette autre Puissance à égaler au quarré, $2yy+4y+9$, pour le côté duquel prenant $3 \cdots \frac{cy}{d}$, on trouuera $y \backsim \frac{6cd+4dd}{cc-2dd}$. C'est pourquoy au lieu de $a \backsim y+1$, on aura $a \backsim \frac{cc+6cd+2dd}{cc-2dd}$, & au lieu de $b \backsim \sqrt{2aa+7}$, on aura $b \backsim \frac{3cc+4cd+6dd}{cc-2dd}$, & enfin au lieu de $x \backsim aa-1$, ou de $x \backsim \frac{1}{2}bb - \frac{9}{2}$, on aura $x \backsim \frac{12c^3d+44ccdd+24cd^3}{c^4-4ccdd+4d^4}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^4-4ccdd+4d^4,\ 2c^4-8ccdd+8d^4}{5c^4+12c^3d+24ccdd+24cd^3+20d^4}.$$

Si l'on suppose

$$c \backsim 2.$$
$$d \backsim 1.$$

ou

$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 2}{85}.$$

comme auparauant: Mais si l'on suppose

$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1,\ 2}{13}.$$

& si l'on suppose

$$c \backsim 3.$$
$$d \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 2}{2813}.$$

Que si l'on suppose

$$c \backsim 7.$$
$$d \backsim 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 2}{95485}.$$

Pour faire que les Numerateurs des deux Nombres qu'on

cherche, soient toujours les mêmes Nombres 1, 2, il faut que les trois quantitez indeterminées a, b, x, soient exprimées par des Nombres entiers, ce qui se peut faire en une infinité de manieres. Pour cette fin il faut égaler à 1, ou à 2, le denominateur $cc-2dd$.

Si on égale à 1, le denominateur $cc-2dd$, on trouvera $c \sim \sqrt{2dd+1}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2dd+1$, pour le côté duquel prenant $1 \ldots \frac{dm}{n}$, on trouvera

$$d \sim \frac{2mn}{mm-2nn}.$$

$$c \sim \frac{mm+2nn}{mm-2nn}.$$

Si l'on suppose

$m \sim 1.$

$n \sim 1.$

on trouvera

$c \sim -3.$

$d \sim -2.$

$a \sim 9.$

$b \sim 13.$

$x \sim 80.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1,\ 2}{85}.$$

comme auparavant. Si l'on se sert des deux valeurs trouvées 3, 2, des lettres c, d, en supposant

$m \sim 3.$

$n \sim 2.$

on trouvera

$c \sim 17.$

$d \sim 12.$

$a \sim 1801.$

$b \sim 2547.$

$x \sim 3243600.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1,\ \ 2}{3243605}.$$

Pareillement si l'on se sert des deux valeurs trouvées 17, 12, des mêmes lettres c, d, en supposant

$m \sim 17.$

$n \sim 12.$

on trouvera

$c \sim 577.$

$d \sim 408.$

$a \sim 2078353.$

$b \sim 2939235.$

$x \sim 4319551192608.$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 2}{4319551192613}.$$

On peut aussy supposer

$m \sim 7.$

$n \sim 5.$

& alors on trouuera

$c \sim 99.$

$d \sim 70.$

$a \sim 61181.$

$b \sim 86523.$

$x \sim 3743114760.$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 2}{3743114765}.$$

Si on égale à 2, le denominateur $cc-2dd$, on trouuera $c \sim \sqrt{2dd+2}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2dd+2$. Pour cette fin, supposez

$d \sim z+1.$

pour auoir cette autre Puissance à égaler au quarré, $2zz+4z+4$, pour le côté duquel prenant $2 \ldots \frac{mz}{n}$, on trouuera $z \sim \frac{4mn+4nn}{mm-2nn}$. c'est pourquoy au lieu de $d \sim z+1$, on aura $d \sim \frac{mm+4mn+2nn}{mm-2nn}$, & au lieu de $c \sim \sqrt{2dd+2}$, on aura $c \sim \frac{2mm+4mn+4nn}{mm-2nn}$.

Si l'on suppose

$m \sim 1.$

$n \sim 1.$

on trouuera

$c \sim 10.$

$d \sim 7.$

$a \sim 309.$

$b \sim 437.$

$x \sim 95480.$

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1,\ 2}{95485}.$$

Si l'on suppose

$m \sim 10.$

$n \sim 7.$

on trouvera

$c \sim 338.$

$d \sim 239.$

$a \sim 356589.$

$b \sim 504293.$

$x \sim 127155714920.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{1,\ 2}{127155714925}.$

On peut aussy supposer comme auparavant,

$m \sim 3.$

$n \sim 2.$

& alors on trouvera

$c \sim 58.$

$d \sim 41.$

$a \sim 10497.$

$b \sim 14845.$

$x \sim 110187008.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{1,\ 2}{110187013}.$

II.

Trouver deux Nombres, tels que la somme du premier & du quarré du second, & l'excez du quarré du premier sur le second, soient des Nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

en sorte que la somme $lx+yy$ du premier & du quarré du second, & l'excez $xx-ly$ du quarré du premier sur le second, soient chacun Un Nombre quarré.

Canon. Si par l'excez du quadruple du produit de deux nombres indeterminez sur l'Vnité, on divise le produit sous le double du premier Nombre indeterminé & l'excez du quarré du second sur la Moitié du premier, & le produit sous le second & l'excez du même second sur le double du quarré du premier; on aura les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$yy+lx.$
$xx-ly.$

Si on égale la premiere $yy+lx$, au quarré $yy-2ay+aa$, dont le côté est $y-a$, on trouuera $y \sim \frac{lx}{2a}-\frac{1}{2}a$, & au lieu de la seconde $xx-ly$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $xx-\frac{llx}{2a}+\frac{1}{2}la$, pour le côté duquel prenant $x-b$, on trouuera $x \sim \frac{2abb-laa}{4ab-ll}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2abb-laa,\ lbb-2aab}{4ab-ll}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{17,\ 3}{11}.$$

Si vous voulez vne autre solution, aprez auoir égalé la premiere Puissance $yy+lx$ au quarré $yy-2ay+aa$, pour auoir $lx \sim aa-2ay$, égalez la seconde $xx-ly$ au quarré $xx-2bx+bb$, pour auoir le même $lx \sim \frac{lbb+lly}{2b}$, & par consequent cette Equation, $aa-2ay \sim \frac{lbb+lly}{2b}$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{2aab-lbb}{4ab+ll}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Seconde solution.

$$\frac{2abb+laa,\ 2aab-lbb}{4ab+ll}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 3.$$
$$b \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{15,\ 17}{13}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{3,\ 1}{5}.$$

On tire de cette seconde solution, le Canon suiuant.

Si par la somme de l'vnité & du quadruple du produit de deux Nombres indeterminez, on diuise la somme du quarré du premier Nombre indeterminé & du double solide sous le même Nombre & le quarré du second, & l'excez du double solide sous le second Nombre indeterminé & le quarré du premier sur le quarré du second; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Pour auoir vne troisieme solution, mettez

$$\frac{x,\ y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$yy + xz.$$
$$xx - yz.$$

Si on égale la premiere $yy+xz$ au quarré aa, on trouuera $z \sim \frac{aa-yy}{x}$, & si on égale la deuxieme $xx-yz$ au quarré bb, on trouuera le même $z \sim \frac{xx-bb}{y}$. c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{aa-yy}{x} \sim \frac{xx-bb}{y}$, ou $aay - y^3 \sim x^3 - bbx$, qu'on reduira en ces deux,

$$y^3 \sim bbx.$$
$$x^3 \sim aay.$$

Dans la premiere $y^3 \sim bbx$, on trouuera $x \sim \frac{y^3}{bb}$, & la deuxieme $x^3 \sim aay$, se changera en celle-cy, $\frac{y^9}{b^6} \sim aay$, dans laquelle on trouuera $a \sim \frac{y^4}{b^3}$: c'est pourquoy au lieu de $z \sim \frac{aa-yy}{x}$, on aura $z \sim \frac{y^6-b^6}{b^4y}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Troisieme Solution.

$$\frac{b^6y^4,\ b^4yy}{y^6-b^6}.$$

Si l'on suppose

$$b \sim 1.$$
$$y \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{16,\ 4}{63}.$$

On tire de cette troisieme solution, ce Canon plus simple.

Canon. Si de deux quarrez indeterminez, on diuise les produits sous chacun & le quarré de l'autre, par la difference de leurs cubes, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

III.

Trouuer deux Nombres, tels que la somme du premier & du quarré du second, & l'excez du second sur le quarré du premier, soient des nombres quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres,

$$\frac{x,\ y}{z}.$$

en sorte que la somme $\frac{x}{z} + \frac{yy}{zz}$, du premier & du quarré du second, & l'excez $\frac{y}{z} - \frac{xx}{zz}$ du second sur le quarré du premier, soient chacun Vn Nombre quarré.

Canon. Si par la somme d'Vn quarré indeterminé & du quadruple d'Vn autre, on diuise l'excez du double du second sur le premier, & la somme des deux mêmes quarrez indeterminez; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xz + yy.$$
$$yz - xx.$$

Egalez

Egalez la seconde $yz-xx$, au quarré aa, pour avoir $y\sim\frac{aa+xx}{z}$; & au lieu de la première $xz+yy$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $xz+\frac{a^4+2aaxx+x^4}{zz}$, pour le côté duquel prenant $x+\frac{aa+xx}{z}$, on trouvera $z\sim\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{9}{4}xx+2aa}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $\frac{9}{4}xx+2aa$, pour le côté duquel prenant $\frac{3}{2}x+b$, on trouvera $x\sim\frac{2aa}{3b}-\frac{1}{3}b$. c'est pourquoy au lieu de $z\sim\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{9}{4}xx+2aa}$, on aura $z\sim\frac{4aa}{3b}+\frac{1}{3}b$, & au lieu de $y\sim\frac{aa+xx}{z}$, on aura $y\sim\frac{aa}{3b}+\frac{1}{3}b$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2aa-bb,\ aa+bb}{4aa+bb}.$$

Si l'on suppose

$$a\sim2.$$
$$b\sim1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{7,\ 5}{17}.$$

& si l'on suppose

$$a\sim1.$$
$$b\sim1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1,\ 2}{5}.$$

qui ont encore les conditions de la Question precedente.

Ou bien égalez la premiere Puissance $xz+yy$ au quarré $aa+2ay+yy$, pour avoir $z\sim\frac{aa+2ay}{x}$, & la deuxieme $yz-xx$ au quarré bb, pour avoir le même $z\sim\frac{bb+xx}{y}$, & par consequent cette Equation, $\frac{aa+2ay}{x}\sim\frac{bb+xx}{y}$, ou $aay+2ayy\sim bbx+x^3$, que vous reduirez en ces deux

$$2ayy\sim x^3.$$
$$aay\sim bbx.$$

Dans la seconde $aay\sim bbx$, on trouvera $y\sim\frac{bbx}{aa}$, & la premiere $2ayy\sim x^3$, se changera en celle-cy, $\frac{2b^4xx}{a^3}\sim x^3$, dans laquelle on trouvera $x\sim\frac{2b^4}{a^3}$. c'est pourquoy au lieu de $y\sim\frac{bbx}{aa}$, on aura $y\sim\frac{2b^6}{a^5}$, & au lieu de $z\sim\frac{aa+2ay}{x}$, ou de $z\sim\frac{bb+xx}{y}$, on aura $z\sim\frac{a^6+4b^6}{2ab^4}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4aab^8,\ 4b^{10}}{a^{10}-4a^4b^6}.$$ Seconde Solution.

Si l'on suppose

$$a\sim2.$$
$$b\sim1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{4,\ 1}{272}.$$

On tire de cette seconde Solution, le canon suivant;

Canon. Si de deux quarrez indeterminez on divise le sursolide du second, & le produit sous le premier & le quarré du second, par l'excez du quart du sursolide du premier sur le produit sous le quarré du premier & le cube du second; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Pour avoir une troisieme Solution, reduisez l'Equation precedente $aay + 2ayy \backsim bbx + x^3$, en ces deux autres,

$$2ayy \backsim bbx.$$
$$aay \backsim x^3.$$

Dans la premiere $2ayy \backsim bbx$, on trouvera $x \backsim \frac{2ayy}{bb}$, & la deuxieme $aay \backsim x^3$, se changera en celle-cy, $aay \backsim \frac{8a^3y^6}{b^6}$, dans laquelle on trouvera $a \backsim \frac{b^6}{8y^5}$: c'est pourquoy au lieu de $x \backsim \frac{2ayy}{bb}$, on aura $x \backsim \frac{b^4}{4y^3}$, & au lieu de $z \backsim \frac{aa + 2ay}{x}$, ou de $z \backsim \frac{bb + xx}{y}$, on aura $z \backsim \frac{16bby^6 + b^8}{16y^7}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Troisieme Solution.

$$\frac{4b^4y^4,\ 16y^8}{b^8 + 16bby^6}.$$

Si l'on suppose

$$b \backsim 2.$$
$$y \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{4,\ 16}{17}.$$

On tire de cette troisieme Solution, le canon suivant.

Canon. Si de deux quarrez indeterminez, on divise le quarré-quarré du second, & le quart du produit de leurs quarrez, chacun par la somme du produit sous le quarré du premier & le cube du second, & du quarré-quarré de la moitié du premier; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

IV.

Trouver deux Nombres, tels que l'excez du quarré du second sur le premier, & l'excez du second sur le quarré du premier, soient des Nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$$\frac{x,\ y}{z}.$$

en sorte que l'excez $\frac{yy}{zz} - \frac{x}{z}$ du quarré du second sur le premier, & l'excez $\frac{y}{z} - \frac{xx}{zz}$ du second sur le quarré du premier, soient chacun un Nombre quarré.

Canon. Si par le quadruple de la somme de deux quarrez indeterminez, on divise l'excez du quadruple du premier sur le double du second, & la somme du second & du quadruple du premier; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$yy-xz.$$

$$yz-xx.$$

Egalez la seconde $yz-xx$, au quarré aa, pour avoir $y \backsim \frac{aa+xx}{z}$, & au lieu de la premiere $yy-xz$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $\frac{a^4+2aaxx+x^4}{zz}-xz$, pour le côté duquel prenant $\frac{aa+xx}{z} \cdots x$, on trouuera $z \backsim \sqrt{\frac{9xx}{4}+2aa}-\frac{1}{2}x$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $\frac{9}{4}xx+2aa$, pour le côté duquel prenant $\frac{3}{2}x+b$, on trouuera $x \backsim \frac{2aa}{3b}-\frac{1}{3}b$: c'est pourquoy au lieu de $z \backsim \sqrt{\frac{9}{4}xx+2aa}-\frac{1}{2}x$, on aura $z \backsim \frac{2aa}{3b}+\frac{2}{3}b$, & au lieu de $y \backsim \frac{aa+xx}{z}$, on aura $y \backsim \frac{2aa}{3b}+\frac{1}{6}b$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4aa-2bb,\ 4aa+bb}{4aa+4bb}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$

$$b \backsim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2,5}{8}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$

$$b \backsim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{7,10}{13}.$$

On peut autrement & plus facilement égaler au quarré la Puissance precedente $\frac{a^4+2aaxx+x^4}{zz}-xz$, si au lieu de prendre $\frac{aa+xx}{z}+x$, pour le côté de ce quarré, on prend $\frac{aa \cdots xx}{z}$, car on trouuera $x \backsim \frac{z^3}{4aa}$. C'est pourquoy au lieu de $y \backsim \frac{aa+xx}{z}$, on aura $y \backsim \frac{z^6+16a^6}{16a^4z}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4aaz^4,\ z^6+16a^6}{16a^4zz}.$$ Seconde Solution.

Si l'on suppose

$$z \backsim 1.$$

$$a \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{4,17}{16}.$$

& si l'on suppose

$$z \backsim 3.$$

$$a \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{324,745}{144}.$$

On tire de cette seconde solution, le canon suiuant,

Canon. Si de deux quarrez indeterminez on diuise le second par le quadruple du premier, on aura le premier des deux nombres qu'on cherche. & si au quarré de ce premier on ajoute le premier quarré indeterminé diuisé par le second, on aura l'autre nombre qu'on cherche.

Si vous voulez que la somme & la difference des deux nombres qu'on cherche, soient des nombres quarrez, il faudra égaler au quarré ces deux Puissances,

$$z^6+4aaz^4+16a^6.$$
$$z^6-4aaz^4+16a^6.$$

Leur difference est $8aaz^4$, qui a ces deux nombres produisans,

$$2z^3.$$
$$4aaz.$$

La moitié de leur somme est z^3+2aaz, dont le quarré $z^6+4aaz^4+4a^4zz$, étant égalé à la plus grande Puissance $z^6+4aaz^4+16a^6$, on trouuera en entiers,

$$a\backsim 1.$$
$$z\backsim 2.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4,5}{4}.$$

Question XXIII.

Trouuer deux Nombres, dont la Somme étant ajoutée au quarré de châcun, il vienne deux Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la somme $x+y$, étant ajoutée separément à leurs quarrez xx, yy, chaque somme $xx+1x+1y$, $yy+1x+1y$, soit un nombre quarré.

Canon. Si on diuise l'hypotenuse & la difference des deux côtez d'un triangle rectangle, par l'excez de l'hypotenuse sur cette même difference, on aura les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx+1x+1y.$$
$$yy+1x+1y.$$

Egalez la premiere $xx+1x+1y$ au quarré $xx+2lx+ll$, pour auoir $y\backsim x+l$, & la deuxieme $yy+1x+1y$ se changera en celle-cy, $xx+4lx+2ll$,

laquelle étant égalée au quarré $xx-2ax+aa$, on trouuera $x \sim \frac{aa-2ll}{2a+4l}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa-2ll,\ aa+2la+2ll}{2a+4l}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{1,\ 5}{4}.$$

Cette metode est toutafait la même que celle de Diophante, & on la peut rendre plus generale, en égalant la premiere Puissance $xx+lx+ly$, au quarré $xx+2ax+aa$, pour auoir $ly \sim aa+2ax-lx$, & alors au lieu de la seconde Puissance $yy+lx+ly$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $a^4+4a^3x+4aaxx-2laax-4laxx+llxx+llaa+2llax$, pour le côté duquel prenant $2ax \cdots lx \cdots ab$, on trouuera $x \sim \frac{abb-lba-a^3}{4aa+4ab+2ll-2lb-2la}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{abb-lba-a^3,\ 2a^4-3la^3+3llaa-2laab+4a^3b-labb+2aabb}{4aa+4ab+2ll-2la-2lb}.$$ Seconde Solution

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 2$$

les Deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{1,\ 5}{4}.$$

comme auparauant: Mais si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1,\ 19}{4}.$$

Pour auoir vne solution plus simple, au lieu de prendre $2ax \cdots lx \cdots ab$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance $a^4+4a^3x+4aaxx-2laax-4laxx+llxx+2llax+llaa$, il faut prendre $aa+2ax \cdots lx+lb$, & alors on trouuera $x \sim \frac{2aab-laa+lbb}{2la+2lb-4ab}$, & les Deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2aab-laa+lbb,\ 2abb+laa-lbb}{2la+2lb-4ab}.$$ Troisieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim \tfrac{1}{2}.$$
$$b \sim 1.$$

les Deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{5,\ 1}{4}.$$

comme auparauant: Mais si l'on suppose

$$a \sim \tfrac{1}{2}.$$
$$b \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{19,\ 1}{4}.$$

aussy comme auparauant. Que si l'on suppose

$$a \sim \tfrac{1}{2}.$$

$$b \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{41,\ 1}{4}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim \tfrac{1}{2}.$$

$$b \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{71,\ 1}{4}.$$

On peut faire que chacun des deux Nombres trouuez par cette troisieme Solution, soit vn Nombre quaré. Pour cette fin, il faudra égaler au quarré ces trois Puissances,

$$2la + 2lb - 4ab.$$

$$2abb + laa - lbb.$$

$$2aab - laa + lbb.$$

qui sont le Denominateur commun, & les Numerateurs des deux Nombres trouuez.

Egalez la premiere Puissance $2la+2lb-4ab$, au quarré ll, pour auoir $a \sim \frac{1}{2}l$, & les deux dernieres Puissances se changeront en ces deux autres,

$$bb + \tfrac{1}{2}lb - \tfrac{1}{4}ll.$$

$$\tfrac{1}{4}ll.$$

dont la seconde $\frac{1}{4}ll$ se trouue quarrée, & il ne restera plus qu'à égaler au quarré la premiere $bb+\frac{1}{2}lb-\frac{1}{4}ll$, ou $4bb+2lb-ll$, pour le côté duquel prenant $2b \cdots c$, on trouuera $b \sim \frac{cc+ll}{4c+2l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Quatrieme Solution.

$$\frac{c^4+2lc^3-llcc-2l^3c+l^4,\ 4llcc+4l^3c+l^4}{16cc+16lc+4ll}.$$

qui ont leurs Racines quarées,

$$\frac{cc+lc \cdots ll,\ 2lc+ll}{4c+2l}.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 9}{36}.$$

& si l'on suppose

$$c \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{121,\ 49}{196}.$$

On peut encore autrement rendre quarrées les deux Puissances

$$xx+lx+ly.$$

$$yy+lx+ly.$$

en égalant la premiere $xx+lx+ly$ au quarré $xx-2ax+aa$, pour auoir $x \backsim \frac{aa-ly}{2a+l}$, & la deuxieme $yy+lx+ly$, se changera en celle-cy, $yy+\frac{2lay+laa}{2a+l}$, laquelle étant égalée au quarré $yy-2by+bb$, on trouuera $y \backsim \frac{2abb-laa+lbb}{2la+2lb+4ab}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2aab+laa-lbb,\ 2abb-laa+lbb}{2la+2lb+4ab}.$$ Cinquieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$

$$b \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 11}{14}.$$

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'Vnité, mettez

$$\frac{x,\ y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez en entiers ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx+xz+yz.$$

$$yy+xz+yz.$$

Egalez la premiere $xx+xz+yz$ au quarré $xx+2ax+aa$, pour auoir $z \backsim \frac{aa+2ax}{x+y}$, & au lieu de la seconde $yy+xz+yz$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $yy+aa+2ax$, pour le côté duquel prenant $y+b$, on trouuera $y \backsim \frac{aa-bb+2ax}{2b}$. C'est pourquoy au lieu de $z \backsim \frac{aa+2ax}{x+y}$, on aura $z \backsim \frac{2aab+4abx}{aa-bb+2ax+2bx}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2aabx-2b^3x+4abxx+4bbxx}{4aabb+8abbx}.$$

$$\frac{a^4-2aabb+b^4+4a^3x-2b^3x-4abbx+2aabx+4abxx+4aaxx}{4aabb+8abbx}.$$ Sixieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$

$$b \backsim 2.$$

$$x \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{72,\ 9}{80}.$$

Ou bien égalez la premiere Puissance $xx+xz+yz$ au quarré aa, pour auoir $z \backsim \frac{aa-xx}{x+y}$, & la deuxieme $yy+xz+yz$ au quarré bb, pour auoir le même $z \backsim \frac{bb-yy}{x+y}$, & par consequent cette Equation, $aa-xx \backsim bb-yy$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \sqrt{xx-aa+bb}$. Ainsy on aura cette

Puissance à égaler au quarré, $xx-aa+bb$, pour le côté duquel prenant $x \cdots c$, on trouvera $x \backsim \frac{aa-bb+cc}{2c}$, c'est pourquoy au lieu de $y \backsim \sqrt{xx-aa+bb}$, on aura $y \backsim \frac{aa-bb-cc}{2c}$, & au lieu de $z \backsim \frac{aa-xx}{x+y}$, ou de $z \backsim \frac{bb-yy}{x+y}$, on aura $z \backsim \frac{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}{4aac-4bbc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Settieme Solution.

$$\frac{2a^4-4aabb+2aacc-2bbcc+2b^4}{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}.$$

$$\frac{2a^4-4aabb-2aacc+2bbcc+2b^4}{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}.$$

Si l'on suppose

$a \backsim 6.$

$b \backsim 5.$

$c \backsim 3.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{110,\,11}{224}.$

& si l'on suppose

$a \backsim 6.$

$b \backsim 4.$

$c \backsim 3.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{232,\,88}{91}.$

Mais si l'on suppose

$a \backsim 4.$

$b \backsim 3.$

$c \backsim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{154,\,42}{135}.$

Determination. La determination de cette Question ainsy resolue, à l'égard des trois quantitez indeterminées a, b, c, est que si la premiere a est plus grande que la deuxieme b, elle doit neanmoins être plus petite que la somme $b+c$ des deux autres, & son quarré aa plus grand que la somme $bb+cc$ des quarrez des deux mêmes.

Demonstration. Car dans le Numerateur $2a^4-4aabb+2aacc-2bbcc+2b^4$, du premier Nombre trouvé, on a cette inégalité, $2a^4-4aabb+2aacc-2bbcc+2b^4 \oplus 0$, ou $a^4-2aabb+aacc \oplus bbcc-b^4$, dans laquelle on trouvera $a \oplus b$. Ce qui convient à la supposition qui a été faite.

De plus dans le Numerateur $2a^4-4aabb-2aacc+2bbcc+2b^4$, du second nombre trouvé, on a cette inegalité, $2a^4-4aabb-2aacc+2bbcc+2b^4 \oplus 0$, ou $a^4-2aabb+aacc \oplus -bbcc-b^4$, dans laquelle on trouvera $aa \oplus bb+cc$. Ce qui est l'une des deux choses qu'il faloit demontrer.

Enfin

Enfin dans le denominateur commun $2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4$, des deux Nombres trouvez, on a cette inégalité, $2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4 \oplus 0$, ou $a^4-2aabb-2aacc \ominus 2bbcc-b^4-c^4$, dans laquelle on trouvera $a \ominus b+c$. Ce qui restoit à demontrer.

Au lieu de prendre $x \cdots c$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance $xx-aa+bb$, on peut prendre $x \cdots b \cdots c$, & alors on trouvera $x \backsim \frac{cc+2bc+aa}{2b+2c}$. C'est pourquoy au lieu de $y \backsim \sqrt{xx-aa+bb}$, on aura $y \backsim \frac{cc+2bc+2bb-aa}{2b+2c}$, & au lieu de $z \backsim \frac{aa-xx}{x+y}$, ou de $z \backsim \frac{bb-yy}{x+y}$, on aura $z \backsim \frac{4aabb+4aabc+2aacc-4bbcc-4bc^3-a^4-c^4}{4b^3+12bbc+12bcc+4c^3}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2c^4+8bc^3+10bbcc+4b^3c+2aacc+4aabc+2aabb}{4aabb+4aabc+2aacc-4bbcc-4bc^3-a^4-c^4}.$$ Huitieme Solution.

$$\frac{2c^4+8bc^3+14bbcc+12b^3c+4b^4-2aacc-4aabc-2aabb}{4aabb+4aabc+2aacc-4bbcc-4bc^3-a^4-c^4}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim \tfrac{1}{2}.$$
$$c \backsim \tfrac{1}{2}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{8,56}{15}.$$

On peut donner aux deux Nombres qu'on cherche, telle raison que l'on voudra, comme la raison des deux Nombres donnez

$$2 \backsim x.$$
$$1 \backsim y.$$

savoir en égalant au quarré les deux Puissances precedentes,

$$xx+xz+yz.$$
$$yy+xz+yz.$$

par la Metode de Diophante, comme vous alez voir.

La difference de ces deux Puissances est $xx-yy$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$$x+y.$$
$$x-y.$$

qui ne se trouvent pas icy propres à resoudre cette Double Egalité, c'est pourquoy on multipliera le premier $x+y$, par le Nombre indeterminé $\frac{a}{b}$, & on divisera le second $x-y$, par le même Nombre $\frac{a}{b}$, pour avoir ces deux autres Nombres produisans,

$$\frac{ax+ay}{b}.$$
$$\frac{bx-by}{a}.$$

La moitié de leur somme est $\frac{aax+aay+bbx-bby}{2ab}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xx+xz+yz$, on trouvera

$z \backsim \frac{a^4xx + 2a^4xy + a^4yy - 2aabbxx + b^4xx - 2aabbyy - 2b^4xy + b^4yy}{4aabbx + 4aabby}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Neuvieme Solution.

$$\frac{4aabbxx + 4aabbxy,\ 4aabbyy + 4aabbxy}{a^4xx + 2a^4xy + a^4yy - 2aabbxx + b^4xx - 2aabbyy - 2b^4xy + b^4yy}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$x \backsim 2.$$
$$y \backsim 1.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{32,\ 16}{35}.$$

Ou bien mettez

$$ax.$$
$$bx.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, car ainsy ils seront dans la raison des deux Nombres donnez

$$2 \backsim a.$$
$$1 \backsim b.$$

& selon les conditions de la Question, Vous aurez ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$aaxx + llax + llbx.$$
$$bbxx + llax + llbx.$$

Leur difference est $bbxx - aaxx$, qui a ces deux Nombres produisans,

$$cx.$$
$$\frac{bbx - aax}{c}.$$

La Moitié de leur somme est $\frac{1}{2}cx + \frac{bbx - aax}{2c}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $bbxx + llax + llbx$, on trouuera $x \backsim \frac{4acc + 4bcc}{a^4 - 2aabb + b^4 - 2aacc - 2bbcc + c^4}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Dixieme Solution.

$$\frac{4aacc + 4abcc,\ 4bbcc + 4abcc}{a^4 - 2aabb + b^4 - 2aacc - 2bbcc + c^4}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{32,\ 16}{35}.$$

comme auparauant, en supposant

$$c \backsim \frac{1}{2}.$$

Mais en supposant

$$c \backsim \frac{1}{3}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{54,27}{160}.$$

Si Vous voulez une autre Solution, multipliez la premiere Puissance $aaxx+llax+llbx$ par le Nombre quarré bb, & la deuxieme $bbxx+llax+llbx$ par le Nombre quarré aa, pour auoir en leur place ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$aabbxx+llabbx+llb^3x.$$

$$aabbxx+llaabx+lla^3x.$$

Leur difference est $llabbx+llb^3x-lla^3x-llaabx$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$$2abx.$$

$$\frac{llabb+llb^3-lla^3-llaab}{2ab}.$$

La Moitié de leur somme est $abx+\frac{llabb+llb^3-lla^3-llaab}{4ab}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $aabbxx+llabbx+llb^3x$, on trouuera $x \backsim \frac{a^6-aab^4+2ab^5+b^6-a^4bb-4a^3b^3+2a^5b}{8a^5bb+8aab^5+8a^4b^3+8a^3b^4}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^6-aab^4+2aab^5+b^6-a^4bb-4a^3b^3+2a^5b}{8a^4bb+8ab^5+8a^3b^3+8aab^4}.$$ Onzieme Solution.

$$\frac{a^6-aab^4+2aab^5+b^6-a^4bb-4a^3b^3+2a^5b}{8a^5b+8aab^4+8a^3b^3+8a^4bb}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 2.$$

$$b \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{54,27}{160}.$$

comme auparauant.

On peut encore faire que les deux Nombres qu'on cherche, soient dans la raison de deux Nombres donnez, comme des deux

$$2 \backsim r.$$

$$1 \backsim s.$$

par le Moyen de la 8e Solution, où Nous auons trouué

$$x \backsim \frac{cc+2bc+aa}{2b+2c}.$$

$$y \backsim \frac{cc+2bc+2bb-aa}{2b+2c}.$$

sauoir en faisant cette analogie,

$$cc+2bc+aa,\ cc+2bc+2bb-aa :: r, s.$$

de laquelle on tire cette Equation constitutiue,

$$ccs+2bcs+aas \backsim ccr+2bcr+2bbr-aar.$$

dans laquelle on trouuera $c \backsim \sqrt{\frac{aar+aas-bbr-bbs}{r+s}}-b$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $\frac{aar+aas-bbr-bbs}{r+s}$, laquelle a ces deux Nombres produisans,

$$r+s.$$
$$\frac{aa-bb}{r-s}.$$

que l'on égalera ensemble, par cette Equation, $r+s \sim \frac{aa-bb}{r-s}$, ou $rr-ss \sim aa-bb$, dans laquelle on trouvera $a \sim \sqrt{bb+rr-ss}$. Ainsy on aura encore cette Puissance à égaler au quarré, $bb+rr-ss$, pour le côté duquel prenant $b \ldots \partial$, on trouvera

$$b \sim \frac{\partial\partial-rr+ss}{2\partial}.$$
$$a \sim \frac{\partial\partial+rr-ss}{2\partial}.$$
$$c \sim \frac{2\partial r+2\partial s-\partial\partial+rr-ss}{2\partial}.$$
$$x \sim r.$$
$$y \sim s.$$
$$z \sim \frac{\partial^4-2\partial\partial rr+r^4-2\partial\partial ss-2rrss+s^4}{4\partial\partial r+4\partial\partial s}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4\partial\partial rr+4\partial\partial rs,\ 4\partial\partial ss+4\partial\partial rs}{\partial^4-2\partial\partial rr-2\partial\partial ss-2rrss+s^4}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 2.$$
$$s \sim 1.$$

Si l'on suppose

$$\partial \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{128,\ 64}{35}.$$

& si l'on suppose

$$\partial \sim \tfrac{1}{2}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{32,\ 16}{35}.$$

Puisque ces deux derniers Nombres sont proportionnels aux deux premiers, leur raison étant égale à la raison donnée $\frac{r}{s}$, on void aisément qu'ainsy Nous auons trouvé quatre Nombres proportionnels en raison donnée, en sorte que si on ajoute la somme des deux premiers à chacun de leurs quarrez, & pareillement la somme des deux derniers à chacun de leurs quarrez, il vienne quatre Nombres quarrez. Tels que sont les quatre Nombres suiuans

$$\frac{128,\ 64,\ 32,\ 16}{35}.$$

Au lieu de prendre $b \ldots \partial$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance $bb+rr-ss$, on peut prendre $b \ldots r \ldots \partial$, & alors on trouuera $b \sim \frac{\partial\partial+2\partial r+ss}{2\partial+2r}$, &c.

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 2.$$
$$s \sim 1.$$

Si l'on suppose

$$d \sim 3.$$

on trouuera

$$b \sim \frac{11}{5}.$$
$$a \sim \frac{14}{5}.$$
$$c \sim \frac{4}{5}.$$
$$x \sim 2.$$
$$y \sim 1.$$
$$z \sim \frac{32}{25}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{50,25}{32}.$$

Pour auoir vne solution plus generale, supposez

$$b \sim \omega + s,$$

& au lieu de la Puissance precedente $bb + rr - ss$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $\omega\omega + 2s\omega + rr$, pour le côté duquel prenant $r \ldots \frac{d\omega}{m}$, on trouuera $\omega \sim \frac{2dmr + 2mms}{dd - mm}$, &c.

Parceque Nous auons supposé

$$r \sim 2.$$
$$s \sim 1.$$

Si l'on suppose

$$d \sim 3.$$
$$m \sim 1.$$

on trouuera

$$\omega \sim \frac{7}{4}.$$
$$b \sim \frac{11}{4}.$$
$$a \sim \frac{13}{4}.$$
$$c \sim \frac{1}{4}.$$
$$x \sim 2.$$
$$y \sim 1.$$
$$z \sim \frac{35}{16}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{32,16}{35}.$$

Vous aurez vne solution encore plus generale en supposant

$$b \sim \frac{m\omega}{n} \ldots s.$$
$$a \sim \frac{p\omega}{q} \ldots r$$

& alors l'Equation precedente, $rr - ss \sim aa - bb$, se changera en celle-cy, $rr - ss \sim \frac{pp\omega\omega}{qq} - \frac{2pr\omega}{q} + rr - \frac{mm\omega\omega}{nn} + \frac{2ms\omega}{n} - ss$, dans laquelle on trouuera $\omega \sim \frac{2nnpqr - 2mnpqs}{ppnn - qqmm}$, &c.

Parceque Nous auons supposé

$r \sim 2.$

$s \sim 1.$

Si l'on suppose

$m \sim 1.$

$n \sim 1.$

$p \sim 3.$

$q \sim 2.$

on trouuera

$\omega \sim \frac{16}{5}.$

$b \sim \frac{11}{5}.$

$a \sim \frac{14}{5}.$

$e \sim \frac{4}{5}.$

$x \sim 2.$

$y \sim 1.$

$z \sim \frac{32}{25}.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{50, 25}{32}.$

On pourra tres facilement donner aux deux nombres qu'on cherche, la raison donnée $\frac{r}{s}$, par le moyen de la 6.e Solution, où nous auons trouué

$y \sim \frac{aa-bb+2ax}{2b}.$

Savoir en faisant cette analogie,

$2bx, aa-bb+2ax :: r, s.$

de laquelle on tire cette Equation constitutiue,

$2bs \sim aar-bbr+2arx.$

dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{aar-bbr}{2bs-2ar}$. c'est pourquoy au lieu de $y \sim \frac{aa-bb+2ax}{2b}$, on aura $y \sim \frac{aas-bbs}{2bs-2ar}$, & au lieu de $z \sim \frac{aa+2ax}{x+y}$, on aura $z \sim \frac{2aabs-2abbr}{aar-bbr+aas-bbs}$. &c.

Parceque nous auons supposé

$r \sim 2.$

$s \sim 1.$

Si l'on suppose

$a \sim 2.$

$b \sim 3.$

on trouuera

$x \sim 5.$

$y \sim \frac{5}{2}.$

$z \sim \frac{16}{5}.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{50, 25}{32}.$

On peut tirer de toutes ces Solutions differentes autant de canons differens pour resoudre la Question, mais le plus beau de tous est celuy que Nous auons donné au commencement, & qui depend de la Metode suiuante.

Ayant pris à volonté le triangle rectangle suiuant

3 ∾ a.
4 ∾ b.
5 ∾ c.

Mettez

bx − ax.
cx.

pour les deux Nombres qu'on cherche, &

2abxx.

pour leur somme bx − ax + cx, car ainsy le quarré de chacun étant ajouté à cette somme supposée 2abxx, donnera vn Nombre quarré, par la proprieté du triangle rectangle, & il ne restera plus qu'à égaler la somme supposée à la somme des deux Nombres, par cette Equation, 2abxx ∾ bx − ax + cx, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{b+c-a}{2ab}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Douzieme Solution.

$$\frac{aa-2ab+bb-ac+bc,\ cc-ac+bc}{2ab}.$$

Parceque Nous auons supposé

a ∾ 3.
b ∾ 4.
c ∾ 5.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,5}{4}.$$

Ou bien formez des deux Nombres indeterminez a, b, ce triangle rectangle

aa − bb.
2ab.
aa + bb.

& Mettez

bbx + 2abx − aax.
aax + bbx.

pour les deux Nombres qu'on cherche, &

$4a^3bxx - 4ab^3xx$.

pour leur somme 2bbx + 2abbx, afinque cette somme supposée $4a^3bxx - 4ab^3xx$ étant ajoûtée au quarré de chacun, il vienne deux Nombres quarrez, par la Nature du triangle rectangle,

& il ne restera plus qu'à resoudre cette Equation, $2bbx+2abx \sim 4a^3bxx-4ab^3xx$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{1}{2ab+bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Treizieme Solution.

$$\frac{2ab+bb-aa,\ aa+bb}{2aa-2ab}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,5}{4}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 3.$$
$$b \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{7,13}{6}.$$

mais si l'on suppose

$$a \sim 5.$$
$$b \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{31,41}{10}.$$

dont la difference sera toujours égale à l'Unité.

Cette Question se peut aussy resoudre par le moyen de deux triangles rectangles de méme hauteur, tels que sont les deux suiuans,

$$2abcd,\ aacd-bbcd,\ aacd+bbcd.$$
$$2abcd,\ abcc-abdd,\ abcc+abdd.$$

dont nous enseignerons l'inuention au Lemme suiuant, qui seruira aussy pour la Question suiuante.

Si l'on multiplie chacun de ces deux triangles rectangles par la quantité indeterminée x, on aura ces deux autres,

$$2abcdx,\ aacdx-bbcdx,\ aacdx+bbcdx.$$
$$2abcdx,\ abccx-abddx,\ abccx+abddx.$$

aprez quoy on mettra les deux bases

$$aacdx-bbcdx.$$
$$abccx-abddx.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & le quarré

$$4aabbccddxx.$$

de la hauteur commune $2abcdx$ pour leur somme $aacdx-bbcdx+abccx-abddx$, & il n'y aura plus comme auparauant, qu'à resoudre cette Equation, $4aabbccddx \sim aacdx-bbcdx+abccx-abddx$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{aacd-bbcd+abcc-abdd}{4aabbccdd}$, & les deux

Nombres

Nombres qu'on cherche, seront tels, Quatorzième Solution.

$$\frac{a^4cd - 2aabbcd + a^3bcc - a^3bdd + b^4cd - ab^3cc + ab^3dd}{4aabbcd}.$$

$$\frac{aac^3d - bbc^3d + abc^4 - 2abccdd - aacd^3 + bbcd^3 + abd^4}{4abccdd}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

$$b \sim 1.$$

$$c \sim 3.$$

$$d \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{225,\ 400}{144}.$$

On tire de cette Solution indefinie, le Canon suiuant;

Si on Multiplie les deux bases de deux triangles rectangles de Même hauteur, chacune par leur somme, & qu'on diuise chaque produit par le quarré de la hauteur commune; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Il arriue icy par hazard que les deux Nombres trouuez sont deux quarrez dont la somme est Vn Nombre, c'est à dire que les deux Nombres trouuez sont les quarrez des deux côtez d'Vn triangle rectangle.

Pour faire que cela arriue toujours, il faut que les deux triangles rectangles de Même hauteur, qui ont serui dans l'analyse, soient semblables, tels que sont les deux suiuans,

$$2a^3b - 2ab^3,\ 4aabb,\ 2a^3b + 2ab^3.$$

$$2a^3b - 2ab^3,\ a^4 - 2aabb + b^4,\ a^4 - b^4.$$

qui sont les deux premiers du Lemme suiuant. Si donc on Multiplie chacun de ces deux triangles rectangles par la quantité indeterminée x, on aura ces deux autres,

$$2a^3bx - 2ab^3x,\ 4aabbx,\ 2a^3bx + 2ab^3x.$$

$$2a^3bx - 2ab^3x,\ a^4x - 2aabbx + b^4x,\ a^4x - b^4x.$$

& que l'on mette

$$4aabbx.$$

$$a^4x - 2aabbx + b^4x.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & le quarré

$$4a^6bbxx - 8a^4b^4xx + 4aab^6xx.$$

de la hauteur commune $2a^3bx - 2ab^3x$, pour leur somme $a^4x + 2aabbx + b^4x$, on n'aura plus qu'à resoudre Equation, $a^4x + 2aabbx + b^4x \sim 4a^6bbxx - 8a^4b^4xx + 4aab^6xx$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{a^4 + 2aabb + b^4}{4a^6bb - 8a^4b^4 + 4aab^6}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Quinzieme Solution.

$$\frac{4a^6bb+8a^4b^4+4aab^6,\ a^8-2a^4b^4+b^8}{4a^6bb-8a^4b^4+4aab^6}.$$

qui ont les Racines quarrées

$$\frac{2a^3b+2ab^3,\ a^4\cdots b^4}{2a^3b\cdots 2ab^3}.$$

& leur somme $\frac{a^8+4a^6bb+6a^4b^4+4aab^6+b^8}{4a^6bb-8a^4b^4+4aab^6}$, a aussy sa Racine quarée $\frac{a^4+2aabb+b^4}{2a^3b\cdots 2ab^3}$.

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant. Mais si l'on suppose

$$a \sim 3.$$
$$b \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront de cette grandeur,

$$\frac{4225,\ 24336}{3600}.$$

On tire de cette derniere Solution, le canon suiuant.

Canon. Si on Multiplie les côtez d'vn triangle rectangle, chacun par l'hypotenuse, & qu'on diuise chaque produit par le double de l'aire du même triangle, les quarrez des deux quotiens donneront les deux Nombres qu'on cherche.

Lemme.

Trouuer deux triangles rectangles de même hauteur.

Pour trouuer deux triangles rectangles de même hauteur, ou qui ayent vn côté commun, formez des deux quantitez indeterminées a, b, ce triangle rectangle,

$$2ab.$$
$$aa\cdots bb.$$
$$aa+bb.$$

& le Multipliez separément par chacun des deux côtez $2ab$, $aa-bb$, & les deux triangles rectangles qu'on cherche, seront tels,

$$2a^3b\cdots 2ab^3,\ 4aabb,\ 2a^3b+2ab^3.$$
$$2a^3b\cdots 2ab^3,\ a^4-2aabb+b^4,\ a^4\cdots b^4.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 2.$$

les deux triangles rectangles qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$12,\ 16,\ 20.$$
$$12,\ 9,\ 15.$$

Ou bien choisissez quatre nombres en proportion geometrique, comme

aa, ab, ac, bc, & formez des deux extremes aa, bc, & des deux moyens ab, ac, ces deux triangles rectangles,

$2aabc,\ a^4 - bbcc,\ a^4 + bbcc.$

$2aabc,\ aabb - aacc,\ aabb + aacc.$

qui seront ceux qu'on cherche.

Si l'on suppose

$a \sim 1.$

$b \sim 2.$

$c \sim 3.$

les deux triangles rectangles rectangles qu'on cherche, seront tels,

12, 35, 37.

12, 5, 13.

Ou bien encore formez des deux quantitez indeterminées a, b, ce triangle rectangle,

$2ab.$

$aa - bb.$

$aa + bb.$

& des deux c, d, cet autre triangle rectangle,

$2cd.$

$cc - dd.$

$cc + dd.$

& multipliez le premier par cd, & le second par ab, & alors les deux triangles rectangles qu'on cherche, seront tels,

$2abcd,\ aacd - bbcd,\ aacd + bbcd.$

$2abcd,\ abcc - abdd,\ abcc + abdd.$

Si l'on suppose

$a \sim 1.$

$b \sim 2.$

$c \sim 1.$

$d \sim 3.$

les deux triangles rectangles qu'on cherche, seront de cette grandeur,

12, '9, 15.

12, 16, 20.

Question XXIV.

Trouver deux Nombres, dont la somme étant ôtée du quarré de chacun, il rgste deux Nombres quarrez. Voyez la Quest. XXXVI.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la somme $x+y$, étant ôtée de leurs quarrez xx, yy, les deux restes

$$xx-lx-ly.$$
$$yy-lx-ly.$$

soient chacun un nombre quarré.

Canon. Si on divise l'hypotenuse & la somme des deux côtez d'un triangle rectangle, par l'excez de cette somme sur l'hypotenuse, on aura les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx-lx-ly.$$
$$yy-lx-ly.$$

Egalez la premiere $xx-lx-ly$, au quarré yy, pour avoir $y \backsim x-l$, & au lieu de la seconde $yy-lx-ly$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $xx-4lx+2ll$, pour le côté duquel prenant $y \ldots a$, on trouvera $x \backsim \frac{aa-2ll}{2a-4l}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa-2ll,\ aa-4la+2ll}{2a-4l}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{7,\ 5}{2}.$$

Cette metode est la même que celle de Diophante, & on la rendra plus generale, si on égale la premiere Puissance $xx-lx-ly$, au quarré $xx-2ax+aa$, pour avoir $ly \backsim 2ax-lx-aa$, & la deuxieme Puissance $yy-lx-ly$, se changera en celle-cy, $4aaxx-4laxx+llxx-4a^3x+2laax-2llax+a^4+llaa$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $aa-2ax+lx+lb$, on trouvera $x \backsim \frac{lbb-laa+2aab}{4ab-2la-2lb}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{2aab-laa+lbb,\ 2abb+laa-lbb}{4ab-2la-2lb}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{7,\ 5}{2}.$$

Pour avoir un calcul plus aisé, supposez

$$x+y \backsim z.$$

& au lieu des deux Puissances precedentes, vous aurez ces deux autres à égaler au quarré,

$$xx-lz.$$
$$yy-lz.$$

Egalez la premiere $xx - lz$ au quarré $xx - \frac{2axz}{b} + \frac{aazz}{bb}$, pour auoir $x \sim \frac{aaz+lbb}{2ab}$, & la deuxieme $yy - lz$ au quarré $yy - \frac{2cyz}{d} + \frac{cczz}{dd}$, pour auoir $y \sim \frac{ccz+ldd}{2cd}$, & au lieu de l'Equation supposée $x+y \sim z$, on aura celle-cy, $\frac{aaz+lbb}{2ab} \sim \frac{ccz+ldd}{2cd} \sim z$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{qbdd+bbcd}{2abcd-aacd-abcc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aadd+2bbcd-bbcc,\ bbcc+2abdd-aadd}{4abcd-2aacd-2abcc}.$$

Si l'on suppose

$a \sim 1.$

$b \sim 1.$

$c \sim 1.$

$d \sim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{7,5}{2}.$$

Ou bien égalez la premiere Puissance $xz - lz$ au quarré $xx - 2xz + zz$, pour auoir $z \sim 2x - l$, & au lieu de la seconde Puissance $yy - lz$, Vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $yy - 2lx + ll$, pour le côté duquel prenant $y - a$, on trouuera $y \sim \frac{aa+2lx-ll}{2a}$, & à cause de $z \sim 2x - l$, l'Equation supposée $x+y \sim z$, se changera en celle-cy, $x + \frac{aa+2lx-ll}{2a} \sim 2x - l$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{aa+2la-ll}{2a-2l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+2la-ll,\ aa+ll}{2a-2l}.$$ Troisieme Solution.

Si l'on suppose

$a \sim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{7,5}{2}.$$

comme auparauant: Mais si l'on suppose

$a \sim 4.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{23,17}{6}.$$

& Si l'on suppose

$a \sim 5.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{17,13}{4}.$$

Le canon precedent a été tiré de la solution suiuante, qui se trouue par le moyen de ce triangle rectangle pris à Volonté,

$3 \sim a.$

$4 \sim b.$

$5 \sim c.$

car si l'on met

$$ax+bx.$$
$$ex.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, &

$$2abxx.$$

pour leur somme $ax+bx+ex$, cette somme supposée $2abxx$ étant ôtée du quarré de chacun, il restera deux Nombres quarrez, par la Nature du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation $ax+bx+ex \backsim 2abxx$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{a+b+e}{2ab}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+2ab+bb+ae+be,\ ee+ae+be}{2ab}.$$

Quatrieme Solution.

Parceque Nous avons supposé

$$a \backsim 3.$$
$$b \backsim 4.$$
$$e \backsim 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{7,5}{2}.$$

Si Vous voulez une autre solution, formez des deux quantitez indeterminées a, b, ce triangle rectangle

$$aa-bb.$$
$$2ab.$$
$$aa+bb.$$

& Mettez

$$aax-bbx+2abx.$$
$$aax+bbx.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, &

$$4a^3bxx-4ab^3xx.$$

pour leur somme $2aax+2abx$, afinque cette somme supposée $4a^3bxx-4ab^3xx$ étant ôtée du quarré de chacun, il reste deux Nombres quarrez, par la proprieté du triangle rectangle. C'est pourquoy il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation, $2aax+2abx \backsim 4a^3bxx-4ab^3xx$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{1}{2ab+2bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+2ab-bb,\ aa+bb}{2ab-2bb}.$$

Cinquieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{7,5}{2}$.

Ou bien seruez vous de ces deux triangles rectangles de même hauteur,

$2abcd, aacd - bbcd, aacd + bbcd.$

$2abcd, abcc - abdd, abcc + abdd.$

qui ont été trouuez au Lemme precedent, & les ayant multipliez par la quantité indeterminée pour auoir ces deux autres triangles rectangles,

$2abcdx, aacdx - bbcdx, aacdx + bbcdx.$

$2abcdx, abccx - abddx, abccx + abddx.$

mettez les deux hypotenuses

$aacdx + bbcdx.$

$abccx + abddx.$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & le quarré

$4aabbccddxx$

de la hauteur commune $2abcdx$ pour leur somme $aacdx + bbcdx + abccx + abddx$, car ainsy ôtant cette somme supposée du quarré de chacun, il restera deux Nombres quarrez, par la Nature du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation, $aacdx + bbcdx + abccx + abddx \sim 4aabbccddxx$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{aacd + bbcd + abcc + abdd}{4aabbccdd}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^4ccdd + 2aabbccdd + a^3bc^3d + b^4ccdd + ab^3c^3d + ab^3cd^3 + a^3bcd^3}{4aabbccdd}.$$

$$\frac{a^3bc^3d + ab^3c^3d + aabbc^4 + 2aabbccdd + a^3bcd^3 + ab^3cd^3 + aabbd^4}{4aabbccdd}.$$

Si l'on suppose

$a \sim 2.$

$b \sim 1.$

$c \sim 3.$

$d \sim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{105, 91}{36}.$

dont la somme sera toujours un Nombre quarré, dont le côté est égal à la somme des hypotenuses des deux premiers triangles rectangles, diuisée par leur hauteur commune.

Nous ajouterons icy les quatre Questions suiuantes, dont la premiere & la derniere seront precedées chacune de deux Lemmes, qui seruiront pour satisfaire aux conditions de la Question.

Lemme 1.

Trouuer deux nombres, tels que le produit Solide sous leur somme & la somme de leurs quarrez soit vn cube.

On propose de trouuer deux nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que le produit $x^3+xxy+xyy+y^3$, sous leur somme $x+y$ & la somme $xx+yy$, de leurs quarrez soit vn cube. Supposez

$$y \sim a-\frac{bx}{c}.$$

& au lieu de la Puissance $x^3+xxy+xyy+y^3$, vous aurez en entiers, celle-cy à égaler au cube, $c^3x^3-b^3x^3+bbcx^3-bbccx^3+3abbcxx+ac^3xx-3aabccx-2abccxx+aac^3x+a^3c^3$, pour le côté duquel prenant $ac-bx+\frac{1}{3}cx$, on trouuera en entiers

$$x \sim 9c.$$
$$a \sim 9b-13c.$$
$$y \sim -13c.$$

Mais parceque la valeur trouuée de y, est niée, supposez

$$y \sim \omega+13c.$$

pour la rendre veritable, & alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au cube $\omega^3-30c\omega\omega+354cc\omega-1000c^3$, pour le côté duquel prenant $\frac{59\omega}{50}-10c$, on trouuera en entiers,

$$\omega \sim 54500.$$
$$c \sim 2977.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$26793.$$
$$15799.$$

On void aisément que cette Question est la même que celle-cy; Trouuer deux nombres, dont la difference soit à la difference de leurs quarré-quarrez, dans la raison de deux cubes.

parcequ'en diuisant x^4-y^4 par $x-y$, il vient $x^3+xxy+xyy+y^3$, que nous auons rendu cubèque.

On void aussy que cette cette Question est la même que celle-cy; Trouuer quatre nombres en proportion geometrique, en sorte que leur somme & chacun des deux extrémes soient des nombres cubiques.

parceque la somme $x^3+xxy+xyy+y^3$, est composée de quatre semblables nombres, & que nous l'auons égalé au cube.

Lemme II.

Trouuer deux Nombres, tels que leur somme soit Vn quarré, & la somme de leurs quarrez Vn quarré-quarré.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que leur somme $x+y$, soit Vn nombre quarré, & la somme $xx+yy$ de leurs quarrez Vn quarré-quarré.

On égalera premierement au quarré, la somme des quarrez $xx+yy$, en prenant $x-\frac{ay}{b}$, pour le côté de ce quarré, & alors on trouuera en entiers,

$$x \sim aa-bb.$$

$$y \sim 2ab.$$

& le côté precedent $x-\frac{ay}{b}$ se changera en celuy-cy, $aa+bb$, qu'il faut encore égaler au quarré, & au lieu de la somme des deux Nombres $x+y$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $aa+2ab-bb$. Ainsy Nous auons ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$aa+bb.$$

$$aa+2ab-bb.$$

Pour cette fin, il suffira d'égaler au quarré leur produit $a^4+2a^3b+2ab^3-b^4$, pour le côté duquel on ne peut prendre que $aa+ab-\frac{1}{2}bb$, & alors on trouuera en entiers,

$$a \sim 5.$$

$$b \sim 12.$$

$$x \sim -119.$$

$$y \sim 120.$$

Mais comme la Valeur du premier Nombre x, se trouue niée, pour la rendre affirmée, on supposera

$$a \sim z+\frac{5b}{12}.$$

& au lieu de la Puissance precedente $a^4+2a^3b+2ab^3-b^4$, on aura en entiers, celle-cy à égaler au quarré, $20736z^4+76032bz^3+73440bbzz+69072b^3z+169b^4$, pour le côté duquel prenant $13bb+\frac{34568}{13}bz-144zz$, on trouuera en entiers,

$$b \sim 246792.$$

$$z \sim 2048075.$$

$$a \sim 2150905.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$1061652293520.$$

$$4565486027761.$$

dont la somme 5627138321281, a sa Racine quarrée 2372159, & la somme 21970768262017190696663521, de leurs quarrez,

11271055923362762339904oo.

2074366266968091446277312 1.

a sa Racine quarrée-quarrée 2165017.

Il est evident que cette Question est la même que celle-cy.

Trouver un triangle rectangle, où l'hypotenuse & la somme des deux côtez soient chacune un Nombre quarré.

à cause de $x+y$, & de $xx+yy$, qui ont été rendus quarrez. Ce triangle rectangle sera tel,

1061652293520.

4565486027761.

4687298610289.

I.

Trouver deux nombres, tels que si de leur somme on ôte le quarré de chacun, il reste deux nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que si de leur somme $x+y$, on ôte leurs quarrez xx, yy, les deux restes

$lx+ly-xx$.

$lx+ly-yy$.

soient chacun un nombre quarré.

Canon. Si on multiplie deux nombres indeterminez, chacun par leur somme, & que par la somme de leurs quarrez on divise chaque produit, on aura les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$lx+ly-xx$.

$lx+ly-yy$.

Leur difference est $yy-xx$, qui a ces deux Nombres produisans,

$y+x$.

$y-x$.

La Moitié de leur somme est y, dont le quarré yy, étant égale à la plus grande Puissance $lx+ly-xx$, on trouvera $lx+ly \sim xx+yy$. Pour resoudre facilement cette Equation, supposez

$$x \sim \frac{a}{z}.$$

$$y \sim \frac{b}{z}.$$

car les deux Nombres qu'on cherche, ne peuuent être exprimez qu'en fractions, & l'Equation precedente $lx + ly \sim xx + yy$, se changera en celle-cy, $\frac{a+b}{z} \sim \frac{aa+bb}{zz}$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{aa+bb}{a+b}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+ab,\ bb+ab}{aa+bb}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$

$$b \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,\ 6}{5}.$$

On void aisément que l'on peut donner aux deux Nombres qu'on cherche, telle raison que l'on voudra, comme si on leur veut donner la raison des deux Nombres donnez 2, 3, on supposera

$$a \sim 2.$$

$$b \sim 3.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{10,\ 15}{13}.$$

On void aussy que la somme de ces deux Nombres ainsy trouuez est égale à la somme de leurs quarrez, & qu'ainsy par le moyen de cette Question, on resoud celle-cy;

Trouuer deux Nombres en raison donnée, en sorte que leur somme soit égale à la somme de leurs quarrez.

Au lieu de faire que les deux Nombres qu'on cherche soient en raison donnée, on peut faire que leur somme soit vn Nombre quarré. Pour cette fin, on doit égaler au quarré cette Puissance, $aa+bb$, pour le côté duquel prenant $a + \frac{bc}{d}$, ou $a - \frac{bc}{d}$, on trouuera en entiers,

$$a \sim cc - dd.$$

$$b \sim 2cd.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^4 + 2c^3d - 2ccdd - 2cd^3 + d^4,\ 2c^3d + 4ccdd - 2cd^3}{c^4 + 2ccdd + d^4}.$$

dont la somme $\frac{c^4 + 4c^3d + 2ccdd - 4cd^3 + d^4}{c^4 + 2ccdd + d^4}$, a sa Racine quarrée, $\frac{cc + 2cd - dd}{cc + dd}$.

Si l'on suppose

$$c \sim 2.$$

$$d \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{21, 28}{25}$.

On tire de cette Solution, le Canon suivant;

Canon. Si on Multiplie les deux côtez d'Un triangle rectangle, chacun par leur somme, & qu'on divise chaque produit par le quarré de l'hypotenuse, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

On void aisément que par ce Canon, on resoud cette Question; Trouver Un triangle rectangle, ou la somme des deux côtez soit Un nombre quarré, duquel ôtant le quarré de chacun des deux mêmes côtez, il reste deux Nombres quarrez.

Si au lieu de cette condition, l'on veut que la somme des deux Nombres qu'on cherche, soit Un cube, il faudra égaler au cube cette Puissance, $\frac{aa+2ab+bb}{aa+bb}$. Pour cette fin, il faut égaler au cube le produit $a^3+aab+abb+b^3$ sous le Denominateur $aa+bb$, & la Racine quarrée $a+b$, du Numerateur $aa+2ab+bb$. Ce qui a deja été fait au Lem. 1. où Nous avons trouvé

$a \sim 26793$.

$b \sim 15799$.

& alors les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{336455504, 570583728}{483736625}$.

On tire de cette Solution, le Canon suivant;

Canon. Si on multiplie deux Nombres, tels que le produit sous leur Somme & la somme de leurs quarrez soit Un cube, chacun par la Somme des Mêmes Nombres, & qu'on divise chaque produit par la Somme des quarrez de ces deux mêmes, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Enfin si au lieu de cette condition, l'on veut que la même somme $\frac{aa+2ab+bb}{aa+bb}$, soit Un quarré-quarré, on considerera que puisque le Numerateur $aa+2ab+bb$ a sa Racine quarrée $a+b$, il suffira d'égaler au quarré cette Racine $a+b$, & au quarré-quarré le denominateur $aa+bb$. Ce qui fait voir que les deux quantitez a, b, doivent être deux Nombres, tels que leur somme $a+b$ soit Un nombre quarré, & la somme $aa+bb$ de leurs quarrez Un quarré-quarré. Ces deux Nombres ont été trouvez au Lem. 2. savoir

1065612293520.

4565486027761.

Si donc on suppose

$a \backsim 1061652293520.$

$b \backsim 456548602776 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{25690621382086894503081841,\ 5974064304742256274399120}{21970768262017190696663521}.$

dont la somme $\frac{31664685686829150777480961}{21970768262017190696663521}$, a sa Racine quarré-quarrée $\frac{2372159}{2165017}$.

On tire de cette solution, le canon suiuant;

Si on Multiplie les deux côtez d'vn triangle rectangle, où la somme de ces deux côtez & l'hypotenuse soient des Nombres quarrez, chacun par cette même somme, & qu'on diuise chaque produit par le quarré de l'hypotenuse, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

II.

Trouuer deux Nombres, dont la difference étant augmentée du quarré de chacun, il vienne deux Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

en sorte que si à leur difference $x-y$, on ajoute leurs quarrez xx, yy, les deux sommes

$lx-ly+xx.$

$lx-ly+yy.$

soient chacune vn Nombre quarré.

Si on diuise l'hypotenuse, & la difference des deux côtez d'vn triangle rectangle, chacune par la somme de l'hypotenuse & de cette même difference, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$xx+lx-ly.$

$yy+lx-ly.$

Egalez la premiere $xx+lx-ly$ au quarré $xx-2lx+ll$, pour auoir $y \backsim 3x-l$, & au lieu de la seconde $yy+lx-ly$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $9xx-8lx+2ll$, pour le côté duquel prenant $3x+a$, on trouuera $x \backsim \frac{2ll-aa}{8l-6a}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels, $\frac{2ll-aa,\ 6la-3aa-2ll}{8l-6a}$.

Si l'on suppose

$$a \sim \frac{1}{2}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{7,1}{20}.$$

Pour auoir une solution plus generale, égalez la premiere Puissance $xx+lx-ly$ au quarré $xx-2ax+aa$, pour auoir $lx-ly \sim aa-2ax$, & la deuxieme $yy+lx-ly$ au quarré $yy-2by+bb$, pour auoir le même $lx-ly \sim bb-2by$, & par consequent cette Equation, $aa-2ax \sim bb-2by$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{aa-bb+2by}{2a}$, & au lieu de $lx-ly \sim aa-2ax$, ou de $lx-ly \sim bb-2by$, on aura $\frac{laa-lbb+2lby}{2a}-ly \sim bb-2by$, & l'on trouuera $y \sim \frac{2abb-laa+lbb}{4ab-2la+2lb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{2aab-laa+lbb,\ 2abb-laa+lbb}{4ab-2la+2lb}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{5,1}{6}.$$

Ou bien formez des deux quantitez indeterminées a, b, ce triangle rectangle,

$$aa-bb.$$
$$2ab.$$
$$aa+bb.$$

& Mettez

$$2abx-aax+bbx.$$
$$aax+bbx.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, &

$$4a^3bxx-4ab^3xx.$$

pour leur difference $2aax-2abx$, car ainsy en ajoutant à cette supposée $4a^3bxx-4ab^3xx$ le quarré de chacun, on aura un Nombre quarré, par la Nature du triangle rectangle: & il ne restera plus qu'à égaler la difference $2aax-2abx$ des deux Nombres à la difference supposée $4a^3bxx-4ab^3xx$, par cette Equation, $2aax-2abx \sim 4a^3bxx-4ab^3xx$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{1}{2ab+2bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Troisieme Solution.

$$\frac{bb+2ab-aa,\ aa+bb}{2ab+2bb}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{1,5}{6}$.

dont la somme sera toujours égale à l'Vnité, & dont la difference est égale à la difference de leurs quarrez. Ainsy vous voyez que par cette metode, on resoud cette Question.

Diuisez l'Vnité en deux nombres, dont la difference soit égale à la difference de leurs quarrez.

On peut aussy se seruir de deux triangles rectangles de même hauteur, tels que sont les deux suiuans,

$2abcdx, aacdx - bbcdx, aacdx + bbcdx.$

$2abcdx, abccx - abddx, abccx + abddx.$

& mettez les deux bases

$aacdx - bbcdx.$

$abccx - abddx.$

pour les deux nombres qu'on cherche, & le quarré

$4aabbccddxx.$

de la hauteur commune $2abcdx$ pour leur difference $aacdx - bbcdx - abccx + abddx$, car ainsy cette difference supposée $4aabbccddxx$ étant ajoutée au quarré de chacun, on aura deux nombres quarrez par la nature du triangle rectangle; & il ne restera plus qu'à égaler la difference des deux nombres à la difference supposée, par cette Equation, $aacdx - bbcdx - abccx + abddx \backsim 4aabbccddxx$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{aacd - bbcd - abcc + abdd}{4aabbccdd}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{a^4ccdd - 2aabbccdd - a^3bc^3d + b^4ccdd + ab^3c^3d + ab^3cd^3 + a^3bcd^3}{4aabbccdd}$. Quatrieme Solution.

$\frac{a^3bc^3d - ab^3c^3d + 2aabbccdd - aabbc^4 - a^3bcd^3 + ab^3cd^3 - aabbd^4}{4aabbccdd}$.

Si l'on suppose

$a \backsim 2.$

$b \backsim 1.$

$c \backsim 3.$

$d \backsim 1.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{5,9}{36}$.

dont la difference sera toujours Vn nombre quarré.

On tire de cette quatrieme solution, le canon suiuant;

Si on multiplie les deux bases de deux triangles rectangles de même hauteur, chacune par leur difference, & qu'on diuise chaque produit par le quarré de la hauteur commune, on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Non seulement la difference des deux Nombres qu'on cherche, sera un Nombre quarré, mais encore leur raison sera égale à celle de deux Nombres quarrez, c'est à dire que leur produit sera aussy un Nombre quarré, si l'on se sert de deux triangles rectangles semblables de même hauteur, tels que sont les deux suiuans,

$$2a^3bx - 2ab^3x,\ 4aabbx,\ 2a^3bx + 2ab^3x.$$

$$2a^3bx - 2ab^3x,\ a^4x - 2aabbx + b^4x,\ a^4x - b^4x.$$

Si donc on met comme auparauant, les deux bases

$$4aabbx.$$

$$a^4x - 2aabbx + b^4x.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & le quarré

$$4a^6bbxx - 8a^4b^4xx + 4aab^6xx.$$

de la hauteur commune $2a^3bx - 2ab^3x$ pour leur difference $6aabbx - a^4x - b^4x$, afinque cette difference supposée $4a^6bbxx - 8a^4b^4xx + 4aab^6xx$ étant ajoutée au quarré de chacun, il vienne deux Nombres quarrez par la proprieté du triangle rectangle, on aura cette Equation à resoudre, $6aabbx - a^4x - b^4x \sim 4a^6bbxx - 8a^4b^4xx + 4aab^6xx$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{6aabb - a^4 - b^4}{4a^6bb - 8a^4b^4 + 4aab^6}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Cinquième Solution.

$$\frac{24a^4b^4 - 4a^6bb - 4aab^6,\ 8a^6bb + 8aab^6 - 14a^4b^4 - a^8 - b^8}{4a^6bb - 8a^4b^4 + 4aab^6}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{63,\ 112}{144}.$$

Pour auoir d'autres solutions de cette Question, mettez

$$\frac{x,\ y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, on aura en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx + xz - yz.$$

$$yy + xz - yz.$$

Leur difference est $xx - yy$, qui a ces deux Nombres produisans,

$$x + y.$$

$$x - y.$$

qui ne se rencontrent pas icy propres. c'est pourquoy on multipliera le premier $x + y$ par le Nombre indeterminé $\frac{a}{b}$, & on diuisera le second $x - y$ par le même nombre $\frac{a}{b}$, pour auoir ces deux autres Nombres produisans,

$$\frac{ax + ay}{b},$$

$$\frac{ax+ay}{b}.$$

$$\frac{bx-by}{a}.$$

La Moitié de leur somme est $\frac{aax+aay+bbx-bby}{2ab}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xx+xz-yz$, on trouuera $z \sim \frac{a^4xx+2a^4xy+a^4yy-2aabbxx+b^4xx-2aabbyy-2b^4xy+b^4yy}{4aabbx-4aabby}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4aabbxx-4aabbxy,\ 4aabbxy-4aabbyy}{a^4xx+2a^4xy+a^4yy-2aabbxx+b^4xx-2aabbyy-2b^4xy+b^4yy}.$$ Sixieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

$$b \sim 1.$$

$$x \sim 2.$$

$$y \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{32,16}{105}.$$

ausquels on peut donner telle raison que l'on voudra, puisqu'ils sont dans la raison des deux quantitez indeterminées x, y, qui demeurent dans la Solution indefinie, & ausquelles par consequent on peut donner telle valeur que l'on voudra.

Ou bien multipliez la premiere Puissance $xx+xz-yz$ par le quarré yy, & la deuxieme $yy+xz-yz$ par le quarré xx, pour auoir en leur place ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$xxyy+xyyz-y^3z.$$

$$xxyy+x^3z-xxyz.$$

Leur difference est $xyyz-x^3z+xxyz-y^3z$, dont les deux nombres produisans sont tels,

$$2xy.$$

$$\tfrac{1}{2}yz-\frac{xxz}{2y}+\tfrac{1}{2}xz-\frac{yyz}{2x}.$$

La Moitié de leur somme est $xy+\frac{1}{4}yz-\frac{xxz}{4y}+\frac{1}{4}xz-\frac{yyz}{4x}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xxyy+xyyz-y^3z$, on trouuera $z \sim \frac{8x^3y^4-8x^4y^3+8x^5yy-8xxy^5}{x^6-2x^5y-x^4yy+4x^3y^3-xxy^4-2xy^5+y^6}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{x^6-2x^5y-x^4yy+4x^3y^3-xxy^4-2xy^5+y^6}{8xxy^4-8x^3y^3+8x^4yy-8xy^5}.$$ Settieme Solution.

$$\frac{x^6-2x^5y-x^4yy+4x^3y^3-xxy^4-2xy^5+y^6}{8x^3y^3-8x^4yy+8x^5y-8xxy^4}.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 2.$$

$$y \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{18,9}{160}$$

Ou bien encore mettez

$$\frac{x+y,\ x-y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx+2xy+yy+2yz.$$

$$xx-2xy+yy+2yz.$$

Leur difference est $4xy$, qui a ces deux Nombres produisans

$$2a.$$

$$\frac{2xy}{a}.$$

La moitié de leur somme est $\frac{aa+xy}{a}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xx+2xy+yy+2yz$, on trouuera $z \backsim \frac{a^4+xxyy-aaxx-aayy}{2aay}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Huitieme Solution.

$$\frac{2aaxy+2aayy,\ 2aaxy-2aayy}{a^4+xxyy-aaxx-aayy}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$

$$x \backsim 2.$$

$$y \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{27,9}{20}.$$

On aura une solution plus generale, si au lieu de prendre

$$2a.$$

$$\frac{2xy}{a}.$$

pour les deux Nombres produisans, on prend

$$\frac{2ax}{b}.$$

$$\frac{2by}{a}.$$

car la moitié de leur somme sera $\frac{aax+bby}{ab}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xx+2xy+yy+2yz$, on trouuera $z \backsim \frac{a^4xx-aabbxx+b^4yy-aabbyy}{2aabby}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Neuuieme Solution.

$$\frac{2aabbxy+2aabbyy,\ 2aabbxy-2aabbyy}{a^4xx-aabbxx+b^4yy-aabbyy}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$

$$b \backsim 1.$$

$$x \backsim 2.$$

$$y \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{24,8}{45}.$$

Si vous voulez une autre solution, égalez la premiere

Puissance $xx+2xy+yy+2yz$ au quarré aa, pour avoir $z \sim \frac{aa-xx-2xy-yy}{2y}$, & la deuxieme $xx-2xy+yy+2yz$ au quarré bb, pour avoir le même $z \sim \frac{bb-xx+2xy-yy}{2y}$, & par consequent cette Equation, $aa-xx-2xy-yy \sim bb-xx+2xy-yy$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{aa-bb}{4y}$, & au lieu de $z \sim \frac{aa-xx-2xy-yy}{2y}$, ou de $z \sim \frac{bb-xx+2xy-yy}{2y}$, on aura $z \sim \frac{8aayy+8bbyy-16y^4-a^4+2aabb-b^4}{32y^3}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{8aayy-8bbyy+32y^4,\ 8aayy-8bbyy-32y^4}{8aayy+8bbyy-16y^4-a^4+2aabb-b^4}.$$ Dixieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 3.$$
$$b \sim 2.$$
$$y \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{72,\ 8}{63}.$$

On peut aisément donner aux deux Nombres qu'on cherche, telle raison que l'on voudra, comme la raison des deux Nombres donnez

$$2 \sim r.$$
$$1 \sim s.$$

en se servant de la 9.e Solution, où les deux Nombres qu'on cherche, ont été trouvez tels,

$$\frac{2aabbxy+2aabbyy,\ 2aabbxy-2aabbyy}{a^4xx-aabbxx+b^4yy-aabbyy}.$$

& en faisant cette analogie,

$$x+y,\ x-y :: r,\ s.$$

d'où l'on tire cette Equation constitutive,

$$sx+sy \sim rx-ry.$$

dans laquelle on trouvera en entiers,

$$x \sim r+s.$$
$$y \sim r-s.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4aabbrr-4aabbrs,\ 4aabbrs-4aabbss}{a^4rr+2a^4rs+a^4ss-2aabbrr-2aabbss+b^4rr-2b^4rs+b^4ss}$$

Parceque nous avons supposé

$$r \sim 2.$$
$$s \sim 1.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{32,\ 16}{105}.$$

III.

Trouver deux Nombres, dont la difference étant ôtée du quarré de chacun, il reste deux Nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference ~~x~~-y étant ôtée de leurs quarrez xx, yy, les deux restes

$$xx-lx+ly.$$

$$yy-lx+ly.$$

soient chacun un nombre quarré.

Canon. Si on divise l'hypotenuse, & la somme des deux côtez d'un triangle rectangle, chacun par le contour du même triangle, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx-lx+ly.$$

$$yy-lx+ly.$$

Egalez la premiere Puissance $xx-lx+ly$, au quarré $xx-2lx+ll$, pour avoir $x \propto l-y$, & au lieu de la seconde $yy-lx+ly$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $yy+2ly-ll$, pour le côté duquel prenant $y-a$, on trouvera $y \propto \frac{aa+ll}{2a+2l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ll+2la-aa,\ ll+aa}{2a+2l}.$$

Si l'on suppose

$$a \propto \tfrac{1}{2}.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{7,5}{12}.$$

dont la somme sera toujours égale à l'Unité.

Pour avoir une Solution plus generale, égalez la premiere Puissance $xx-lx+ly$, au quarré $xx-2ax+aa$, pour avoir $x \propto \frac{aa-ly}{2a-l}$, & au lieu de la seconde Puissance $yy-lx+ly$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $yy-\frac{laa+lly}{2a-l}+ly$, pour le côté duquel prenant $y-b$, on trouvera $y \propto \frac{laa-lbb+2abb}{2la-2lb+4ab}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{laa-lbb+2aab,\ laa-lbb+2abb}{2la-2lb+4ab}.$$

Si l'on suppose

$$a \propto 2.$$

$$b \propto 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{7,11}{10}.$$

Ou bien formez des deux quantitez indeterminées $a, b,$ ce triangle rectangle,

$$aa - bb.$$
$$2ab.$$
$$aa + bb.$$

& mettez

$$aax - bbx + 2abx.$$
$$aax + bbx.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, &

$$4a^3bxx - 4ab^3xx.$$

pour leur difference $2abx - 2bbx$, afinque si l'on ôte cette difference supposée $4a^3bxx - 4ab^3xx$, du quarré de chacun, il reste deux Nombres quarrez, par la proprieté du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à égaler la difference $2abx - 2bbx$, à la difference supposée $4a^3bxx - 4ab^3xx$, par cette Equation, $2abx - 2bbx \sim 4a^3bxx - 4ab^3x$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{1}{2aa+2ab}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+2ab-bb,\ aa+bb}{2aa+2ab}.$$ Troisieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{7,5}{12}.$$

dont la somme sera toujours égale à un Nombre quarré, savoir à l'Vnité.

Ou bien encore servez-vous de deux triangles rectangles de même hauteur, tels que sont les deux suivans,

$$2abcdx,\ aacdx - bbcdx,\ aacdx + bbcdx.$$
$$2abcdx,\ abccx - abddx,\ abccx + abddx.$$

& mettez les hypotenuses

$$aacdx + bbcdx.$$
$$abddx + abccx.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & le quarré

$$4aabbccddxx.$$

de la hauteur commune $2abcdx$, pour leur difference $aacdx + bbcdx - abccx - abddx$, car ainsy ôtant cette difference supposée $4aabbccddxx$ du quarré de chacun, il restera deux Nombres

quarrez; par la Nature du triangle rectangle, il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation, $aacdx + bbcdx - abccx - abddx \backsim 4aabbccddxx$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{aacd + bbcd - abcc - abdd}{4aabbccdd}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Quatrieme Solution.

$$\frac{a^4ccdd + 2aabbccdd - a^3bc^3d - a^3bcd^3 + b^4ccdd - ab^3c^3d - ab^3cd^3}{4aabbccdd}.$$

$$\frac{a^3bc^3d + ab^3c^3d - aabbc^4 - 2aabbccdd + a^3bcd^3 + ab^3cd^3 - aabbd^4}{4aabbccdd}.$$

Si l'on suppose

$a \backsim 2.$

$b \backsim 1.$

$c \backsim 3.$

$d \backsim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{13,\ 15}{72}.$

dont la difference sera toujours Un nombre quarré.

On tire de cette quatrieme Solution, le canon suivant;

Canon. Si on multiplie les hypotenuses de deux triangles rectangles de même hauteur, chacune par leur difference, & qu'on divise chaque produit par le quarré de la hauteur commune; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Lemme I.

Trouver deux Nombres, tels que le produit sous leur difference & la somme de leurs quarrez soit Un cube.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

en sorte que le produit solide $x^3 - xxy + xyy - y^3$, sous leur difference $x - y$, & la somme $xx + yy$ de leurs quarrez, soit Un cube. Pour cette fin, prenez $x - \frac{1}{3}y$, pour le côté de ce cube, & Vous trouverez en entiers,

$x \backsim 13.$

$y \backsim 9.$

pour les deux Nombres qu'on cherche.

Si Vous en voulez deux autres, supposez

$y \backsim z + 9.$

& au lieu de la Puissance precedente $x^3 - xxy + xyy - y^3$, Vous aurez celle-cy à égaler au cube, $1000 - 178z - 14zz - z^3$, pour le côté duquel prenant $10 - z$, on trouvera $z \backsim \frac{61}{22}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront en entiers de cette grandeur,

On void aisément par cette Question, on resoud celle-cy ; Trouver deux Nombres, dont la somme soit à la difference de leurs quarré-quarrez dans la raison de deux cubes.

Lemme II.

Trouver deux Nombres, tels que leur difference soit Vn Nombre quarré, & la somme de leurs quarrez Vn Nombre quarré-quarré.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

dont la difference $x-y$ soit Vn Nombre quarré, & la somme $xx+yy$ de leurs quarrez Vn Nombre quarré-quarré

Il faut premierement égaler au quarré la somme $xx+yy$, pour le côté duquel prenant $y \pm \frac{bx}{a}$, on trouvera en entiers,

$x \sim 2ab$.

$y \sim bb - aa$.

& au lieu du côté precedent $y \pm \frac{bx}{a}$, on aura celuy-cy, $aa+bb$, qu'il faut encore égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $a \pm \frac{bc}{d}$, on trouvera en entiers,

$a \sim cc - dd$.

$b \sim 2cd$.

& par consequent

$x \sim 4c^3d - 4cd^3$.

$y \sim c^4 - 6ccdd + d^4$.

& au lieu de la difference precedente $x-y$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $c^4 - 4c^3d - 6ccdd + 4cd^3 + d^4$, pour le côté duquel prenant $cc - 2cd + dd$, on trouvera en entiers

$c \sim 2$.

$d \sim 3$.

& par consequent

$a \sim -5$.

$b \sim 12$.

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

120.

119.

Si vous voulez deux autres Nombres, supposez

$a \sim 12$.

$b \sim -5$.

pour auoir

$$x \sim 24z - 120.$$

$$y \sim zz - 10z - 119.$$

& au lieu de la difference $x - y$, on aura celle-cy, $zz - 34z + 1$, qu'il faut égaler au quarré, & au lieu de la somme $aa + bb$, on aura celle-cy, $zz - 10z + 169$, qu'il faut aussy égaler au quarré. Ainsy Nous auons ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$zz - 34z + 1.$$

$$zz - 10z + 169.$$

Leur difference est $24z + 168$, qui a ces deux Nombres produisans,

$$14.$$

$$\frac{12}{7}z + 12.$$

La Moitié de leur difference est $1 - \frac{6}{7}z$, dont le quarré étant égalé à la plus petite Puissance $zz - 34z + 1$, on trouuera

$$z \sim \frac{1582}{13}.$$

$$b \sim \frac{1517}{13}.$$

$$x \sim \frac{36408}{13}.$$

$$y \sim \frac{2276953}{169}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront en entiers, de cette grandeur;

473304.

2276953.

Il est éuident que par cette Question, on resoud celle-cy; Trouuer Vn triangle rectangle, où la difference des deux côtez, & l'hypotenuse, soient des Nombres quarrez.

Ce triangle rectangle est le suiuant;

120.

119.

169.

dont les Nombres generateurs, sont les côtez de cet autre triangle rectangle,

5.

12.

13.

Ce premier triangle rectangle conuient aux deux premiers Nombres trouuez, qui en sont les deux côtez: & les deux

autres

autres Nombres trouvez donnent cet autre triangle rectangle,

473304.

2276953.

2325625.

dont les Nombres generateurs sont les deux côtez du suivant;

1517.

156.

1525.

IV.

Trouver deux Nombres, tels que si de leur difference on ôte le quarré de chacun, il reste deux Nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

en sorte que si de leur difference $x-y$, on ôte leurs quarrez xx, yy, les deux restes

$1x-1y-xx$.

$1x-1y-yy$.

soient chacun un Nombre quarré.

Si on multiplie deux Nombres indeterminez, chacun par leur difference, & que par la somme de leurs quarrez on divise chaque produit, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$1x-1y-xx$.

$1x-1y-yy$.

Leur difference est $xx-yy$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$x+y$.

$x-y$.

La moitié de leur difference est y, dont le quarré yy étant égalé à la plus petite Puissance $1x-1y-xx$, on trouvera $1x-1y \sim xx+yy$: & pour resoudre facilement cette Equation, supposez

$x \sim \frac{a}{z}$.

$y \sim \frac{b}{z}$.

& l'Equation precedente $1x-1y \sim xx+yy$, se changera en celle-cy, $\frac{a-b}{z} \sim \frac{aa+bb}{zz}$, dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{aa+bb}{a-b}$, & les

deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa-ab,\ ab-bb}{aa+bb}.$$

Si l'on suppose

a ∾ 2.

b ∾ 1.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2,\ 1}{5}.$$

On void euidemment que par cette Question, on resoud celle-cy;

Trouuer deux nombres, dont la difference soit égale à la somme de leurs quarrez.

à cause de l'Equation precedente, $lx-ly \sim xx+yy$.

Il est euident aussy que l'on peut donner aux deux Nombres qu'on cherche, telle raison que l'on voudra, parcequ'ils sont dans la raison des deux quantitez indeterminées a, b, qui demeurent dans la solution indefinie, ausquelles on peut donner telle valeur que l'on voudra. Comme si l'on veut donner aux deux nombres qu'on cherche, une raison triple, en supposant

a ∾ 3.

b ∾ 1.

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{3,\ 1}{5}.$$

Ainsy vous voyez que l'on resoud encore cette Question;

Trouuer deux Nombres en raison donnée, dont la difference soit égale à la somme de leurs quarrez.

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la difference $\frac{aa-2ab+bb}{aa+bb}$ des deux Nombres trouuez, & par consequent la somme de leurs quarrez soit un nombre quarré, il faut égaler au quarré cette Puissance, $aa+bb$, pour le côté duquel prenant $a \pm \frac{bc}{d}$, on trouuera en entiers,

a ∾ cc − dd.

b ∾ 2cd.

Seconde Solution

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^4-2ccdd+d^4-2c^3d+2cd^3,\ 2c^3d-2cd^3-4ccdd}{c^4+2ccdd+d^4}.$$

Si l'on suppose

c ∾ 3.

d ∾ 1.

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{4,\ 3}{25}.$$

On tire de cette seconde solution, le canon suiuant;

Si on Multiplie les deux côtez d'Un triangle rectangle, chacun par leur difference, & qu'on divise chaque produit par le quarré de l'hypotenuse, on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Si au lieu de cette condition, l'on veut que la même difference $\frac{aa-2ab+bb}{aa+bb}$, soit Un cube, il faut égaler au cube le produit $a^3-aab+abb-b^3$, sous le denominateur $aa+bb$, & la Racine quarrée $a-b$, du Numerateur $aa-2ab+bb$, ce qui a déja été fait au Lem. 1. où Nous avons trouvé

$a \sim 13.$

$b \sim 9.$

& alors les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{26, 18}{125}.$

Nous avons aussy trouvé au même Lem. 1.

$a \sim 286.$

$b \sim 259.$

& alors les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{7722, 6993}{148877}.$

On tire de cette Solution le canon suivant;

Si on Multiplie deux Nombres tels que le produit sous leur difference & la somme de leurs quarrez soit Un cube, chacun par leur difference, & qu'on divise chaque produit par la somme de leurs quarrez, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la même difference $\frac{aa-2ab+bb}{aa+bb}$, soit Un quarré-quarré, il faudra égaler au quarré-quarré le denominateur $aa+bb$, & au quarré la Racine quarré $a-b$ du Numerateur $aa-2ab+bb$, ce qui a déja été fait au Lem. 2. où Nous avons trouvé

$a \sim 120.$

$b \sim 119.$

& alors les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{120, 119}{28561}.$

Nous avons aussy trouvé au même Lem: 2.

$b \sim 473304.$

$a \sim 2276953.$

& alors les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{853674286296, 410682400\!1497}{5408531640625}.$

On tire de cette Solution, le canon suivant;

Si on Multiplie les deux côtez d'Un triangle rectangle, où la difference de ces deux mêmes côtez & l'hypotenuse, soient des Canon.

Nombres quarez chacun par la même difference, & qu'on divise chaque produit par le quarré de l'hypotenuse, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Lemme.

Trouver autant de triangles rectangles que l'on voudra, où la difference des deux côtez soit égale à un même Nombre donné.

On propose de trouver un triangle rectangle

$$x.$$
$$y.$$
$$\sqrt{xx+yy}.$$

où la difference $x-y$, des deux côtez x, y, soit égale au Nombre donné

$$7 \sim a.$$

Canon. Si d'un Nombre indeterminé & de la somme de ce même Nombre & d'un autre Nombre indeterminé, on forme un triangle rectangle, & qu'on divise ce triangle par le quotient qui viendra en divisant par le Nombre donné l'excez du quarré du premier Nombre indeterminé sur le double du quarré du second, on aura le triangle rectangle qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$$x-y \sim a.$$

& cette Puissance à égaler au quarré,

$$xx+yy.$$

Dans l'Equation precedente $x-y \sim a$, on trouvera $x \sim a+y$, & au lieu de la Puissance $xx+yy$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $aa+2ay+2yy$, pour le côté duquel prenant $a-\frac{by}{c}$, on trouvera $y \sim \frac{2acc+2abc}{bb-2cc}$. C'est pourquoy au lieu de $x \sim a+y$, on aura $x \sim \frac{abb+2abc}{bb-2cc}$, & le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{abb+2abc,\ 2acc+2abc,\ 2acc+2abc+abb}{bb-2cc}.$$

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 7.$$

Si l'on suppose

$$b \sim 4.$$
$$c \sim 1.$$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$5.$$
$$12.$$
$$13.$$

Si

$b \backsim 3.$

$c \backsim 1.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

8.

15.

17.

Si l'on suppose

$b \backsim 2.$

$c \backsim 1.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur;

21.

28.

35.

Si l'on suppose

$b \backsim 3.$

$c \backsim 2.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

140.

147.

203.

Si l'on suppose

$b \backsim 7.$

$c \backsim 5.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur;

840.

833.

1183.

Vous voyez icy que tous ces triangles sont exprimez en nombres entiers: & pour faire que cela arriue par vne metode certaine, & pour en trouuer autant d'autres que l'on voudra, égalez à l'Vnité le denominateur commun $bb - 2cc$, par cette Equation, $bb - 2cc \backsim ll$, dans laquelle on trouuera $b \backsim \sqrt{ll + 2cc}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $ll + 2cc$, pour le côté duquel prenant $l \pm \frac{cd}{m}$, on trouuera $c \backsim \frac{2dm}{dd - 2mm}$, & par consequent $b \backsim \frac{dd + 2mm}{dd - 2mm}$.

C'estpourquoy si l'on suppose

$d \backsim 3.$

$m \backsim 2.$

on trouuera.

$b \backsim 17$

$c \backsim 12.$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

4872.

4879.

6895.

C'est pourquoy reciproquement on peut supposer

$d \backsim 17.$

$m \backsim 12.$

& alors on trouuera

$b \backsim 577.$

$c \backsim 408.$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

5626320.

5626327.

11252647.

On peut aussy supposer

$d \backsim 7.$

$m \backsim 5.$

& alors on trouuera

$c \backsim 70.$

$b \backsim 99.$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

117110.

117117.

185717.

Ou bien égalez au double de l'vnité le même denominateur $bb-2cc$, par cette Equation, $bb-2cc \backsim 2ll$, dans laquelle on trouuera $b \backsim \sqrt{2cc+2ll}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2cc+2ll$. Pour cette fin, supposez

$c \backsim z+l.$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $4ll+4lz+2zz$, pour le côté duquel prenant $2l - \frac{dz}{m}$, on trouuera

$z \backsim \frac{4mm+4dm}{dd-2mm}.$

$c \backsim \frac{dd+4dm+2mm}{dd-2mm}.$

$b \backsim \frac{2dd+4mm+4dm}{dd-2mm}.$

C'est pourquoy si l'on suppose

$d \backsim 3.$

$m \backsim 2.$

on trouuera

$b \sim 58.$

$c \sim 41.$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur;

28413.

28420.

40187.

On peut aussy supposer

$d \sim 1.$

$m \sim 1.$

& alors on trouuera

$b \sim 10.$

$c \sim 7.$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

833.

840.

1183.

On peut encore égaler le même denominateur $bb - 2cc$, au quadruple de l'Vnité, parceque pour lors il arriue que les valeurs des quantitez indeterminées b, c, se trouuent des Nombres pairs, ce qui fait que les côtez du triangle rectangle qu'on cherche, sont des Nombres pairement pairs, & se peuuent par consequent diuiser par leur denominateur commun $bb - 2cc$, lequel dans ce cas vaudra 4, & qu'ainsy on a vne solution en Nombres entiers.

Faisons donc cette Equation, $bb - 2cc \sim 4ll$, dans laquelle on trouuera $b \sim \sqrt{2cc + 4ll}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2cc + 4ll$, pour le côté duquel prenant $2l - \frac{cd}{m}$, on trouuera $c \sim \frac{4dm}{dd - 2mm}$, & par consequent $b \sim \frac{2dd + 4mm}{dd - 2mm}$.

C'est pourquoy si l'on suppose

$d \sim 1.$

$m \sim 1.$

on trouuera

$b \sim 6.$

$c \sim 4.$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur;

140.

147.

203.

Mais si l'on suppose

$\partial \sim 3.$

$m \sim 2.$

on trouuera

$b \sim 34.$

$c \sim 24.$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

4872.

4879.

6895.

Parceque le Nombre donné 7, auec 2, fait Vn Nombre quarré, sauoir 9, on peut donner pour ce même Nombre donné 7, Vne infinité de solutions differentes en nombres entiers, sauoir en égalant le denominateur commun $bb-2cc$, au Nombre donné 7, par cette Equation, $bb-2cc \sim 7ll$, dans laquelle on trouuera $b \sim \sqrt{2cc+7ll}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2cc+7ll$, ce qui sera facile, parceque la somme des Vnitez fait le Nombre quarré 9: ce qui fait connoitre que l'on peut supposer

$c \sim 1.$

pour auoir

$b \sim 3.$

& alors le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

8.

15.

17.

Pour auoir Vne autre solution, supposez

$c \sim z+l.$

& au lieu de la Puissance precedente $2cc+7ll$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $9ll+4lz+2zz$, pour le côté duquel prenant $3l \ldots \frac{\partial z}{m}$, on trouuera

$z \sim \frac{6\partial m+4mm}{\partial\partial-2mm}.$

$c \sim \frac{\partial\partial+6\partial m+2mm}{\partial\partial-2mm}.$

$b \sim \frac{3\partial\partial+4\partial m+6mm}{\partial\partial-2mm}.$

C'estpourquoy si l'on suppose

$\partial \sim 1.$

$m \sim 1.$

on trouuera

$b \sim 13.$

$c \sim 9.$

& le

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

396.

403.

565.

On peut aussy égaler le même denominateur au double du Nombre donné, par cette Equation, $bb - 2cc \sim 14ll$, dans laquelle on trouvera $b \sim \sqrt{2cc+14ll}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2cc+14ll$, ce qui sera facile, parceque la somme des Unitez fait le Nombre quarré 16: ce qui fait connoitre que l'on peut supposer

$$c \sim 1.$$

pour avoir

$$b \sim 4.$$

& alors le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

5.

12.

13.

Pour avoir une autre solution, supposez

$$c \sim z + l$$

& au lieu de la Puissance precedente $2cc+14ll$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $16ll+4lz+2zz$, pour le côté duquel prenant $4l \ldots \frac{dz}{m}$, on trouvera

$$z \sim \frac{8dm+4mm}{dd-2mm}.$$

$$c \sim \frac{dd+8dm+2mm}{dd-2mm}.$$

$$b \sim \frac{4dd+4dm+8mm}{dd-2mm}.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$$d \sim 1.$$

$$m \sim 1.$$

on trouvera

$$b \sim 16.$$

$$c \sim 11.$$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

297.

304.

425.

Si par le Nombre donné a, on divise le triangle rectangle trouvé indefiniment, on aura cet autre triangle rectangle,

$$\frac{2cc+2bc,\ bb+2bc,\ 2cc+2bc+bb}{bb-2cc}.$$

où la difference des deux côtez est égale à l'Unité: & comme

le denominateur $bb-2cc$ demeure le même, on void que par les Methodes precedentes, on peut trouuer en entiers Vne infinité de triangles rectangles, où la difference des deux côtez soit égale à l'Vnité. Ainsy en supposant

$b \sim 1.$

$c \sim 1.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur;

3.

4.

5.

& en supposant

$b \sim 3.$

$c \sim 2.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

20.

21.

29.

mais en supposant

$b \sim 7.$

$c \sim 5.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur;

119.

120.

169.

Par le Moyen de ces triangles rectangles ainsy trouuez, on en peut trouuer autant d'autres, où la difference des deux côtez soit égale à Vn Nombre donné, premierement en multipliant les triangles rectangles precedens par le Nombre donné 7: ou bien en cette sorte

Si vous voulez vous seruir du premier triangle rectangle,

3.

4.

5.

mettez

$3a+x.$

$4a+x.$

$\sqrt{25aa+14ax+2xx}.$

pour le triangle rectangle qu'on cherche, car ainsy la difference des deux côtez sera égale au Nombre donné a: & afinque

l'hypotenuse soit rationnelle, il faudra seulement égaler au quarré cette Puissance, $25aa+14ax+2xx$, pour le côté duquel prenant $5a \ldots \frac{bx}{c}$, on trouvera $x \propto \frac{10abc+14acc}{bb-2cc}$, & le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{3abb+10abc+8acc,\ 4abb+10abc+6acc,\ 5abb+14abc+10acc}{bb-2cc}.$$

Parceque Nous avons supposé — Seconde Solution.

$a \propto 7.$

Si l'on suppose

$c \propto 1.$

$b \propto 1.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

147.

140.

203.

& si l'on suppose

$b \propto 3.$

$c \propto 1.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

65.

72.

97.

Pareillement si par le nombre donné a, on divise ce second triangle rectangle indefiny, on aura cet autre triangle rectangle,

$$\frac{3bb+10bc+8cc,\ 4bb+10bc+6cc,\ 5bb+14bc+10cc}{bb-2cc}.$$

où la difference des deux côtez est égale à l'Unité.

Si l'on suppose

$b \propto 1.$

$c \propto 1.$

on aura ce triangle rectangle,

20.

21.

29.

& si l'on suppose

$b \propto 3.$

$c \propto 2.$

on aura ce triangle rectangle,

119.

120.

169.

Voyez 2. 3. Trouver deux nombres, tels que si à chacun on ajoute le quarré de leur somme, il vienne deux nombres quarrez.

On propose de trouver deux nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont chacun étant ajouté au quarré $xx+2xy+yy$ de leur somme $x+y$, les deux sommes

$$xx+2xy+yy+lx.$$

$$xx+2xy+yy+ly.$$

soient chacune un nombre quarré.

Canon. Divisez un nombre indeterminé par l'excez de la somme d'autant de quarrez qu'on demandera de nombres sur autant de fois le quarré de ce nombre, & multipliez separément tous les excez de ces quarrez sur le quarré de ce même nombre par le quotient, pour avoir les nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx+2xy+yy+lx.$$

$$xx+2xy+yy+ly.$$

Leur difference est $lx-ly$, qui a ces deux nombres produisans,

$$\frac{1}{2}l.$$

$$2x-2y.$$

La moitié de leur somme est $x-y+\frac{1}{4}l$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xx+2xy+yy+lx$, on trouvera $y \sim \frac{ll-8lx}{64x+8l}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{ll-8lx,\ 64xx+8lx}{64x+8l}.$$

Si l'on suppose

$$x \sim \frac{1}{16}.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2,3}{48}.$$

Pour avoir une solution plus generale, égalez la premiere Puissance $xx+2xy+yy+lx$, au quarré $xx+2xy+yy-2ax-2ay+aa$, dont le côté est $x+y-a$, pour avoir $x \sim \frac{aa-2ay}{2a+l}$, & la deuxieme $xx+2xy+yy+ly$, au quarré $xx+2xy+yy+2bx+2by+bb$, dont le côté est $x+y+b$, pour avoir le même $x \sim \frac{ly-2by-bb}{2b}$, & par consequent cette Equation, $\frac{aa-2ay}{2a+l} \sim \frac{ly-2by-bb}{2b}$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{2aab+2abb+lbb}{2la-2lb+ll}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{laa-2abb-2aab,\ lbb+2abb+2aab}{2la-2lb+ll}.$$

Seconde Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim \tfrac{1}{4}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{6,\ 11}{4\,[illegible]}.$$

Pour auoir vne solution encore plus generale, seruez-vous de la metode de Diophante, delaquelle nous auons tiré le canon precedent, & qui peut, comme la precedente, seruir pour autant de nombres que l'on voudra.

Supposez pour auoir vn calcul plus aisé,

$$x+y \backsim z.$$

Metode de Diophante.

& les deux Puissances precedentes se changeront en ces deux autres,

$$zz+lx.$$
$$zz+ly.$$

Egalez la premiere $zz+lx$, au quarré $\frac{aazz}{bb}$, pour auoir $lx \backsim \frac{aazz}{bb}-zz$, & la deuxieme $zz+ly$ au quarré $\frac{cczz}{dd}$, pour auoir $ly \backsim \frac{cczz}{dd}-zz$, & au lieu de l'Equation supposée $x+y \backsim z$, on aura celle-cy, $\frac{aazz}{bb}-2zz+\frac{cczz}{dd} \backsim lz$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{lbbdd}{aadd-2bbdd+bbcc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aabbd^4-b^4d^4,\ ccddb^4-b^4d^4}{a^4d^4-4aabbd^4+4b^4d^4+2aabbccdd-4b^4ccdd+b^4c^4}.$$

Troisieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 3.$$
$$d \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,\ 8}{121}.$$

Ou bien égalez la premiere Puissance $zz+lx$, au quarré $zz-2az+aa$, pour auoir $lx \backsim aa-2az$ & la deuxieme $zz+ly$ au quarré $zz-2bz+bb$, pour auoir $ly \backsim bb-2bz$ & l'Equation supposée $x+y \backsim z$, se changera en celle-cy, $aa+bb-2az-2bz \backsim lz$ dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{aa+bb}{2a+2b+l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{laa+2aab-2abb,\ lbb+2abb-2aab}{2a+2b+l}.$$

Quatrieme Solution.

Si l'on suppose

$$b \backsim 1.$$
$$a \backsim \tfrac{1}{6}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{15,\ 46}{108}.$$

Ou bien encore égalez la premiere Puissance $zz+lx$ au quarré $zz+2az+aa$, pour auoir $lx \sim aa+2az$; & la deuxieme $zz+ly$ au quarré $zz+2bz+bb$, pour auoir $ly \sim bb+2bz$; & l'Equation supposée $x+y \sim z$, se changera en celle-cy, $aa+bb+2az+2bz \sim lz$, dans laquelle on trouuera $z \sim \frac{aa+bb}{l-2a-2b}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Cinquieme Solution.

$$\frac{laa-2aab+2abb,\ lbb-2ab+2aab}{l-2a-2b}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim \frac{1}{4}.$$
$$b \sim \frac{1}{5}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{23,18}{40}.$$

On peut encore resoudre cette Question pour autant de Nombres que l'on voudra, par une metode à laquelle Diophante n'a ~~peut~~ être jamais pensé.

Si vous voulez trouuer deux Nombres, cherchez par le Lemme precedent, deux triangles rectangles, où la difference des deux côtez soit un même Nombre, tels que sont les deux suiuans,

5, 12, 13.
8, 15, 17.

où la difference des deux côtez est 7. Aprez cela supposez

$$5 \sim a.$$
$$12 \sim b.$$
$$8 \sim c.$$
$$15 \sim d.$$
$$7 \sim m.$$

& mettez

$$2abxx.$$
$$2cdxx.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, &

$$mx.$$

pour leur somme $2abxx+2cdxx$: car ainsy en ajoutant chacun de ces deux Nombres au quarré $mmxx$ de leur somme supposée mx, il viendra deux Nombres quarrez, par la Nature du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à égaler la somme des deux Nombres à leur somme supposée, par cette Equation, $2abxx+2cdxx \sim mx$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{m}{2ab+2cd}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Sixieme Solution.

$$\frac{2abmm,\ 2cdmm}{4aabb+8abcd+4ccdd}.$$

Parceque nous auons supposé

$a \backsim 5.$

$b \backsim 12.$

$c \backsim 8.$

$d \backsim 15.$

$m \backsim 7.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{49, 98}{1080}.$$

Si vous voulez trois nombres, seruez-vous de ces trois triangles rectangles,

5, 12, 13.

8, 15, 17.

21, 28, 35.

où la difference des deux côtez est 7, & les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront de cette grandeur;

$$\frac{245, 490, 2401}{98304}.$$

On tire de cette sixieme Solution, le Canon suiuant;

Si on diuise la difference commune des deux côtez d'autant de triangles rectangles qu'on demandera de Nombres par le quadruple de la somme des aires de tous ces triangles, & que par le quarré du quotient on multiplie le quadruple de chacune de ces mêmes aires, on aura les Nombres qu'on cherche. Canon.

Cette Question se peut resoudre en plusieurs autres manieres pour deux Nombres seulement, qu'il seroit superflu d'expliquer icy au long: c'est pourquoy je me contenteray de vous en donner icy la Solution toute faite, telle qu'est la suiuante;

$$\frac{2a^3bb - 2a^5 - 6a^4b + l^3aa - 4lla^3 + 2la^3b}{l^4 - 12la^3 - 6l^3a + 14llaa - 4laab + 2llab}.$$ Settieme Solution.

$$\frac{aabb - a^4}{6laa - 4lla + 2lab + l^3}.$$

Si l'on suppose

$a \backsim \frac{1}{3}.$

$b \backsim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{8, 43}{81}.$$

On peut encore exprimer ces deux Nombres ainsy;

$$\frac{4aabb - 16b^4,\ 4bbcc - 16b^4}{a^4 + 2aacc + c^4 - 16aabb - 16bbcc + 64b^4}.$$ Huitieme Solution.

Si l'on suppose

$a \backsim 3.$

$b \backsim 1.$

$c \backsim 4.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{20,\,48}{289}.$$

Si vous voulez que la difference de ces deux Nombres ainsy trouvez, soit vn Nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette Puissance $aa - cc$, pour le côté duquel prenant $a - \frac{cd}{m}$, on trouvera en entiers,

$$a \backsim dd + mm.$$

$$c \backsim 2dm.$$

Neuvieme Solution

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{4bbd^4 + 8bbddmm + 4bbm^4 - 16llb^4,\ 16bbddmm - 16llb^4}{d^8 + 12d^6mm + 38d^4m^4 + 12ddm^6 + m^8 - 16llbbd^4 - 96llbbddmm - 16llbbm^4 + 64l^4b^4}.$$

dont la difference a sa Racine quarrée $\frac{2bdd - 2bmm}{d^4 + 6ddmm + m^4 - 8llbb}$.

Si l'on suppose

$$b \backsim 1.$$

$$d \backsim 1.$$

$$m \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{84,\,48}{1089}.$$

& si l'on suppose

$$b \backsim 1.$$

$$d \backsim \sqrt{\tfrac{9}{2}}.$$

$$m \backsim \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{21,\,5}{169}.$$

mais si l'on suppose

$$b \backsim \tfrac{1}{2}.$$

$$d \backsim \sqrt{\tfrac{2}{2}}.$$

$$m \backsim \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{3,\,1}{128}.$$

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la somme des deux Nombres qu'on cherche, soit vn Nombre quarré, on se seruira de la même 8.e Solution, & l'on égalera au quarré cette Puissance $aa - 8bb + cc$, pour le côté duquel prenant $a - d$, on trouvera $a \backsim \frac{8bb - cc + dd}{2d}$.

C'est pourquoy si l'on suppose

$$b \backsim 2.$$

$$c \backsim 8.$$

$$d \backsim 2.$$

on trouvera

$$a \backsim 7.$$

& les

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{528,\ 768}{6561}.$$

Que si vous voulez accomplir ces deux conditions ensemble, c'est à dire si vous voulez que la somme & la difference des deux Nombres qu'on cherche, soient des Nombres quarrez, vous aurez dans la même 8.e Solution, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$aa+cc-bb.$$

$$aa-cc.$$

Leur difference est $2cc-8bb$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$$2c+4b.$$

$$c-2b.$$

La moitié de leur somme est $b+\frac{3}{2}c$, dont le quarré $bb+3bc+\frac{2}{4}cc$, étant égale à la plus grande Puissance $aa+cc-8bb$, on trouvera $a \backsim \sqrt{9bb+3bc+\frac{5}{4}cc}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $9bb+3bc+\frac{5}{4}cc$, pour le côté duquel prenant $3b-\frac{cd}{m}$, on trouvera

$$b \backsim 4dd-5mm.$$

$$c \backsim 24dm+12mm.$$

$$a \backsim 12dd+27mm.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$$d \backsim 1.$$

$$m \backsim 1.$$

on trouvera

$$a \backsim 39.$$

$$b \backsim 1.$$

$$c \backsim 36.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{6068,\ 5168}{7890481}.$$

Puisque la somme & la difference de ces deux Nombres sont des quarrez, savoir

$$\frac{11236,\ 900}{7890481}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{106,\ 30}{2809}.$$

il faut que la difference de leurs quarrez soit aussy un Nombre quarré, qui se trouve icy de cette grandeur,

$$\frac{10112400}{62259690411361}.$$

dont le côté est tel,

$$\frac{3180}{7890481}.$$

& que par consequent le plus grand soit l'hypotenuse d'un triangle

rectangle, qui se trouue icy tel,

$$\frac{6068,\ 3180,\ 5168}{7890481}.$$

& le plus petit l'vn des deux côtez du même triangle.

Mais si au lieu de cette condition, vous voulez que les deux nombres qu'on cherche, soient les côtez d'vn triangle rectangle, c'est à dire que la somme de leurs quarez soit vn nombre quarré, en se seruant de la même 8.e Solution, on connoitra qu'il faut égaler au quarré cette Puissance, $a^4 - 8aabb + 32b^4 - 8bbcc + c^4$, pour le côté duquel prenant $aa - 4bb$, on trouuera

$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 1.$$

& comme la valeur de c, se trouue trop petite, supposez

$$c \backsim a + 1.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $16 + 8aa + 8a^3 + 2a^4$, pour le côté duquel prenant $4 + aa$, on trouuera $a \backsim -8$. c'est pourquoy au lieu de $c \backsim a + 1$, on aura $c \backsim -7$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{15,\ 8}{529}.$$

qui sont les côtez de ce triangle rectangle,

$$\frac{8,\ 15,\ 17}{529}.$$

Si au lieu de cette condition, vous voulez que les deux nombres qu'on cherche soient chacun vn nombre quarré, la 8.e Solution vous aprendra qu'il faut égaler au quarré ces deux Puissances,

$$aa - 4bb.$$
$$cc - 4bb.$$

Egalez la premiere $aa - 4bb$ au quarré $aa - 2ad + dd$, pour auoir $a \backsim \frac{4bb + dd}{2d}$, & la deuxieme $cc - 4bb$ au quarré $cc - 2cm + mm$, pour auoir $c \backsim \frac{4bb + mm}{2m}$.

C'est pourquoy si l'on suppose

$$b \backsim 6.$$
$$d \backsim 8.$$
$$m \backsim 24.$$

on trouuera

$$a \backsim 13.$$
$$c \backsim 15.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{900,\ 2916}{2809}.$$

dont les Racines quarrées sont telles,

$$\frac{30,\ 54}{53}.$$

Ou bien servez-vous de deux triangles rectangles de même hauteur, tels que sont les deux suivans,

$$2abcd,\ aacd \cdots bbcd,\ aacd+bbcd.$$

$$2abcd,\ abcc \cdots abdd,\ abcc+abdd.$$

& mettez

$$aacdx \cdots bbcdx.$$

$$abccx \cdots abddx.$$

pour les Racines quarées des deux Nombres qu'on cherche, lesquels par consequent seront tels,

$$a^4ccddxx - 2aabbccddxx + b^4ccddxx.$$

$$aabbc^4xx - 2aabbccddxx + aabbd^4xx.$$

&

$$2abcdx.$$

pour leur somme $a^4ccddxx + aabbc^4xx - 4aabbccddxx + b^4ccddxx + aabbd^4xx$, car ainsy chacun avec le quarré $4aabbccddxx$ de cette somme supposée $2abcdx$, sera un nombre quarré, par la nature du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à égaler la somme de ces deux Nombres à leur somme supposée, par cette Equation, $a^4ccddxx + b^4ccddxx - 4aabbccddxx + aabbc^4xx + aabbd^4xx \sim 2abcdx$, dans laquelle on trouuera

$$x \sim \frac{2abcd}{a^4ccdd + b^4ccdd - 4aabbccdd + aabbc^4 + aabbd^4}$$

& les Racines quarées des deux Nombres qu'on cherche, seront telles,

$$\frac{2a^3bccdd \cdots 2ab^3ccdd}{a^4ccdd + b^4ccdd - 4aabbccdd + aabbc^4 + aabbd^4}.$$

$$\frac{2aabc^3d \cdots 2aabcd^3}{a^4ccdd + b^4ccdd - 4aabbccdd + aabbc^4 + aabbd^4}.$$ Dixiéme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

$$b \sim 1.$$

$$c \sim 3.$$

$$d \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{11664,\ 36864}{113569}.$$

dont les Racines quarées sont telles,

$$\frac{108,\ 192}{337}.$$

Si vous voulez plus de deux nombres quarez il faudra trouuer plus de deux triangles rectangles de même hauteur, ce qui est si facile, en faisant même que la hauteur commune soit donnée, que j'aurois honte d'en parler icy dauantage. Nous donnerons

seulement icy un canon general, pour trouver autant de Nombres quarez que l'on voudra, qui satisferont aux conditions de la Question.

Canon

Si on divise la hauteur commune d'autant de triangles rectangles qu'on demandera de nombres par la somme des quarez des bases des mêmes triangles, & que par le quotient on multiplie chacune des mêmes; on aura les Racines quarées des nombres qu'on cherche.

On peut se servir de triangles rectangles, qui n'auront pas une même hauteur; par le moyen de la 3.e Solution, savoir en mettant pour a, l'hypotenuse d'un triangle rectangle, & pour b, l'un des deux côtez du même triangle: & pareillement en mettant pour c, l'hypotenuse d'un autre triangle rectangle, & pour d, l'un des deux côtez du même triangle. Ainsy en se servant du triangle rectangle

3.

4.

5.

& en supposant

$a \sim 5.$

$b \sim 3.$

& en suite du triangle rectangle

5.

12.

13.

& en supposant

$c \sim 13.$

$d \sim 5.$

les deux quarez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{5625,\ 18225}{179776}.$

dont les côtez sont tels,

$\frac{75,\ 135}{424}.$

La 8.e Solution a été trouvée en mettant

$x+y.$

$x-y.$

pour les deux nombres qu'on cherche: mais si l'on met

$\frac{x,\ y}{2}.$

pour ces deux mêmes Nombres, on trouvera cette autre Solution,

Onzieme Solution.

$\frac{aa-bb,\ 2ab+6bb}{8aa+32ab+24bb}.$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{3,\,10}{120}.$$

On peut donner aux deux nombres qu'on cherche, telle raison que l'on voudra: comme si on leur veut donner la raison des deux nombres donnez

$$1 \sim a.$$
$$2 \sim b.$$

on les trouvera tels,

$$\frac{a^3-2aab+abb,\ b^3-2bb+aab}{8a^3+24aab+24abb+8b^3}.$$ Douzieme solution.

Parceque nous avons supposé

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{1,\,2}{216}$$

On tire de cette solution indefinie, le canon suivant;

Si on multiplie chacun des deux nombres donnez, par le quarré de leur difference, & que par le cube du double de leur somme on divise chaque produit, on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Il arrive icy que la difference $\frac{a^3-3aab+3abb-b^3}{8a^3+24aab+24abb+8b^3}$, a sa Racine cubique $\frac{a-b}{2a+2b}$, & si l'on veut que leur somme $\frac{a^3-abb+b^3-aab}{8a^3+24aab+24abb+8b^3}$, soit aussy un nombre cubique, il faudra égaler au cube cette Puissance $a^3-aab-abb+b^3$, pour le côté duquel prenant $a-\frac{1}{3}b$, on trouvera en entiers,

$$a \sim 7.$$
$$b \sim 9.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{7,\,9}{8192}.$$

On peut aussy faire que les deux nombres trouvez par cette derniere solution indefinie soient des nombres quarrez, en supposant

$$a \sim cc.$$
$$b \sim dd.$$

& en égalant au quarré cette Puissance $2cc+2dd$, qui est la Racine cubique du denominateur commun. Pour cette fin supposez

$$d \sim x+c.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré,

$2xx + 4cx + 4cc$, pour le côté duquel prenant $2c - \frac{mx}{n}$, on trouvera en entiers,

$$x \backsim 4mn + 4nn.$$
$$c \backsim mm - 2nn.$$
$$d \backsim mm + 4mn + 2nn.$$
$$a \backsim m^4 - 4mmnn + 4n^4.$$
$$b \backsim m^4 + 8m^3n + 20mmnn + 16mn^3 + 4n^4.$$

Si l'on suppose

$$m \backsim 1.$$
$$n \backsim 1.$$

on trouvera

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 49.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{36,\ 1764}{15625}.$$

dont les Racines quarrées sont telles,

$$\frac{6,\ 42}{125}.$$

Lemme I.

Trouuer autant de triangles rectangles que l'on voudra, où la somme des deux côtez soit égale à un même Nombre donné.

On propose de trouuer un triangle rectangle,

$$x.$$
$$y.$$
$$\sqrt{xx+yy}.$$

où la somme $x+y$ des deux côtez soit égale au Nombre donné

$$49 \backsim a.$$

Canon. Si de la difference de deux nombres indeterminez & du plus petit de ces deux mêmes nombres, on forme un triangle rectangle, & qu'on le multiplie par le quotient qui viendra en diuisant le Nombre donné par l'excez du quarré du plus grand Nombre indeterminé sur le double du quarré du plus petit, on aura le triangle rectangle qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura cette Equation,

$$x + y \backsim a.$$

& cette Puissance à égaler au quarré,

$$xx + yy.$$

Dans l'Equation precedente $x+y \backsim a$, on trouuera $y \backsim a - x$, & au lieu de la Puissance $xx+yy$, on aura celle-cy à égaler au

quarré, $aa-2ax+2xx$, pour le côté duquel prenant $a-\frac{bx}{c}$, on trouuera $x \backsim \frac{2abc-2acc}{bb-2cc}$, & le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{2abc-2acc,\ abb-2abc,\ abb-2abc+2acc}{bb-2cc}.$$

Parceque nous auons supposé

$a \backsim 49.$

Si l'on suppose

$b \backsim 3.$

$c \backsim 1.$

ou

$b \backsim 4.$

$c \backsim 1.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

21.

28.

35.

& si l'on suppose

$b \backsim 9.$

$c \backsim 4.$

ou

$b \backsim 10.$

$c \backsim 1.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

9.

40.

41.

Si par le Nombre donné a, on diuise le triangle rectangle trouué indefiniment, on aura cet autre triangle rectangle,

$$\frac{2bc-2cc,\ bb-2bc,\ bb-2bc+2cc}{bb-2cc}.$$

où la somme des deux côtez est égale à l'Vnité: mais on en peut trouuer autant d'autres indefinis que l'on voudra, sauoir en diuisant vn triangle rectangle indeterminé par la somme de ses deux côtez. Comme si des deux quantitez indeterminées b, c, on forme ce triangle rectangle indeterminé,

$bb-cc.$

$2bc.$

$bb+cc.$

& qu'on le diuise par la somme $bb+2bc-cc$, de ses deux côtez $bb-cc,\ 2bc$, on aura cet autre triangle rectangle,

$\frac{bb-cc,\ 2bc,\ bb+cc}{bb+2bc-cc}$.

où la somme des deux côtez est égale à l'unité. c'est pourquoy si on multiplie ce triangle rectangle par le nombre donné a, on aura ce second triangle rectangle,

Seconde Solution.

$\frac{abb-acc,\ 2abc,\ abb+acc}{bb+2bc-cc}$.

où la somme des deux cotez est égale au nombre donné a.

Parceque nous avons supposé

a ∾ 49.

Si l'on suppose

b ∾ 2.

c ∾ 1.

ou

b ∾ 3√½.

c ∾ √½.

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

21.

28.

35.

& si l'on suppose

b ∾ 5.

c ∾ 4.

ou

b ∾ 9√½.

c ∾ √½.

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

9.

40.

41.

Lemme II.

Trouver autant de triangles rectangles que l'on voudra, dont les hypotenuses soient égales.

Si vous voulez deux triangles rectangles, dont les hypotenuses soient égales, formez des deux quantitez indeterminées a, b, ce triangle rectangle,

aa−bb.

2ab.

aa+bb.

& pareillement de ces deux autres quantitez indeterminées c, d, cet autre triangle rectangle,

cc−dd

$$cc - dd.$$
$$2cd.$$
$$cc + dd.$$

& multipliez chacun de ces deux triangles rectangles, par l'hypotenuse de l'autre, & les deux triangles rectangles qu'on cherche, seront tels,

$$aacc - bbcc + aadd - bbdd.$$
$$2abcc + 2abdd.$$
$$aacc + bbcc + aadd + bbdd.$$

$$aacc + bbcc - aadd - bbdd.$$
$$2aacd + 2bbcd.$$
$$aacc + bbcc + aadd + bbdd.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 3.$$
$$d \backsim 2.$$

les deux triangles rectangles qu'on cherche, seront de cette grandeur,

39.
52.
65.

25.
60.
65.

& si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 4.$$
$$d \backsim 1.$$

les deux triangles rectangles qu'on cherche, seront tels,

51.
68.
85.

40.
75.
85.

Mais si l'on suppose

a ∾ 4.
b ∾ 1.
c ∾ 3.
d ∾ 2.

les deux triangles rectangles qu'on cherche, seront de cette grandeur,

104.
195.
221.

85.
204.
221.

Pour trouver trois triangles rectangles ayant Vne même hypotenuse, on formera comme auparauant, des deux quantitez indeterminées Vn triangle rectangle: & de deux autres quantitez indeterminées Vn autre triangle rectangle: & encore de deux autres quantitez indeterminées Vn troisieme triangle rectangle, & on Multipliera chacun de ces trois triangles rectangles par le Plan sous les hypotenuses des deux autres, pour auoir les trois triangles rectangles qu'on cherche.

Pour trouuer quatre triangles rectangles ayant Vne même hypotenuse, on formera pareillement de deux quantitez indeterminées Vn triangle rectangle: & de deux autres quantitez indeterminées Vn autre triangle rectangle: & encore de deux autres quantitez indeterminées Vn troisieme triangle rectangle: & enfin de deux autres quantitez indeterminées Vn quatrieme triangle rectangle; aprez quoy on Multipliera chacun de ces quatre triangles rectangle par le Solide sous les hypotenuses des trois autres, pour auoir les quatre triangles rectangles qu'on cherche, & ainsy en suite.

On peut faire que les hypotenuses des triangles rectangles qu'on cherche, soient Vn même nombre quarré, comme vous alez Voir dans la metode suiuante, qui seruira pour deux triangles rectangles seulement, par le Moyen desquels on en pourra trouuer de la même façon quatre autres, & par le moyen de ces quatre huit autres, & ainsy en suite.

Formez comme auparauant des deux quantitez indeterminées a, b, ce triangle rectangle,

$aa - bb$.
$2ab$.
$aa + bb$.

que vous multiplierez par son hypotenuse $aa+bb$, pour avoir cet autre triangle rectangle,

$$a^4 - ab^3.$$
$$2a^3b - 2ab^3.$$
$$a^4 + 2aabb + b^4.$$

qui sera le premier des deux qu'on cherche. Aprez cela formez des deux côtez $aa-bb$, $2ab$, du premier triangle rectangle, cet autre triangle rectangle,

$$a^4 - 6aabb + b^4.$$
$$4a^3b - 4b^3a.$$
$$a^4 + 2aabb + b^4.$$

qui sera le second des deux qu'on cherche.

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$

les deux triangles rectangles qu'on cherche, seront de cette grandeur,

15.
20.
25.

7.
24.
25.

& si l'on suppose

$$a \sim 3.$$
$$b \sim 2.$$

les deux triangles rectangles qu'on cherche, seront tels,

65.
156.
169.

119.
120.
169.

Comme par le moyen d'un triangle rectangle, nous en avons trouvé deux autres, où l'hypotenuse est le quarré de l'hypotenuse du premier : de même par le moyen de ces deux, nous en trouverons quatre autres, où l'hypotenuse sera dans chacun le quarré de l'hypotenuse ~~commune~~ aux deux premiers,

sauoir en multipliant ces deux triangles rectangles par leur hypotenuse commune, pour auoir les deux premiers des quatre triangles rectangles qu'on cherche: & en formant des deux côtez du premier des deux precedens, & des deux côtez du second deux autres triangles rectangles, pour auoir les deux autres, & ainsy en suite.

C'est de cette façon que par le moyen des deux derniers des quatre precedens, nous auons trouvé les trois suiuans,

10985.
26364.
28561.

20111.
20280.
28561.

239.
28560.
28561.

& que par le moyen des deux premiers des quatre precedens, nous auons trouvé les trois suiuans;

375.
500.
625.

175.
600.
625.

336.
527.
625.

Au lieu de quatre triangles rectangles, nous n'en trouuons que trois, parceque le moyen de ces trois vient en deux façons. Mais on aura toujours quatre, si par l'hypotenuse commune aux deux premiers des quatre precedens, on multiplie les deux derniers, & reciproquement si par l'hypotenuse commune aux deux derniers on multiplie les deux premiers. Les Quest. VIII. IX. X. peuuent encore resoudre celle-cy en vne infinité de manieres.

Question XXVI.

Trouver deux nombres, dont chacun étant ôté du quarré de leur somme, il reste deux nombres quarrez. Voyez 3.3.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que si on ôte chacun du quarré $xx+2xy+yy$, de leur somme $x+y$, les deux restes,

$$xx+2xy+yy-lx.$$

$$xx+2xy+yy-ly.$$

Soient des Nombres quarrez

Divisez un nombre indeterminé par l'excez d'autant de fois le quarré de ce Nombre qu'on demandera de nombres, sur la somme d'autant de quarrez indeterminez, & Multipliez separément tous les excez du quarré de ce même nombre sur les quarrez precedens par le quarré du quotient, pour avoir les nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx+2xy+yy-lx.$$

$$xx+2xy+yy-ly.$$

Leur difference est $lx-ly$, dont les deux Nombres produisans sont

$$\tfrac{1}{2}l.$$

$$2x-2y.$$

La Moitié de leur Somme est $x-y+\frac{1}{4}ll$, dont le quarré étant égale à la plus grande Puissance $xx+2xy+yy-ly$, on trouvera $y \backsim \frac{8x+l}{64x-8l}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{64xx-8lx,\ 8lx+ll}{64x-8l}.$$

Si l'on suppose

$$x \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2,\ 3}{8}.$$

& si l'on suppose

$$x \backsim 2,$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{248,\ 17}{120},$$

Pour avoir une solution plus generale, égalez la premiere Puissance $xx+2xy+yy-lx$ au quarré $xx+2xy+yy-2ax-2ay+aa$, dont le côté est $x+y \ldots a$, pour avoir $x \backsim \frac{aa-2ay}{2a-l}$, & la deuxieme $xx+2xy+yy-ly$ au quarré $xx+2xy+yy-2bx-2by+bb$, dont le côté

est $x+y \ldots l$, pour avoir le même $x \propto \frac{bb-2by+ly}{2b}$, & par consequent cette Equation, $\frac{bb-2by+ly}{2b} \propto \frac{aa-2ay}{2a-l}$, dans laquelle on trouvera $y \propto \frac{2aab-2abb+lbb}{2a+2b-l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{laa-2aab+2abb,\ lbb-2abb+2aab}{2a+2b-l}.$$

Si l'on suppose

$$a \propto \frac{9}{2}.$$

$$b \propto 4.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{21,\ 36}{64}.$$

Si vous voulez une solution encore plus generale, servez-vous de la Metode de Diophante, de laquelle nous avons tiré le canon precedent, & qui peut, comme la precedente, servir pour autant de nombres que l'on voudra.

Metode de Diophante.

Supposez pour avoir un calcul plus aisé,

$$x+y \propto z.$$

& alors les deux Puissances precedentes se changeront en ces deux autres,

$$zz-lx.$$

$$zz-ly.$$

Egalez la premiere $zz-lx$, au quarré $\frac{aazz}{bb}$, pour avoir $lx \propto zz-\frac{aazz}{bb}$, & la deuxieme $zz-ly$, au quarré $\frac{cczz}{dd}$, pour avoir $ly \propto zz-\frac{cczz}{dd}$, & au lieu de l'Equation supposée $x+y \propto z$, on aura celle-cy, $2zz-\frac{aazz}{bb}-\frac{cczz}{dd} \propto lz$, dans laquelle on trouvera $z \propto \frac{bbdd}{2bbdd-aadd-bbcc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Troisieme Solution.

$$\frac{b^4d^4-aabbd^4,\ b^4d^4-ccddb^4}{4b^4d^4-4aabbd^4+a^4d^4-4b^4ccdd+2aabbccdd+b^4c^4}$$

Si l'on suppose

$$a \propto 1.$$

$$b \propto 2.$$

$$c \propto 3.$$

$$d \propto 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{192,\ 112}{361}.$$

Si vous voulez que la difference de ces deux Nombres ainsy trouvez, soit un Nombre quarré, il faudra seulement égaler au quarré cette Puissance, $aadd-bbcc$, pour le côté duquel prenant $ad \ldots cm$, on trouvera en entiers,

$$c \propto 2am.$$

$$d \propto bb+mm.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$a \backsim 1.$

$b \backsim 2.$

$m \backsim 1.$

ou trouuera,

$m \backsim 4.$

on trouuera

$c \backsim 2.$

$d \backsim 5.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{2500, 2800}{8427}.$

dont la difference $\frac{100}{2809}$ a sa Racine quarrée $\frac{10}{53}.$

On peut autrement égaler au quarré la Puissance precedente $aadd - bbcc$, par le Moyen de ses deux Nombres produisans,

$ad + bc.$

$ad - bc.$

que l'on ne doit pas icy égaler entre eux, parcequ'ils sont essentiellement inégaux. C'est pourquoy on Multipliera le premier $ad + bc$, par le quarré indeterminé mm, & le second $ad - bc$, par le quarré indeterminé nn, & on égalera ensemble les deux produits,

$admm + bcmm.$

$adnn - bcnn$

par cette Equation, $admm + bcmm \backsim adnn - bcnn$, dans laquelle on trouuera en entiers,

$a \backsim cmm + cnn.$

$b \backsim dnn - dmm.$

C'est pourquoy si l'on suppose

$c \backsim 1.$

$d \backsim 1.$

$m \backsim 1.$

$n \backsim 2.$

on trouuera

$a \backsim 5.$

$b \backsim 6.$

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{99, 243}{361}.$

dont la difference $\frac{144}{361}$ a sa Racine quarrée $\frac{12}{19}.$

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la somme des deux Nombres qu'on cherche, soit Un Nombre quarré, il faudra

égaler au quarré cette Puissance, $2bbdd - aadd - bbcc$. Pour cette fin, supposez

$$c \sim \frac{a\omega}{b} \cdots bd.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $bbdd - aadd - aa\omega\omega + 2abd\omega$, pour le côté duquel prenant $bd \cdots am$, on trouvera

$$a \sim 2d\omega + 2d\omega.$$
$$b \sim dd + mm + \omega\omega.$$

C'estpourquoy si l'on suppose

$$d \sim 1.$$
$$m \sim 2.$$
$$\omega \sim 2.$$

on trouvera

$$a \sim 8.$$
$$b \sim 9.$$
$$c \sim \frac{7}{9}.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{1377,\ 2592}{2401}.$$

dont la somme $\frac{81}{49}$, a sa Racine quarrée $\frac{9}{7}$.

Si au lieu de cette condition, vous voulez que les deux Nombres qu'on cherche, soient chacun un nombre quarré, mettez pour a, l'un des deux côtez d'un triangle rectangle, & pour b, l'hypotenuse du même triangle rectangle: & pareillement pour c, l'un des deux côtez d'un autre triangle rectangle, & pour d, l'hypotenuse du même triangle. Ainsy en se servant de ces deux triangles rectangles,

3.
4.
5.

5.
12.
13.

& en supposant

$$a \sim 3.$$
$$b \sim 5.$$
$$c \sim 5.$$
$$d \sim 13.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{714025,\ 950625}{2483776}$.

qui ont leurs Racines quarrées

$\frac{845,\ 975}{1576}$.

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la somme des quarrez des deux Nombres qu'on cherche, soit Un Nombre quarré, c'est à dire que les deux Nombres qu'on cherche, soient les deux côtez d'Un triangle rectangle, il faudra égaler au quarré cette Puissance, $a^4d^4 - 2aabbd^4 + 2b^4d^4 - 2b^4ccdd + b^4c^4$, pour le côté duquel prenant $bbcc + bbdd$, on trouvera en entiers,

$c \sim bb - aa$.

$d \sim 2bb$.

C'est pourquoy si l'on suppose

$a \sim 1$.

$b \sim 2$.

on trouvera

$c \sim 3$.

$d \sim 8$.

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{3072,\ 3520}{10609}$.

qui sont les deux côtez de ce triangle rectangle,

$\frac{3072,\ 3520,\ 4672}{10609}$.

dont les Nombres generateurs sont tels,

$\frac{64,\ 24}{103}$.

Si au lieu de la somme, vous voulez que la difference des quarrez des deux Nombres qu'on cherche, soit Un Nombre quarré, c'est à dire que le plus grand des deux Nombres qu'on cherche soit l'hypotenuse d'Un triangle rectangle, & le plus petit l'Un des deux côtez du même triangle: on rendra quarrees la somme & la difference de ces deux Nombres, savoir en égalant au quarré ces deux Puissances,

$aadd - bbcc$.

$2bbdd - aadd - bbcc$.

Leur difference est $2bbdd - 2aadd$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$bd + ad$.

$2bd - 2ad$.

La Moitié de leur somme est $\frac{3}{2}bd - \frac{1}{2}ad$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $2bbdd - aadd - bbcc$, on trouvera $\frac{2bc}{d} \sim \sqrt{6ab - bb - 5aa}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au

quarré, $6ab-bb-5aa$. Pour cette fin, supposez

$$a \backsim b - \omega.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $4b\omega-5\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $\frac{m\omega}{n}$, on trouvera

$$\omega \backsim 4nn.$$
$$b \backsim mm+5nn.$$
$$a \backsim mm+nn.$$

& au lieu de l'Equation precedente, $\frac{2bc}{d} \backsim \sqrt{6ab-bb-5aa}$, on aura celle-cy, $\frac{2cmm+10cnn}{d} \backsim 4mn$, dans laquelle on trouvera

$$c \backsim 2mn.$$
$$d \backsim mm+5nn.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$$m \backsim 2.$$
$$n \backsim 1.$$

on trouvera

$$a \backsim 5.$$
$$b \backsim 9.$$
$$c \backsim 4.$$
$$d \backsim 9.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{29760696,\ 34543665}{96059601}.$$

dont la somme & la difference

$$\frac{64304361,\ 4782969}{96059601}.$$

ont leurs Racines quarrées,

$$\frac{8019,\ 2187}{9801}.$$

Cette Question se peut resoudre encore tres facilement en cette sorte.

Egalez la premiere Puissance $zz-1x$ au quarré $zz-2az+aa$, pour avoir $1x \backsim 2az-aa$, & la deuxieme $zz-1y$ au quarré $zz-2bz+bb$, pour avoir $1y \backsim 2bz-bb$, & au lieu de l'Equation supposée $x+y \backsim z$, vous aurez celle-cy, $2az+2bz-aa-bb$, dans laquelle on trouvera $z \backsim \frac{aa+bb}{2a+2b-1}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1aa-2aab+2abb,\ 1bb-2abb+2aab}{2a+2b-1}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim \tfrac{1}{2}.$$
$$b \backsim \tfrac{1}{3}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{7,\ 6}{24}.$$

Ou bien parceque cette Solution est la même que la deuxieme, égalez la premiere Puissance $zz-lx$ au quarré aa & la deuxieme $zz-ly$, au quarré bb, pour avoir

$$lx \sim zz-aa.$$

$$ly \sim zz-bb.$$

& l'Equation supposée $x+y \sim z$, se changera en celle-cy, $2zz-aa-bb \sim lz$, dans laquelle on trouuera $b \sim \sqrt{2zz-lz-aa}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2zz-lz-aa$. Pour cette fin, supposez

$$z \sim \omega+a.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $aa-la+4a\omega-l\omega$, pour le côté duquel prenant $a-c$, on trouuera

$$a \sim \frac{cc-2\omega\omega+l\omega}{2c+4\omega-l}.$$

$$b \sim \frac{cc-lc+2\omega\omega+4c\omega-l\omega}{2c+4\omega-l}.$$

$$z \sim \frac{cc+2c\omega+2\omega\omega}{2c+4\omega-l}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Quatrieme Solution.

$$\frac{8c\omega^3+4l\omega^3+12cc\omega\omega-ll\omega\omega+4c^3\omega-2lcc\omega}{4cc+16c\omega+16\omega\omega-4lc-8l\omega+ll}.$$

$$\frac{4l\omega^3-8c\omega^3-ll\omega\omega+12lc\omega\omega-12cc\omega\omega-4c^3\omega-2llc\omega+10lcc\omega-llcc+2lc^3}{4cc+16c\omega+16\omega\omega-4lc-8l\omega+ll}.$$

Si l'on suppose

$$\omega \sim \tfrac{1}{2}.$$

$$c \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{73}{12}.$$

Si vous voulez vous servir de la proprieté du triangle rectangle pour resoudre cette Question, cherchez par le Lem. 1. autant de triangles rectangles qu'on demandera de Nombres, où la somme des côtez soit vn même Nombre : comme si l'on veut trouuer deux Nombres, on se seruira de ces deux triangles rectangles,

20.
28.
35.

———

9.
40.
41.

où la somme des deux côtez est 49 : & ayant supposé

21 $\sim$ a.

28 $\sim$ b.

9 $\sim$ c.

40 $\sim$ d.

49 $\sim$ m.

Mettez

2abxx.

2cdxx.

pour les deux Nombres qu'on cherche, &

mx.

pour leur somme 2abxx+2cdxx, car ainsy chacun étant ôté du quarré mmxx de cette somme supposée mx, il restera deux Nombres quarrez par la Nature du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation 2abxx +2cdxx $\sim$ mx, dans laquelle on trouuera x $\sim \frac{m}{2ab+2cd}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels

Cinquieme Solution

$$\frac{2abmm,\ 2cdmm}{4aabb+8abcd+4ccdd}.$$

Parceque Nous auons supposé

a $\sim$ 21.

b $\sim$ 28.

c $\sim$ 9.

d $\sim$ 40.

m $\sim$ 49.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{117649,\ 72030}{149784}.$$

On tire de cette Solution indefinie, le Canon suiuant,

Canon. Si on diuise la somme commune des deux côtez d'autant de triangles rectangles qu'on demandera de Nombres, par le quadruple de la somme de leurs aires, & que par le quarré du quotient on multiplie separément les mêmes quadruples, on aura les Nombres qu'on cherche.

Si Vous voulez trois Nombres, en vous seruant de ces trois triangles rectangles,

35, 84, 91.

51, 68, 85.

39, 80, 89.

où la somme des deux côtez est dans chacun le même Nombre 119, les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront de cette grandeur,

$$\frac{99372000,\ 117218400,\ 105456000}{157609}.$$

Ces Nombres ainsy trouvez ne peuvent jamais être quarrez: mais ils le deviendront, si par le Lem. 2. on trouve autant de triangles rectangles qu'on demandera de nombres, où l'hypotenuse soit dans chacun un même nombre entier. Comme si l'on veut deux nombres quarrez, on se servira de ces deux triangles rectangles,

$$aacc - bbcc + aadd - bbdd.$$
$$2abcc + 2abdd.$$
$$aacc + aadd + bbcc + bbdd.$$

$$aacc + bbcc - aadd - bbdd.$$
$$2aacd + 2bbcd.$$
$$aacc + aadd + bbcc + bbdd.$$

aprez quoy l'on mettra l'un des côtez de chaque triangle, comme

$$2abccx + 2abddx.$$
$$2aacdx + 2bbcdx.$$

pour les Racines quarrées des deux nombres qu'on cherche, lesquels par consequent seront tels,

$$4aabbc^4xx + 8aabbccddxx + 4aabbd^4xx.$$
$$4a^4ccddxx + 8aabbccddxx + 4b^4ccddxx.$$

& l'hypotenuse commune

$$aaccx + aaddx + bbccx + bbddx.$$

pour leur somme $4aabbc^4xx + 4a^4ccddxx + 16aabbccddxx + 4aabbd^4xx + 4b^4ccddxx$, car ainsy chacun étant ôté du quarré de cette somme supposée, il restera deux nombres quarrez par la nature du triangle rectangle: & il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation, $aaccx + aaddx + bbccx + bbddx \sim 4aabbc^4xx + 4a^4ccddxx + 16aabbccddxx + 4aabbd^4xx + 4b^4ccddxx$, dans laquelle on trouvera

$$x \sim \frac{aacc + aadd + bbcc + bbdd}{4aabbc^4 + 16aabbccdd + 4aabbd^4 + 4a^4ccdd + 4b^4ccdd}.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$
$$c \sim 3.$$
$$d \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, se trouveront de cette grandeur,

$$\frac{16,\ 9}{25}.$$

qui ont leurs Racines quarrées

$$\frac{4,\ 3}{5}.$$

On tire de cette solution, le canon suivant pour trouver autant de nombres quarrez que l'on voudra.

Canon. Si on Multiplie l'hypotenuse commune d'autant de triangles rectangles qu'on demandera de Nombres, separément par l'Un des côtez de chaque triangle, & que l'on divise chaque produit par la somme des quarez des mêmes côtez, on aura les Racines quarrées des Nombres qu'on cherche.

Quand on ne Voudra que deux Nombres quarez, Un seul triangle rectangle suffira, comme le suivant,

$$aax - bbx.$$
$$2abx.$$
$$aax + bbx.$$

car si l'on met les quarez des deux côtez

$$a^4xx - 2aabbxx + b^4xx.$$
$$4aabbxx.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & l'hypotenuse

$$aax + bbx.$$

pour leur somme $a^4xx + 2aabbxx + b^4xx$, chacun étant ôté du quarré de cette somme supposée, il restera deux Nombres quarez, par la proprieté du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation, $aax + bbx \backsim a^4xx + 2aabbxx + b^4xx$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{aa+bb}{a^4+2aabb+b^4}$, & les Racines quarées des deux Nombres qu'on cherche, seront telles,

Sixieme Solution.

$$\frac{a^4 - b^4,\ 2a^3b + 2ab^3}{a^4 + 2aabb + b^4}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{225,\ 400}{625}.$$

qui ont leurs Racines quarées

$$\frac{15,\ 20}{25}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$
$$b \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4225,\ 24336}{28561}.$$

qui ont leurs Racines quarées

$$\frac{65,\ 156}{169}.$$

Mais si l'on suppose

$$a \backsim 4.$$
$$b \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{65025,\ 18496}{83521}.$$

qui ont leurs Racines quarrées,

$$\frac{255,\ 136}{289}.$$

Ces deux Nombres quarrez se peuuent exprimer plus simplement en cette sorte;

$$\frac{a^4-2aabb+b^4,\ 4aabb}{a^4+2aabb+b^4}.$$

dont la somme sera toujours égale à l'Vnité.

On tire de cette sixieme Solution le Canon suiuant;

Si on diuise les deux côtez d'Vn triangle rectangle, chacun par l'hypotenuse, on aura les Racines quarrées des deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Cette Question se peut resoudre en plusieurs autres Manieres, qu'il seroit trop long d'expliquer icy. C'est pourquoy je me contenteray de Vous donner icy cette autre Solution.

$$\frac{2abb-4aab+4laa,\ lbb-2abb+4aab}{8a+4b-4l}.$$ Settieme Solution.

Si l'on suppose

$a \backsim 1.$

$b \backsim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{2,\ 3}{8}.$$

& si l'on suppose

$a \backsim 2.$

$b \backsim 3.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4,\ 21}{24}.$$

On peut encore exprimer les deux Nombres qu'on cherche, ainsy; Huitieme Solution.

$$\frac{16b^4-4aabb,\ 16b^4-4bbcc}{a^4+2aacc+c^4-16aabb-16bbcc+64b^4}.$$

Si l'on suppose

$a \backsim 1.$

$b \backsim 1.$

$c \backsim \frac{1}{2}.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{64,\ 80}{243}.$$

Cette Solution a été trouuée en mettant

$x+y.$

$x-y.$

pour les deux Nombres qu'on cherche: & si l'on met

$$\frac{x,\ y}{z}.$$

pour ces deux mêmes Nombres, on les trouvera tels,

Neuvieme Solution.

$$\frac{2ab+6bb,\ aa-bb}{16ab-16bb}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{10,\ 3}{16}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$
$$b \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{36,\ 5}{32}.$$

Mais si l'on suppose

$$a \backsim 5.$$
$$b \backsim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{136,\ 9}{64}.$$

Bachet ajoute icy la Question suivante, à laquelle nous en ajouterons trois autres.

1.

Trouver deux Nombres, dont chacun étant diminué du quarré de leur somme, il reste deux Nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que si de chacun on ôte le quarré $xx+2xy+yy$, de leur somme $x+y$, les deux restes,

$$lx-xy-2xy-yy.$$
$$ly-xy-2xy-yy.$$

soient des Nombres quarrez.

Canon. Divisez un Nombre indeterminé par la somme d'autant de quarrez qu'on demandera de nombres & d'autant de fois le quarré de ce Nombre, & multipliez separément les sommes du quarré de ce même nombre & de chacun des quarrez precedens par le quarré du quotient, pour avoir les Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura cette double Egalité,

$$lx-xx-2xy-yy.$$
$$ly-xx-2xy-yy.$$

Supposez

Supposez pour auoir vn calcul plus aisé,

$$x+y \backsim z.$$

& alors vous aurez ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$lx-zz.$$

$$ly-zz.$$

Egalez la premiere $lx-zz$ au quarré $\frac{aazz}{bb}$, & la deuxieme $ly-zz$ au quarré $\frac{cczz}{dd}$, pour auoir

$$lx \backsim zz+\frac{aazz}{bb}.$$

$$ly \backsim zz+\frac{cczz}{dd}.$$

& l'Equation supposée $x+y \backsim z$, se changera en celle-cy, $2zz+\frac{aazz}{bb}+\frac{cczz}{dd} \backsim z$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{bbdd}{aadd+bbcc+2bbdd}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aabbd^4+b^4d^4,\ ccddb^4+b^4d^4}{a^4d^4+2aabbccdd+b^4c^4+4aabbd^4+4ccddb^4+4b^4d^4}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$

$$b \backsim 1.$$

$$c \backsim 1.$$

$$d \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{5,2}{49}.$$

Si l'on veut que tous les Nombres que l'on peut trouuer par cette Metode, soient des Nombres quarrez, il faut mettre pour les deux quantitez indeterminées a, b, les deux côtez d'vn triangle, & pareillement pour les deux quantitez indeterminées c, d, les deux côtez d'vn autre triangle rectangle. Ainsy en se seruant de ces deux triangles rectangles,

3, 4, 5.

5. 12. 13.

& en supposant

$$a \backsim 4.$$

$$b \backsim 3.$$

$$c \backsim 5.$$

$$d \backsim 12.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{140625,\ 342225}{4605316}.$$

qui ont leurs Racines quarrées

$$\frac{375,\ 585}{2146}.$$

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la difference

des deux Nombres qu'on cherche, soit un Nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette Puissance $aadd-bbee$, pour le côté duquel prenant $ad-em$, on trouvera en entiers,

$a \backsim bb+mm.$

$e \backsim 2dm.$

C'est pourquoy si l'on suppose

$b \backsim 1.$

$d \backsim 1.$

$m \backsim 2.$

on trouvera

$a \backsim 5.$

$e \backsim 4.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{26,\,17}{1849}.$

dont la difference $\frac{9}{1849}$ a sa Racine quarrée $\frac{3}{43}$.

On peut autrement rendre quarrée la Puissance precedente, $aadd-bbee$, parcequ'elle a ces deux Nombres produisans,

$ad+be.$

$ad-be.$

ausquels on donnera la raison de deux quarrez, comme des deux quarrez mm, nn, en faisant cette analogie,

$ad+be,\ ad-be :: mm,\ nn.$

d'où l'on tirera cette Equation constitutive,

$adnn+benn \backsim admm-bemm.$

dans laquelle on trouvera en entiers,

$a \backsim emm+enn.$

$b \backsim dmm-dnn.$

C'est pourquoy si l'on suppose

$m \backsim 2.$

$n \backsim 1.$

$e \backsim 1.$

$d \backsim 1.$

on trouvera

$a \backsim 5.$

$b \backsim 3.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{225,\,81}{2704}.$

dont la difference $\frac{9}{169}$ a sa Racine quarrée $\frac{3}{13}$.

On peut encore autrement rendre quarrée la Puissance

$aadd-bbcc$, en rendant quarrez chacun de ses deux nombres produisans,

$$ad+bc.$$
$$ad-bc.$$

Pour cette fin, égalez le premier $ad+bc$, au quarré mm, pour avoir $bc \backsim mm-ad$, & le deuxieme $ad-bc$ au quarré nn, pour avoir le même $ad-nn$, & par consequent cette Equation, $mm-ad \backsim ad-nn$, dans laquelle on trouvera $d \backsim \frac{mm+nn}{2a}$, & au lieu de $bc \backsim mm-ad$, ou $ad+bc \backsim mm$, on aura $\frac{1}{2}mm+\frac{1}{2}nn+bc \backsim mm$, & l'on trouvera $c \backsim \frac{mm-nn}{2b}$.

C'est pourquoy si l'on suppose

$$m \backsim 4.$$
$$n \backsim 2.$$
$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 2.$$

on trouvera

$$c \backsim 3.$$
$$d \backsim 5.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{1250,\ 1475}{7056}.$$

dont la difference $\frac{225}{7056}$, à sa Racine quarrée $\frac{5}{28}$.

Ou bien la difference de ces deux nombres produisans est $2bc$, de laquelle les deux nombres produisans sont tels,

$$2b.$$
$$c.$$

La Moitié de leur somme est $b+\frac{1}{2}c$; dont le quarré $bb+bc+\frac{1}{4}cc$ étant égalé au plus grand Nombre produisant $ad+bc$, on trouvera $d \backsim \frac{4bb+cc}{4a}$.

C'est pourquoy si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 2.$$
$$c \backsim 2.$$

on trouvera

$$d \backsim 5.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{500,\ 464}{4225}.$$

dont la difference $\frac{36}{4225}$ a sa Racine quarrée $\frac{6}{65}$.

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la somme des deux Nombres qu'on cherche, soit un nombre quarré,

il faudra égaler au quarré cette Puissance, $aadd+bbcc+2bbdd$, pour le côté duquel prenant $ad+bc$, on trouuera

$d \sim a.$

$b \sim c.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution. $\frac{a^4cc,\ aac^4}{a^6+3a^4cc+3aac^4+c^6}.$

dont la somme $\frac{aacc}{a^4+2aacc+c^4}$, a sa Racine quarrée $\frac{ac}{aa+cc}$.

Si l'on suppose

$a \sim 1.$

$c \sim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{4,16}{125}.$

On tire de cette seconde Solution, le canon suiuant;

Canon. Si par le cube de la somme de deux quarrez indeterminez on diuise le produit sous chacun & le quarré de l'autre, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Pour auoir vne Solution plus generale, au lieu de prendre $ad+bc$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance $aadd+bbcc+2bbdd$, prenez $ad+bm$, & alors vous trouuerez

$a \sim cc+2dd-mm.$

$b \sim 2dm.$

c'est pourquoy si l'on suppose

$c \sim 2.$

$d \sim 1.$

$m \sim 1.$

on trouuera

$a \sim 5.$

$b \sim 2.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{116,80}{2401}.$

dont la somme $\frac{4}{49}$ a sa Racine quarrée $\frac{2}{7}$.

On peut aussy prendre $ad+bd$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance precedente $aadd+bbcc+2bbdd$, & alors on trouuera en entiers

$a \sim cc+dd.$

$b \sim 2dd.$

c'est pourquoy si l'on suppose

$c \sim 2.$

$d \sim 1.$

on trouuera

$$a \backsim 5.$$
$$b \backsim 2.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{116,\ 80}{2401}.$$

comme auparauant.

Si Vous Voulez accomplir ces deux conditions ensemble, c'est à dire si vous voulez que la somme & la difference des deux Nombres qu'on cherche, soient des Nombres quarrez, Vous aurez dans la même 1.e Solution, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$aadd + bbcc + 2bbdd.$$
$$aadd - bbcc.$$

Egalez la premiere $aadd + bbcc + 2bbdd$ au quarré $aadd + 2abdm + bbmm$, dont le côté est $ad + bm$, pour auoir

$$a \backsim cc + 2dd - mm.$$
$$b \backsim 2dm.$$

& au lieu de la seconde $aadd - bbcc$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $c^4 + 4ccdd + 4d^4 - 6ccmm - 4ddmm + m^4$, pour le côté duquel prenant $cc - 2dd + mm$, on trouuera

$$d \backsim m.$$
$$b \backsim 2dd.$$
$$a \backsim cc + dd.$$

comme auparauant. c'est pourquoy si l'on suppose

$$c \backsim 2.$$
$$d \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{116,\ 80}{2401}.$$

dont la somme $\frac{4}{49}$, & la difference $\frac{36}{2401}$, ont leurs Racines quarrées $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{49}$.

Ou bien égalez la seconde Puissance $aadd - bbcc$, au quarré $aadd - 2acdm + ccmm$, dont le côté est $ad - cm$, pour auoir

$$a \backsim bb + mm.$$
$$c \backsim 2dm.$$

& au lieu de la premiere $aadd + bbcc + 2bbdd$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $b^4 + 6bbmm + m^4 + 2llbb$, pour le côté duquel prenant $bb + 3mm$, on trouuera

$$b \backsim 2mm.$$
$$a \backsim 4m^4 + llmm.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$m \sim 1.$

$d \sim 1.$

on trouuera

$a \sim 5.$

$b \sim 2.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{116, 80}{2401}.$

Ou bien encore la difference des deux Puissances precedentes est $2bbcc+2bbdd$, dont les deux nombres produisans sont tels,

$2bb.$

$cc+dd.$

La Moitié de leur somme est $bb+\frac{1}{2}cc+\frac{1}{2}dd$, dont le quarré étant égale à la plus grande Puissance $aadd+bbcc+2bbdd$, on trouuera $\frac{1}{2}cc+\frac{1}{2}dd \sim \sqrt{aadd+bbdd-b^4}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $aadd+bbdd-b^4$, pour le côté duquel prenant ad, en sorte qu'on ayt $\frac{1}{2}cc+\frac{1}{2}dd \sim ad$, on trouuera $b \sim d$, & dans l'Equation $\frac{1}{2}cc+\frac{1}{2}dd \sim ad$, on trouuera $a \sim \frac{cc}{2d}+\frac{1}{2}d$.

C'est pourquoy si l'on suppose

$c \sim 4.$

$d \sim 2.$

on trouuera

$a \sim 5.$

$b \sim 2.$

& les deux nombres qu'on cherche, se trouueront tels,

$\frac{116, 80}{2401}.$

comme auparauant.

Au lieu d'égaler la Puissance $aadd+bbdd-b^4$, au quarré $aadd$, on la peut égaler au quarré $bbdd$, en sorte qu'on ayt $\frac{1}{2}cc+\frac{1}{2}dd \sim bd$, & alors on trouuera $d \sim \frac{bb}{a}$, & au lieu de l'Equation, $\frac{1}{2}cc+\frac{1}{2}dd \sim bd$, on aura celle-cy, $\frac{1}{2}cc+\frac{b^4}{2aa} \sim \frac{b^3}{a}$, dans laquelle on trouuera $\frac{ac}{b} \sim \sqrt{2ab-bb}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2ab-bb$, pour le côté duquel prenant $\frac{bm}{n}$, on trouuera

$a \sim mm+nn.$

$b \sim 2nn.$

$c \sim \frac{4mn^3}{mm+nn}.$

$d \sim \frac{4n^4}{mm+nn}.$

C'est pourquoy si l'on suppose

$m \sim 2.$

$n \sim 1.$

on trouuera

$$a \backsim 5.$$
$$b \backsim 2.$$
$$c \backsim \frac{8}{5}.$$
$$d \backsim \frac{4}{5}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{116,\ 80}{2401}.$$

comme auparauant.

Enfin si au lieu de ces conditions, que la somme des deux Nombres qu'on cherche, soit Vn cube, il faudra dans la même 1.e Solution, égaler au cube cette Puissance $aabd^3 + ccdb^3 + 2b^3d^3$, Pour cette fin supposez

$$b \backsim d.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au cube, $aab + bcc + 2b^3$, pour le côté duquel on doit prendre $3b$, pour auoir $5b \backsim \sqrt{aa+cc}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $aa+cc$, pour le côté duquel prenant $a \ldots \frac{cm}{n}$, on trouuera en entiers,

$$a \backsim mm - nn.$$
$$c \backsim 2mn.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$$m \backsim 2.$$
$$n \backsim 1.$$

on trouuera

$$a \backsim 3.$$
$$c \backsim 4.$$
$$b \backsim 1.$$
$$d \backsim 1.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{10,\ 17}{729}.$$

dont la somme $\frac{1}{27}$, a sa Racine cubique $\frac{1}{3}$.

On peut faire que les deux Nombres trouuez par la 2.e Solution, soient chacun Vn Nombre quarré, parceque les Numerateurs a^4cc, aac^4, étant deja quarrez, il n'y aura qu'à égaler au quarré le denominateur commun $a^6 + 3a^4cc + 3aac^4 + c^6$, ce qui se fera en égalant au quarré sa Racine cubique $aa+cc$, pour le côté duquel prenant $a \ldots \frac{cm}{n}$, on trouuera en entiers

$$a \backsim mm - nn.$$
$$c \backsim 2mn.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$m \sim 2.$

$n \sim 1.$

on trouuera

$a \sim 3.$

$c \sim 4.$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{1296, 2304}{15625}$,

qui ont leurs Racines quarées

$\frac{36, 48}{125}$.

& de plus leur somme $\frac{144}{625}$ a aussy sa Racine quarée $\frac{12}{25}$. Ce qui fait que ces deux Nombres ainsy trouuez sont les quarez des deux côtez de ce triangle rectangle

$\frac{36, 48, 60}{125}$.

Si au lieu de rendre quarez les deux Nombres qu'on cherche, Vous les voulez rendre cubiques, seruez-vous de la Même 2.e Solution, où le denominateur commun $a^6 + 3a^4cc + 3aac^4 + c^6$, ayant sa Racine cubique $aa + cc$, il suffira de rendre cubiques les Numerateurs a^4cc, aac^4, ce qui se fera en égalant au cube leurs Racines quarées aac, acc. Ainsy Nous aurons ces deux Puissances à égaler au cube,

$aac.$

$acc.$

Troisieme Solution.

Egalez la premiere aac au cube m^3, pour auoir $c \sim \frac{m^3}{aa}$, & au lieu de la seconde acc, on aura celle-cy, $\frac{m^6}{a^3}$, qui a sa Racine cubique $\frac{mm}{a}$, ce qui fait que la Question se trouue resolue, & que les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront tels,

$\frac{a^{12}m^6, a^6m^{12}}{a^{18} + 3a^{12}m^6 + 3a^6m^{12} + m^{18}}$.

qui ont leurs Racines cubiques

$\frac{a^4mm, aam^4}{a^6 + m^6}$.

& de plus leur somme

$\frac{a^6m^6}{a^{12} + 2a^6m^6 + m^{12}}$.

a sa Racine quarée

$\frac{a^3m^3}{a^6 + m^6}$.

Si l'on suppose

$a \sim 2.$

$m \sim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{4096, 64}{274625}$.

II.

Trouver deux nombres, dont chacun étant diminué du quarré de leur difference, il reste deux nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que si de chacun on ôte le quarré $xx-2xy+yy$ de leur difference $x \cdots y$, les deux restes

$$lx-xx+2xy-yy.$$
$$ly-xx+2xy-yy.$$

soient des Nombres quarrez.

Divisez un Nombre indeterminé par la difference de deux quarrez indeterminez, & multipliez les deux sommes du quarré de ce nombre & de chacun des deux quarrez indeterminez par le quarré du quotient, pour avoir les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$lx-xx+2xy-yy.$$
$$ly-xx+2xy-yy.$$

Supposez pour avoir un calcul plus aisé,

$$x \cdots y \propto z.$$

& vous aurez en moins de termes, ces ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$lx-zz.$$
$$ly-zz.$$

Egalez la premiere $lx-zz$ au quarré $\frac{aazz}{bb}$, & la deuxieme $ly-zz$ au quarré $\frac{cczz}{dd}$, pour avoir

$$lx \propto zz+\frac{aazz}{bb}.$$
$$ly \propto zz+\frac{cczz}{dd}.$$

& l'Equation supposée $x \cdots y \propto z$, se changera en celle-cy, $\frac{aazz}{bb} \cdots \frac{cczz}{dd} \propto z$, dans laquelle on trouvera $z \propto \frac{bbdd}{aadd-bbcc}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{b^4d^4+aabbd^4,\ b^4d^4+ccddb^4}{a^4d^4-2aabbccdd+b^4c^4}.$$

Si l'on suppose

$$a \propto 2.$$
$$b \propto 1.$$
$$c \propto 3.$$
$$d \propto 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 2}{5}.$$

Si vous voulez que ces deux nombres ainsy trouuez soient des nombres quarrez, il faut mettre pour les deux quantitez indeterminées a, b, les deux côtez d'un triangle rectangle, & pareillement pour les deux quantitez indeterminées c, d, les deux côtez d'un autre triangle rectangle. Ainsy en se seruant de ces deux triangles rectangles,

$$3,\ 4,\ 5.$$
$$5,\ 12,\ 13.$$

& en supposant

$$a \sim 4.$$
$$b \sim 3.$$
$$c \sim 5.$$
$$d \sim 12.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{140625,\ 342225}{802816}.$$

qui ont leurs Racines quarrées, $\frac{375,\ 585}{896}$.

Ou bien servez-vous de deux triangles rectangles de même hauteur, tels que sont les deux suiuans,

$$2abcdx,\ aacdx - bbcdx,\ aacdx + bbcdx.$$
$$2abcdx,\ abccx - abddx,\ abccx + abddx.$$

& mettez les deux hypotenuses

$$aacdx + bbcdx.$$
$$abccx + abddx.$$

pour les Racines quarrées des deux nombres qu'on cherche, lesquels par consequent seront tels,

$$a^4ccddxx + 2aabbccddxx + b^4ccddxx.$$
$$aabbc^4xx + 2aabbccddxx + aabbd^4xx.$$

& la hauteur commune

$$2abcdx.$$

pour leur difference $a^4ccddxx + b^4ccddxx - aabbc^4xx - aabbd^4xx$, car ainsy en ôtant de chacun le quarré $4aabbccddxx$ de cette difference supposée $2abcdx$, il restera deux nombres quarrez, par la nature du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation, $a^4ccddxx + b^4ccddxx - aabbc^4xx - aabbd^4xx \sim 2abcdx$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{2abcd}{a^4ccdd + b^4ccdd - aabbc^4 - aabbd^4}$, & les Racines quarrées des deux nombres qu'on cherche, seront telles,

$$\frac{2a^3bccdd + 2ab^3ccdd,\ 2aabbc^3d + 2aabbcd^3}{a^4ccdd + b^4ccdd - aabbc^4 - aabbd^4}.$$

Seconde Solution.

Si l'on suppose

$a \backsim 2.$

$b \backsim 1.$

$c \backsim 3.$

$d \backsim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{2304,\ 1296}{1225}.$$

qui ont leurs Racines quarrées $\frac{48,\ 36}{35}$.

On tire de cette seconde Solution, le Canon suivant;

Canon.

Si par la hauteur commune de deux triangles rectangles on multiplie chaque hypotenuse, & qu'on diuise chaque produit par la difference des mêmes hypotenuses, on aura les Racines quarrées des deux Nombres qu'on cherche.

On peut faire que les deux Nombres trouuez par la 1.e Solution, different entre eux d'vn Nombre quarré, sauoir en égalant au quarré cette Puissance, $aadd - bbcc$, pour le côté duquel prenant $ad - bm$, on trouuera en entiers,

$a \backsim mm + ee.$

$b \backsim 2dm.$

C'est pourquoy si l'on suppose

$m \backsim 2.$

$e \backsim 1.$

on trouuera $d \backsim 1.$

$a \backsim 5.$

$b \backsim 4.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{656,\ 512}{81}.$$

dont la difference $\frac{16}{9}$, a sa Racine quarrée $\frac{4}{3}$

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la somme des deux Nombres qu'on cherche, soit vn nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette Puissance $aadd + 2bbdd + bbcc$, pour le côté duquel prenant $ad + bc$, on trouuera en entiers,

$c \backsim b.$

$d \backsim a.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^4bb,\ aab^4}{a^6 - a^4bb - aab^4 + b^6}.$$

dont la somme $\frac{aabb}{a^4 - 2aabb + b^4}$, a sa Racine quarrée $\frac{ab}{aa - bb}$.

Troisieme Solution.

Si l'on suppose

$a \sim 2.$

$b \sim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{16, 4}{45}.$

dont la somme $\frac{4}{9}$ a sa Racine quarrée $\frac{2}{3}$.

Si vous voulez accomplir ces deux conditions ensemble, c'est à dire si vous voulez que la somme & la difference des deux Nombres trouvez par la 1.e Solution, soient des nombres quarrez, il faudra égaler au quarré ces deux Puissances,

$aadd + bbcc + 2bbdd.$

$aadd - bbcc.$

Egalez la deuxieme $aadd - bbcc$ au quarré $aadd - 2adcm + ccmm$, dont le côté est $ad \cdots cm$, pour avoir en entiers

$d \sim bb + mm.$

$c \sim 2am.$

& au lieu de la premiere $aadd + bbcc + 2bbdd$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $aab^4 + 6aabbmm + aam^4 + 2b^6 + 4b^4mm + 2bbm^4$, pour le côté duquel prenant $abb + 3amm$, on trouvera $a \sim \frac{b^3}{2mm} + \frac{1}{2}b$.

C'est pourquoy si l'on suppose

$b \sim 2.$

$m \sim 1.$

on trouvera

$a \sim 5.$

$c \sim 10.$

$d \sim 5.$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{116, 80}{81}.$

dont la somme $\frac{196}{81}$, & la difference $\frac{4}{9}$, ont leurs Racines quarrées $\frac{14}{9}$, $\frac{2}{3}$.

III.

Trouver deux nombres, dont chacun étant ajouté au quarré de leur difference, les deux sommes soient des nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont chacun étant ajouté au quarré $xx - 2xy + yy$, de leur difference $x \cdots y$, les deux sommes

$$xx - 2xy + yy + lx.$$
$$xx - 2xy + yy + ly.$$

Soient chacune Vn Nombre quarré.

Diuisez Vn Nombre indeterminé par la difference de deux quarrez indeterminez: & multipliez separément les excez de chacun de ces quarrez sur le quarré du nombre indeterminé, par le quarré du quotient, pour auoir les deux Nombres qu'on cherche. Canon

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx - 2xy + yy + lx.$$
$$xx - 2xy + yy + ly.$$

Pour auoir Vn calcul plus aisé, supposez

$$x - y \propto z.$$

& alors vous aurez en moins de termes, ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$zz + lx.$$
$$zz + ly.$$

Egalez la premiere $zz + lx$ au quarré $\frac{aazz}{bb}$, & la deuxieme $zz + ly$ au quarré $\frac{cczz}{dd}$, pour auoir

$$lx \propto \frac{aazz}{bb} - zz.$$
$$ly \propto \frac{cczz}{dd} - zz.$$

& l'Equation supposée $x - y \propto z$, se changera en celle-cy, $\frac{aazz}{bb} - \frac{cczz}{dd} \propto lz$, dans laquelle on trouuera $z \propto \frac{bbdd}{aadd - bbcc}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aabbd^4 - b^4d^4,\ ccddb^4 - b^4d^4}{a^4d^4 - 2aabbccdd + b^4c^4}.$$

Si l'on suppose

$$a \propto 2.$$
$$b \propto 1.$$
$$c \propto 3.$$
$$d \propto 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,\ 8}{25}.$$

Si vous voulez que ces deux ainsy trouuez deuienent quarrez, prenez pour a, l'hypotenuse d'Vn triangle rectangle, & pour b, l'vn des deux côtez du meme triangle: & pareillement pour c, l'hypotenuse d'Vn autre triangle rectangle, & pour d, l'vn des deux côtez du même triangle. Ainsy en se seruant de ces deux triangles rectangles,

3, 4, 5.

5, 12, 13.

& en supposant

$a \sim 5.$

$b \sim 3.$

$c \sim 13.$

$d \sim 5.$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{5625,\ 18225}{50176}.$

dont les Racines quarrées sont telles,

$\frac{75,\ 135}{224}.$

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la difference des deux Nombres qu'on cherche, soit un nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette Puissance, $aadd-bbcc$, pour le côté duquel prenant $ad-cm$, on trouuera en entiers,

$a \sim bb+mm.$

$c \sim 2dm.$

C'est pourquoy si l'on suppose

$b \sim 1.$

$d \sim 1.$

$m \sim 2.$

on trouuera

$c \sim 4.$

$a \sim 5.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{8,\ 5}{27}.$

dont la difference $\frac{1}{9}$, a sa Racine quarrée $\frac{1}{3}$.

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la somme des deux Nombres qu'on cherche, soit un nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette Puissance, $aadd+bbcc-2bbdd$, pour le côté duquel prenant $ad-bm$, on trouuera en entiers,

$a \sim 2dd-cc+mm.$

$b \sim 2dm.$

C'est pourquoy si l'on suppose

$c \sim 2.$

$d \sim 1.$

$m \sim 3.$

on trouuera

$a \sim 7.$

$b \sim 6.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{468,\ 3888}{9025}$.

dont la somme $\frac{4356}{9025}$ a sa Racine quarrée $\frac{66}{95}$.

Si vous voulez accomplir ces deux conditions ensemble, c'est à dire si vous voulez que la somme & la difference des deux nombres qu'on cherche, soient des nombres quarrez, il faudra égaler au quarré ces deux Puissances,

$$aadd+bbcc-2bbdd.$$
$$aadd-bbcc.$$

Leur difference est $2bbcc-2bbdd$, dont les deux nombres produisans sont tels,

$$bc+bd.$$
$$2bc-2bd.$$

La moitié de leur somme est $\frac{3}{2}bc-\frac{1}{2}bd$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $aadd+bbcc-2bbdd$, on trouvera $\frac{2ad}{b} \sim \sqrt{9dd-6cd+5cc}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $9dd-6cd+5cc$, pour le côté duquel prenant $3d+\frac{cm}{n}$, on trouvera en entiers,

$$c \sim 6mn+6nn.$$
$$d \sim 5nn-mm.$$

& au lieu de $\frac{2ad}{b} \sim \sqrt{9dd-6cd+5cc}$, on aura $\frac{10ann-2amm}{b} \sim 3mm+6mn+15nn$, & l'on trouvera en entiers,

$$a \sim 3mm+6mn+15nn.$$
$$b \sim 10nn-2mm.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$$m \sim 2.$$
$$n \sim 1.$$

on trouvera

$$a \sim 39.$$
$$b \sim 2.$$
$$c \sim 18.$$
$$d \sim 1.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{6068,\ 5168}{50625}$

dont la somme $\frac{11236}{50625}$, & la difference $\frac{4}{225}$, ont leurs Racines quarrées $\frac{106}{225}$, $\frac{2}{15}$.

Le triangle rectangle peut encore servir tres commodement pour resoudre cette Question, comme vous alez voir. Choisissez deux triangles rectangles, où la difference des deux côtez soit un même nombre, tels que sont les deux suivans,

3, 4, 5.

20. 21. 29.

où la difference des deux côtez est 1, & aprez avoir supposé

$3 \sim a.$

$4 \sim b.$

$20 \sim c.$

$21 \sim d.$

$1 \sim m.$

mettez

$2abxx.$

$2cdxx.$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & mx

$mx.$

pour leur difference $2cdxx - 2abxx$, car ainsy en ajoutant chacun de ces deux Nombres au quarré $mmxx$ de leur difference supposée mx, on aura deux Nombres quarez, par la Nature du triangle rectangle; & il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation, $2cdxx - 2abxx \sim mx$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{m}{2cd-2ab}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{2abmm,\ 2cdmm}{4aabb - 8abcd + 4ccdd}.$$

Parceque Nous avons supposé

$a \sim 3.$

$b \sim 4.$

$c \sim 20.$

$d \sim 21.$

$m \sim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,\ 105}{83232}.$$

Si l'on se sert de ces deux triangles rectangles,

5, 12, 13.

8, 15. 17.

où la difference des deux côtez est & que l'on suppose

$a \sim 5.$

$b \sim 12.$

$c \sim 8.$

$d \sim 15.$

$m \sim 7.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{49,\ 78}{120}.$$

On

On tire de cette seconde Solution, le Canon suivant;

Si on Multiplie les quadruples des aires de deux triangles rectangles, où la difference des deux côtez soit un même Nombre, par le quarré de ce même Nombre, & qu'on divise chaque produit par le quarré de la difference des mêmes quadruples; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

On peut faire que les deux nombres qu'on cherche, soient des Nombres quarrez, en se servant de deux triangles rectangles de même hauteur, tels que sont les deux suivans;

$$2abcdx,\ aacdx-bbcdx,\ aacdx+bbcdx.$$
$$2abcdx,\ abccx-abddx,\ abccx+abddx.$$

& en mettant les deux bases,

$$aacdx-bbcdx.$$
$$abccx-abddx.$$

pour les Racines quarrées des deux Nombres qu'on cherche, lesquels par consequent seront tels,

$$a^4ccddxx-2aabbccddxx+b^4ccddxx.$$
$$aabbc^4xx-2aabbccddxx+aabbd^4xx.$$

& la hauteur commune

$$2abcdx$$

pour leur difference $a^4ccddxx+b^4ccddxx-aabbc^4xx-aabbd^4xx$, car ainsy en ajoutant chacun au quarré $4aabbccddxx$ de cette difference supposée $2abcdx$, on aura deux Nombres quarrez par la Nature du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation, $a^4ccddxx+b^4ccddxx-aabbc^4xx-aabbd^4xx \backsim 2abcdx$, dans laquelle on trouvera $x \backsim \frac{2abcd}{a^4ccdd+b^4ccdd-aabbc^4-aabbd^4}$, & les Racines quarrées des deux Nombres qu'on cherche, seront telles,

$$\frac{2a^3bccdd-2ab^3ccdd,\ 2aabbc^3d-2aabbcd^3}{a^4ccdd+b^4ccdd-aabbc^4-aabbd^4}.$$

Troisieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 3.$$
$$d \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{11664,\ 36864}{30625}.$$

dont les Racines quarrées sont telles,

$$\frac{108,\ 192}{175}.$$

On tire de cette troisieme Solution, le Canon suivant;

Si par la hauteur commune à deux triangles rectangles,

Canon. on multiplie chacune des deux bases, & qu'on divise chaque produit par la difference des quarrez des mêmes bases, on aura les Racines quarrées des deux Nombres qu'on cherche.

IV.

Trouver deux Nombres, dont chacun étant ôté du quarré de leur difference, il reste deux nombres quarrez.

On propose de trouver deux nombres

$x.$

$y.$

en sorte que si on ôte chacun du quarré $xx-2xy+yy$ de leur difference $x-y$, les deux restes

$$xx-2xy+yy-lx.$$

$$xx-2xy+yy-ly.$$

soient des Nombres quarrez.

Canon. Si on divise Un Nombre indeterminé par la difference de deux quarrez indeterminez, & qu'on multiplie les deux excez du quarré de ce nombre sur chacun des deux quarrez indeterminez, par le quarré du quotient, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx-2xy+yy-lx.$$

$$xx-2xy+yy-ly.$$

Pour avoir Un calcul plus aisé, supposez

$$x-y \sim z.$$

& alors vous aurez en moins de termes, ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$zz-lx.$$

$$zz-ly.$$

Egalez la premiere $zz-lx$ au quarré $\frac{aazz}{bb}$, & la deuxieme $zz-ly$ au quarré $\frac{cczz}{dd}$, pour avoir

$$lx \sim zz-\frac{aazz}{bb}.$$

$$ly \sim zz-\frac{cczz}{dd}.$$

& l'Equation supposée $x-y \sim z$, se changera en celle-cy, $\frac{cczz}{dd}-\frac{aazz}{bb} \sim lz$, dans laquelle on trouvera $z \sim \frac{lbbdd}{bbcc-aadd}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{b^4d^4-aabbd^4,\ b^4d^4-ccddb^4}{a^4d^4-2aabbccdd+b^4c^4}.$$

Si l'on suppose

a ∾ 1.

b ∾ 2.

c ∾ 1.

d ∾ 3.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{972,\ 1152}{25}$.

& si l'on suppose

a ∾ 1.

b ∾ 3.

c ∾ 2.

d ∾ 3.

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

8.

5.

Si l'on veut que ces deux Nombres ainsy trouuez soient quarrez, il faut mettre pour a, l'vn des deux côtez d'vn triangle rectangle, & pour b, l'hypotenuse du même triangle: & pareillement pour c, l'vn des deux côtez d'vn autre triangle rectangle, & pour d, l'hypotenuse du même triangle. Ainsy en se seruant de ces deux triangles rectangles

3, 4, 5.

5, 12, 13.

& en supposant

a ∾ 3.

b ∾ 5.

c ∾ 5.

d ∾ 13.

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{950625,\ 714025}{50176}$.

dont les Racines quarrées sont telles,

$\frac{975,\ 845}{224}$.

Cette Question se peut resoudre autrement & tres facilement par le moyen de deux triangles rectangles, où la somme des deux côtez soit vn même Nombre, tels que sont les deux suiuans,

9, 40, 41.

21, 28, 35.

où la somme des deux côtez est vn même Nombre, sauoir 49; aprez quoy pour auoir vne solution indefinie, on supposera

$9 \sim a.$

$4 \sim b.$

$21 \sim c.$

$28 \sim d.$

$49 \sim m.$

& l'on mettra

$2abxx.$

$2cdxx.$

pour les deux nombres qu'on cherche, &

$mx.$

pour leur difference $2cdxx - 2abxx$, car ainsy en ôtant chacun du quarré $mmxx$ de cette difference supposée mx, il restera deux nombres quarrez par la nature du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation, $2cdxx - 2abxx \sim mx$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{m}{2cd-2ab}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2abmm,\ 2cdmm}{4aabb - 8abcd + 4ccdd}.$$

Seconde Solution. Parceque nous auons supposé

$a \sim 9.$

$b \sim 40.$

$c \sim 21.$

$d \sim 28.$

$m \sim 49.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{216090,\ 88347}{2592}.$$

On tire de cette seconde solution, le canon suiuant;

Canon. Si par le quarré de la somme des deux côtez commune à deux triangles rectangles, on multiplie les deux bases & qu'on diuise chaque produit par le quarré de la difference des mêmes bases; on aura les deux nombres qu'on cherche.

Si vous voulez que les deux nombres qu'on cherche, soient deux quarrez égaux à un nombre quarré, formez des deux quantitez indeterminées a, b, ce triangle rectangle,

$aa-bb.$

$2ab.$

$aa+bb.$

& mettez

$aax-bbx.$

$2abx.$

pour les Racines quarées des deux Nombres qu'on cherche, lesquels par consequent seront tels,

$$\frac{a^4xx - 2aabbxx + b^4xx}{4aabbxx}$$

&

$$aax + bbx.$$

pour leur difference $6aabbxx - a^4xx - b^4xx$, car ainsy en ôtant chacun du quarré $a^4xx + 2aabbxx + b^4xx$ de leur difference supposée $aax+bbx$, il restera deux Nombres quarez, & leur somme sera égale à un nombre quaré, par la Nature du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation, $6aabbxx - a^4xx - b^4xx \sim aax+bbx$, dans laquelle on trouvera $x \sim \frac{aa+bb}{6aabb-a^4-b^4}$, & les Racines quarées des deux Nombres qu'on cherche, seront telles,

$$\frac{a^4-b^4,\ 2a^3b+2ab^3}{6aabb-a^4-b^4}.$$

Si l'on suppose Troisieme Solution.

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{225,\ 400}{49}.$$

On tire de cette troisieme solution, le Canon suivant;

Si on multiplie les deux côtez d'un triangle rectangle, chacun par l'hypotenuse, & qu'on divise chaque produit par la difference des quarez des mêmes côtez, on aura les Racines quarées des deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Question XXVII.

Trouver deux Nombres, dont chacun étant ajouté à leur produit, il vienne deux Nombres quarez, tels que la somme de leurs côtez soit égale à un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que si on ajoute chacun à leur produit xy, les deux sommes

$$xy+1x.$$
$$xy+1y.$$

soient chacune un Nombre quaré, & que la somme $\sqrt{xy+1x} + \sqrt{xy+1y}$ des côtez de ces deux quarez, soit égale au Nombre donné

$$6 \sim a.$$

Canon. Si on diuise le quaré sous la difference d'vn Nombre indeterminé & du produit sous le Nombre donné & vn second Nombre indeterminé, par la somme du produit sous les deux Nombres indeterminez & le double du Nombre donné, & de l'excez du quaré du second sur le quaré du premier; on aura l'vn des deux Nombres qu'on cherche, auquel on ajoutera vne Vnité, & on multiplicra la somme par le quotient qui viendra en diuisant le quaré du premier Nombre indeterminé par le quaré du second, pour auoir l'autre Nombre qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quaré,

$$xy + lx.$$
$$xy + ly.$$

& cette Equation,

$$\sqrt{xy+lx} + \sqrt{xy+ly} \backsim a.$$

Egalez la premiere Puissance $xy+lx$ au quaré $\frac{bbxx}{xx}$, pour auoir $y \backsim \frac{bbx}{cc} - l$, & au lieu de la seconde Puissance $xy+ly$, vous aurez celle-cy à égaler au quaré, $\frac{bbxx}{cc} - lx + \frac{lbbx}{cc} - ll$, pour le côté duquel prenant $z - \frac{bx}{c}$, on trouuera $x \backsim \frac{cczz+llcc}{2bcz+lbb-lcc}$, & par consequent $y \backsim \frac{bbzz+llbb}{2bcz+lbb-lcc} - l$, & l'Equation $\sqrt{xy+lx} + \sqrt{xy+ly} \backsim a$, se changera en celle-cy, $z \backsim a$. C'est pourquoy si à la place de z, on met a, les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aacc+llcc,\ aabb-2labc+llcc}{2abc+lbb-lcc}.$$

[illegible] Nous auons supposé

$$a \backsim 6.$$

Si l'on suppose

$$b \backsim 2.$$
$$c \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{37,\ 121}{27}.$$

Ou bien égalez la premiere Puissance $xy+lx$ au quaré $yy+2ly+ll$, pour auoir $x \backsim y+l$, & au lieu de la seconde $xy+ly$, vous aurez celle-cy à égaler au quaré $yy+2ly$, pour le côté duquel prenant $\frac{by}{c}$, on trouuera $y \backsim \frac{2lcc}{bb-cc}$, & par consequent $x \backsim \frac{lbb+lcc}{bb-cc}$, & au lieu de l'Equation $\sqrt{xy+lx} + \sqrt{xy+ly} \backsim a$, on aura celle-cy, $\frac{lbb+2lbc+lcc}{bb-cc} \backsim a$, ou $\frac{lb+lc}{b-c} \backsim a$, dans laquelle on trouuera $b \backsim \frac{ac+lc}{a-l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{aa+ll,\ aa-2la+ll}{2a}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 6.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{37,25}{12}.$$

dont la difference sera toujours égale à l'Vnité.

On tire de cette seconde solution, le canon suiuant;

Si au quarré du Nombre donné on ajoute l'Vnité, & qu'on diuise la somme la somme par le double du nombre donné, on aura l'Vn des deux Nombres qu'on cherche, duquel ôtant l'Vnité, on aura l'autre nombre. canon.

Cette seconde solution se peut aussy trouuer par le moyen de la premiere, sauoir en changeant b, en c, ou bien encore en cette sorte.

Egalez la premiere Puissance $xy+lx$ au quarré xx, pour auoir $x \backsim y+b$, comme auparauant, & au lieu de la seconde Puissance $xy+ly$, on aura celle-cy à égaler au quarré $yy+2ly$, pour le côté duquel prenant $y-b$, on trouuera $y \backsim \frac{bb}{2b+2l}$, & par consequent $x \backsim \frac{bb+2lb+ll}{2b+2l}$, & au lieu de l'Equation $\sqrt{xy+lx}+\sqrt{xy+ly} \backsim a$, on aura celle-cy, $b+l \backsim a$, dans laquelle on trouuera $b \backsim a-l$, & les deux nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

La premiere solution se peut aussy trouuer autrement & plus facilement, en égalant au quarré les deux Puissances precedentes,

$$xy+lx.$$
$$xy+ly.$$

en cette sorte.

Egalez la premiere $xy+lx$, au quarré $\frac{bbxx}{cc}$, dont le côté est $\frac{bx}{c}$, pour auoir $y \backsim \frac{bbx}{c}-l$, & au lieu de la seconde $xy+ly$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $\frac{bbxx}{cc}-lx+\frac{lbbx}{cc}-ll$, pour le côté duquel on doit prendre $a-\frac{bx}{c}$, afinque la somme de ces deux côtez $\frac{bx}{c}$, $a-\frac{bx}{c}$, soit égale au nombre donné a: & alors on trouuera $x \backsim \frac{aacc+llcc}{lbb+2abc-lcc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aacc+llcc,\ aabb-2labc+llcc}{lbb+2abc-lcc}.$$

Parceque Nous auons supposé

$$a \backsim 6.$$

Si l'on suppose

$$b \backsim 3$$
$$c \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{148,256}{77}.$$

Question XXVIII.

Trouuer deux nombres, dont chacun étant ôté de leur produit, il reste deux nombres quarrez, tels que la somme de leurs quarrez soit égale à un nombre donné.

On propose de trouuer deux nombres

$$x.$$
$$y.$$

en sorte que si on ôte chacun de leur produit xy, les deux restes

$$xy - lx.$$
$$xy - ly.$$

soient des nombres quarrez, tels que la somme $\sqrt{xy - lx} + \sqrt{xy - ly}$ de leurs côtez soit égale au nombre donné

$$5 \sim a.$$

Canon. Si on diuise le quarré sous la somme d'un nombre indeterminé & du produit sous un autre nombre indeterminé & le nombre donné, par la somme du produit sous les deux nombres indeterminez & le double du nombre donné, & de l'excez du quarré du premier nombre indeterminé sur le quarré du second, on aura l'un des deux nombres qu'on cherche, duquel on ôtera l'unité, & on multipliera le reste par le quarré du quotient qui viendra en diuisant le premier nombre indeterminé par le second, pour auoir le second nombre qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xy - lx.$$
$$xy - ly.$$

& cette Equation,

$$\sqrt{xy - lx} + \sqrt{xy - ly} \sim a.$$

Egalez la premiere Puissance $xy - lx$ au quarré $\frac{bbxx}{cc}$, pour auoir $y \sim \frac{bbx}{cc} + l$, & au lieu de la seconde $xy - ly$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $\frac{bbxx}{cc} + lx - \frac{lbbx}{cc}$, pour le côté duquel prenant $z - \frac{bx}{c}$, on trouuera $x \sim \frac{cczz + llcc}{2bcz + lcc - lbb}$, & par consequent $y \sim \frac{bbzz + llcc + 2lbcz}{2bcz + lcc - lbb}$, & au lieu de l'Equation $\sqrt{xy - lx} + \sqrt{xy - ly} \sim a$, on aura celle-cy, $z \sim a$. Si donc à la place de z, on met a, les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aacc + llcc,\ aabb + 2labc + llcc}{2abc + lcc - lbb}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \sim 5.$$

Si l'on suppose

$b \sim 2.$

$c \sim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{26, 121}{117}.$

& si l'on suppose

$b \sim 1.$

$c \sim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{13, 18}{5}.$

Il manque icy la Question suiuante, que Bachet n'a resolue qu'en partie, & à laquelle nous en ajouterons trois autres.

1.

Trouuer deux Nombres, dont le produit étant ôté de chacun, il reste deux Nombres quarrez, tels que la somme de leurs côtez soit égale à vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

dont le produit xy, étant ôté de chacun, les deux restes

$lx - xy.$

$ly - xy.$

soient des Nombres quarrez, tels que la somme $\sqrt{lx-xy} + \sqrt{lx-xy}$ de leurs côtez, soit égale au Nombre donné.

$\frac{1}{2} \sim a.$

Si on diuise le quarré sous la difference d'vn Nombre indeterminé & du produit sous vn autre Nombre indeterminé & le Nombre donné, par l'excez de la somme des quarrez des deux Nombres indeterminez sur le produit des mémes Nombres & du double du Nombre donné, on aura l'vn des deux Nombres qu'on cherche, lequel on ôtera de l'vnité, & on multipliera le reste par le quarré du quotient qui viendra en diuisant le premier Nombre indeterminé par le second, pour auoir le second Nombre qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$lx - xy.$

$ly - xy.$

& cette Equation, $\sqrt{lx-xy} + \sqrt{ly-xy} \sim a.$

Egalez la premiere Puissance $lx-xy$ au quarré $\frac{bbxx}{cc}$, pour avoir $y \backsim l-\frac{bbx}{cc}$, & au lieu de la seconde $ly-xy$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré $ll-\frac{lbbx}{cc}-lx+\frac{bbxx}{cc}$, pour le côté duquel prenant $z-\frac{bx}{c}$, on trouvera $x \backsim \frac{llcc-cczz}{lbb+lcc-2bcz}$, & par consequent $y \backsim \frac{llcc-2lbcz+bbzz}{lbb+lcc-2bcz}$, & au lieu de l'Equation, $\sqrt{lx-xy}+\sqrt{ly-xy} \backsim a$, on aura celle-cy, $z \backsim a$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{llcc-aacc,\ aabb-2labc+llcc}{lbb+lcc-2abc}$$

Parceque nous avons supposé

$$a \backsim \tfrac{1}{2}.$$

Si l'on suppose

$$b \backsim 1.$$

$$c \backsim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{48,\ 49}{52}.$$

Cette Solution nous fait connoitre que le Nombre donné doit être moindre que l'Unité, & quand il sera égal à l'Unité, la Solution sera telle,

$$\frac{x,\ y}{x+y}.$$

Si l'on suppose

$$x \backsim 1.$$

$$y \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1,\ 2}{3}.$$

dont la Somme sera toujours égale à l'Unité.

II.

Trouver deux nombres, dont chacun étant ajouté à leur produit, il vienne deux Nombres quarrez, tels que la difference de leurs côtez soit égale à un Nombre donné.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que si on ajoute chacun à leur produit xy, les deux Sommes

$$xy+lx.$$

$$xy+ly.$$

soient des Nombres quarrez, tels que la difference $\sqrt{lx+xy}-\sqrt{ly+xy}$ de leurs côtez soit égale au Nombre donné

$$2. \backsim a.$$

Si par l'excez d'Vn quarré indeterminé sur la somme d'Vn autre quarré indeterminé & du double du produit solide sous le Nombre donné & les côtez des deux quarrez indeterminez, on diuise le produit sous le plus petit quarré indeterminé & la somme de l'Vnité & du quarré du nombre donné, & le quarré de la somme du côté du plus petit quarré indeterminé & du produit sous le côté du plus grand quarré indeterminé & le nombre donné; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xy+lx$$

$$xy+ly.$$

& cette Equation,

$$\sqrt{xy+lx} \cdots \sqrt{xy+ly} \sim a.$$

Egalez la premiere Puissance $xy+lx$ au quarré $\frac{bbxx}{cc}$, pour auoir $y \sim \frac{bbx}{cc} - l$, & au lieu de la seconde $xy+ly$, Vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $\frac{bbxx}{cc} - lx + \frac{lbbx}{cc} - ll$, pour le côté duquel prenant $z + \frac{bx}{c}$, on trouuera $x \sim \frac{cczz+llcc}{lbb-lcc-2bcz}$, & par consequent $y \sim \frac{bbzz+2lbcz+llcc}{lbb-lcc-2bcz}$, & au lieu de l'Equation, $\sqrt{xy+lx} \cdots \sqrt{xy+ly} \sim a$, on aura celle-cy, $z \sim a$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aacc+llcc,\ aabb+2labc+llcc}{lbb-lcc-2abc}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \sim 2.$$

Si l'on suppose

$$b \sim 6.$$

$$c \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{5,\ 169}{11}.$$

& si l'on suppose

$$b \sim 2.$$

$$c \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{5,\ 121}{4}.$$

III.

Trouuer deux nombres, dont chacun étant ôté de leur produit, il reste deux nombres quarrez, tels que la difference de leurs côtez soit égale à Vn nombre donné.

On propose de trouuer deux nombres

$x.$

$y.$

en sorte que si on ôte chacun de leur produit xy, les deux restes

$xy - lx.$

$xy - ly.$

soient des nombres quarrez, tels que la difference $\sqrt{xy-lx} \cdots \sqrt{xy-ly}$ de leurs côtez soit égale au nombre donné

$2 \sim a.$

Canon. Si par l'excez d'un quarré indeterminé sur la somme d'un autre quarré indeterminé & du double du produit solide sous le nombre donné & les côtez des deux quarrez indeterminez on divise le produit sous le plus grand quarré indeterminé & la somme de l'unité & du quarré du nombre donné, & le quarré de la difference entre le côté du plus grand quarré indeterminé & le produit sous le côté du plus petit quarré indeterminé & le nombre donné; on aura les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré

$xy - lx.$

$xy - ly.$

& cette Equation,

$\sqrt{xy-lx} \cdots \sqrt{xy-ly} \sim a.$

Egalez la premiere Puissance $xy - lx$ au quarré $\frac{bbxx}{cc}$, pour avoir $y \sim \frac{bbx}{cc} + l$, & au lieu de la seconde $xy - ly$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $\frac{bbxx}{cc} + lx - \frac{lbbx}{cc} - ll$, pour le côté duquel prenant $z + \frac{bx}{c}$, on trouvera $x \sim \frac{cczz + llcc}{lcc - lbb - 2bcz}$, & par consequent $y \sim \frac{bbzz - 2lbcz + llcc}{lcc - lbb - 2bcz}$, & au lieu de l'Equation $\sqrt{xy-lx} \cdots \sqrt{xy-ly} \sim a$, on aura celle-cy, $z \sim a$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aacc + llcc,\ aabb - 2labc + llcc}{lcc - lbb - 2abc}.$$

Parceque nous avons supposé

$a \sim 2.$

si l'on suppose

$b \sim 1.$

$c \sim 5.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{125,\ 9}{4}.$$

& si l'on suppose

$b \sim 1.$

$c \sim 6.$

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{30, 52}{11}.$$

IV.

Trouuer deux Nombres, dont chacun étant diminué de leur produit, il reste deux Nombres quarrez, tels que la difference de leurs côtez soit égale à Vn Nombre donné.

On propose de trouuer deux nombres,

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que si de chacun on ôte leur produit xy, les deux restes,

$$lx - xy.$$

$$ly - xy.$$

soient des nombres quarrez, tels que la difference $\sqrt{lx - xy} \cdots \sqrt{ly - xy}$, de leurs côtez, soit égale au nombre donné

$$\tfrac{1}{2} \sim a.$$

Si par la somme de deux quarrez indeterminez & du double du solide sous leurs côtez & le nombre donné, on diuise le quarré de la somme du côté du second quarré indeterminé & du produit sous le côté du premier quarré indeterminé & le nombre donné: & le produit sous le second quarré indeterminé & l'excez de l'Vnité sur le quarré du nombre donné; on aura les deux nombres qu'on cherche. canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$lx - xy.$$

$$ly - xy.$$

& cette Equation,

$$\sqrt{lx - xy} \cdots \sqrt{ly - xy} \sim a.$$

Egalez la premiere Puissance $lx - xy$ au quarré $\frac{bbxx}{cc}$, pour auoir $y \sim l - \frac{bbx}{cc}$, & au lieu de la seconde $ly - xy$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $ll - \frac{lbbx}{cc} - lx + \frac{bbxx}{cc}$, pour le côté duquel prenant $z + \frac{bx}{c}$, on trouuera $x \sim \frac{llcc - cczz}{lbb + lcc + 2bcz}$, & par consequent $y \sim \frac{llcc + 2lbcz + bbzz}{lbb + lcc + 2bcz}$, & au lieu de l'Equation $\sqrt{lx - xy} \cdots \sqrt{ly - xy} \sim a$, on aura celle-cy, $z \sim a$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{llcc - aacc,\ aabb + 2labc + llcc}{lbb + lcc + 2abc}.$$

Parceque nous auons supposé

$$a \sim \tfrac{1}{2}.$$

Si l'on suppose

$b \backsim 1.$

$c \backsim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{1,\,3}{4}.$

& si l'on suppose

$b \backsim 1.$

$c \backsim 2.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{12,\,25}{28}.$

Si vous voulez une solution plus simple, mettez

$\frac{x,\,y}{z}.$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & alors vous aurez en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$xz - xy.$

$yz - xy.$

& cette Equation,

$$\frac{\sqrt{xz-xy} \cdots \sqrt{yz-xy}}{z} \backsim a.$$

La difference des deux Puissances precedentes, est $xz - yz$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$z.$

$x - y.$

La moitié de leur somme est $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xz - xy$, on trouvera $z \backsim x + y$, & au lieu de l'Equation $\frac{\sqrt{xz-xy} \cdots \sqrt{yz-xy}}{z} \backsim a$, on aura celle-cy, $\frac{x-y}{x+y} \backsim a$, dans laquelle on trouvera

$x \backsim 1 + a.$

$y \backsim 1 - a.$

$z \backsim 2.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}a.$

$\frac{1}{2}1 - \frac{1}{2}a.$

Parceque nous avons supposé

$a \backsim \frac{1}{2}.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{3,\,1}{4}.$

dont la somme sera toujours égale à l'Unité.

On tire de cette seconde Solution, le Canon suivant,

Canon. Si à la moitié de l'Unité on ajoute & on ôte la moitié du Nombre donné, on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Question XXIX.

Trouver deux Nombres quarrez, dont chacun étant ajouté à leur produit, il vienne deux Nombres quarrez.

On propose de trouver deux nombres quarrez

$$xx.$$
$$yy.$$

en sorte que si on ajoute chacun à leur produit $xxyy$, les deux sommes

$$xxyy+llxx.$$
$$xxyy+llyy.$$

Soient chacune un nombre quarré.

Si on divise chacun des deux côtez d'un triangle rectangle par l'autre, on aura les côtez des deux quarrez qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura en moindres termes, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx+ll.$$
$$yy+ll.$$

Egalez la premiere $xx+ll$ au quarré $xx\mp 2bx+bb$, & la deuxieme $yy+ll$ au quarré $yy\mp 2ay+aa$, pour avoir

$$x\sim\frac{bb\cdots ll}{2b}.$$
$$y\sim\frac{aa\cdots ll}{2a}.$$

& les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^4-2llaa+l^4}{4aa}.$$
$$\frac{b^4-2llbb+l^4}{4bb}.$$

Si l'on suppose

$$a\sim 3.$$
$$b\sim 2.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{9}{16}.$$
$$\frac{16}{9}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{3}{4}.$$
$$\frac{4}{3}.$$

& si l'on suppose

$$a\sim 2.$$
$$b\sim 4.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{225}{64}.$$
$$\frac{9}{16}.$$

dont les côtez sont de cette grandeur,

$$\frac{15}{8}.$$

$$\frac{3}{4}.$$

Pour auoir une solution plus generale, égalez la premiere Puissance $xx+ll$, au quarré $xx \pm \frac{2lax}{b} + \frac{llaa}{bb}$, & la deuxieme $yy+ll$, au quarré $ll \mp \frac{2lay}{b} + \frac{aayy}{bb}$, pour auoir

$$x \backsim \frac{aa \cdots bb}{2ab}.$$

$$y \backsim \frac{2ab}{aa \cdots bb}.$$

Seconde Solution.

& les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^4-2aabb+b^4}{4aabb}.$$

$$\frac{4aabb}{a^4-2aabb+b^4}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$

$$b \backsim 2.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{9}{16}.$$

$$\frac{16}{9}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{3}{4}.$$

$$\frac{4}{3}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$

$$b \backsim 3.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{25}{144}.$$

$$\frac{144}{25}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{5}{12}.$$

$$\frac{12}{5}.$$

Pour auoir une solution encore plus generale, égalez la premiere Puissance $xx+ll$, au quarré $ll \mp \frac{2lcx}{d} + \frac{ccxx}{dd}$, & la deuxieme $yy+ll$, au quarré $ll \mp \frac{2lay}{b} + \frac{aayy}{bb}$, pour auoir

$$x \backsim \frac{2cd}{cc \cdots dd}.$$

$$y \backsim \frac{2ab}{aa \cdots bb}.$$

Troisieme Solution.

& les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4aabb}{a^4-2aabb+b^4}.$$

$$\frac{4ccdd}{c^4-2ccdd+d^4}.$$

Si

Si l'on suppose

$a \sim 3.$
$b \sim 2.$
$c \sim 3.$
$d \sim 4.$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{144}{25}.$
$\frac{576}{49}.$

dont les côtez sont tels,

$\frac{12}{5}.$
$\frac{24}{7}.$

& Si l'on suppose

$a \sim 1.$
$b \sim 2.$
$c \sim 1.$
$d \sim 3.$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{16}{9}.$
$\frac{9}{16}.$

dont les côtez sont tels,

$\frac{4}{3}.$
$\frac{3}{4}.$

Ou bien aprez auoir égalé la premiere Puissance $xx+ll$ au quarré $xx \mp \frac{2lax}{b} + \frac{llaa}{bb}$, égalez la deuxieme $yy+ll$ au quarré $yy \mp \frac{2lcy}{d} + \frac{llcc}{dd}$, & vous trouuerez,

$x \sim \frac{aa-bb}{2ab}.$
$y \sim \frac{cc-dd}{2cd}.$

& les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$\frac{a^4-2aabb+b^4}{4aabb}.$ Quatrieme Solution.

$\frac{c^4-2ccdd+d^4}{4ccdd}.$

Si l'on suppose

$a \sim 1.$
$b \sim 2.$
$c \sim 3.$
$d \sim 4.$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{9}{16}.$
$\frac{49}{576}.$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{3}{4}.$$

$$\frac{7}{24}.$$

Il suit que de ces deux dernieres solutions que les deux quarrez qu'on cherche, se peuvent encore exprimer ainsi,

Cinquieme Solution.

$$\frac{4aabb}{a^4 - 2aabb + b^4}.$$

$$\frac{c^4 - 2ccdd + d^4}{4ccdd}.$$

Si l'on suppose

$a \sim 1.$

$b \sim 2.$

$c \sim 3.$

$d \sim 4.$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{9}{16}.$$

$$\frac{576}{49}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{3}{4}.$$

$$\frac{24}{7}.$$

& si l'on suppose

$a \sim 2.$

$b \sim 3.$

$c \sim 4.$

$d \sim 5.$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{144}{25}.$$

$$\frac{81}{1600}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{12}{5}.$$

$$\frac{9}{40}.$$

On void évidemment que cette Question resoud la suivante; Trouver deux Nombres quarrez, tels que si à chacun on ajoute l'unité, il vienne deux nombres quarrez.

à cause des deux Puissances precedentes,

$$xx + ll.$$

$$yy + ll.$$

Mais on la peut encore proposer plus generalement en cette sorte.

Trouuer deux nombres quarez, tels que si à chacun on ajoute vn même nombre quarré, il vienne deux nombres quarez.

Ces deux nombres quarez se pourront trouuer aisément par le moyen du canon suiuant;

Si on diuise les bases de deux triangles rectangles de même hauteur, par cette même hauteur commune, on aura les côtez des deux quarez qu'on cherche. Canon.

Ce Canon a été tiré de la metode suiuante. Mettez

$$\frac{xx,\ yy}{zz}.$$

pour les deux quarez qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez en entiers & en moindres termes, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$yy + zz.$$
$$xx + zz.$$

Egalez la premiere $yy + zz$ au quarré $yy \mp \frac{2ayz}{b} + \frac{aazz}{bb}$, pour auoir en entiers,

$$y \sim aa - bb.$$
$$z \sim 2ab.$$

& la deuxieme $xx + zz$ au quarré $xx \mp \frac{2cxz}{d} + \frac{cczz}{dd}$, pour auoir encore en entiers,

$$x \sim cc - dd.$$
$$z \sim 2cd.$$

& par consequent cette Equation, $2ab \sim 2cd$, dans laquelle on trouuera $d \sim \frac{ab}{c}$. C'est pourquoy au lieu de $x \sim cc - dd$, on aura $x \sim cc - \frac{aabb}{cc}$, & les deux quarez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^8 - 2aabbc^4 + a^4b^4}{4aabbc^4}.$$

$$\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{4aabb}.$$ Sixieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 3.$$
$$c \sim 2.$$

les deux quarez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{49}{576}.$$
$$\frac{16}{9}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{7}{24}.$$
$$\frac{4}{3}.$$

Question XXX.

Trouuer deux Nombres quarez, dont chacun étant ôté de leur produit, il reste deux Nombres quarez.

On propose de trouuer deux nombres quarez

$$xx.$$

$$yy.$$

en sorte que si on ôte chacun de leur produit $xxyy$, les deux restes

$$xxyy-llxx.$$

$$xxyy-llyy.$$

Soient des Nombres quarez.

Canon. Si l'on diuise separément l'hypotenuse d'vn triangle rectangle par chacun des deux côtez, on aura les côtez des deux quarez qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura en moindres termes, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$yy-ll.$$

$$xx-ll.$$

Egalez la premiere $yy-ll$, au quarré $yy-2ay+aa$, & la deuxieme $xx-ll$, au quarré $xx-2bx+bb$, pour auoir

$$y \backsim \frac{aa+ll}{2a}.$$

$$x \backsim \frac{bb+ll}{2b}.$$

& les deux quarez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^4+2llaa+l^4}{4aa}.$$

$$\frac{b^4+2llbb+l^4}{4bb}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$

$$b \backsim 3.$$

les deux quarez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{25}{9}.$$

$$\frac{25}{16}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{5}{3}.$$

$$\frac{5}{4}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$

$$b \backsim 4.$$

les deux quarez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{289}{64}.$$

$$\frac{25}{16}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{17}{8}.$$

$$\frac{5}{4}.$$

Pour auoir une solution plus generale, égalez la premiere Puissance $yy - ll$ au quarré $yy - \frac{2lay}{b} + \frac{llaa}{bb}$, pour auoir $y \sim \frac{aa+bb}{2ab}$, & la deuxieme $xx - ll$, au quarré zz, pour auoir $x \sim \sqrt{zz+ll}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $zz+ll$, pour le côté duquel prenant $l \mp \frac{az}{b}$, on trouuera $z \sim \frac{2ab}{aa-bb}$, & par consequent $x \sim \frac{aa+bb}{aa-bb}$, & les deux quarez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^4+2aabb+b^4}{4aabb}.$$ Seconde Solution.

$$\frac{a^4+2aabb+b^4}{a^4-2aabb+b^4}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

$$b \sim 1.$$

les deux quarez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{25}{16}.$$

$$\frac{25}{9}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{5}{4}.$$

$$\frac{5}{3}.$$

Si vous voulez une solution encore plus generale, au lieu de prendre $l \mp \frac{az}{b}$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance precedente $zz+ll$, prenez $l \mp \frac{cz}{d}$, & alors vous trouuerez $z \sim \frac{2cd}{cc-dd}$, & au lieu de $x \sim \sqrt{zz+ll}$, vous aurez $x \sim \frac{cc+dd}{cc-dd}$, & les deux quarez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^4+2aabb+b^4}{4aabb}.$$ Troisieme Solution.

$$\frac{c^4+2ccdd+d^4}{c^4-2ccdd+d^4}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 4.$$

$$b \sim 3.$$

$$c \sim \sqrt{\frac{9}{2}}.$$

$$d \sim \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

les quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{625}{576}.$$

$$\frac{25}{16}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{25}{24}.$$

$$\frac{5}{4}.$$

Ou bien égalez la premiere Puissance $yy-ll$, au quarré $yy-\frac{2lay}{b}+\frac{llaa}{bb}$, & la deuxieme $xx-ll$, au quarré $xx-\frac{2lcx}{d}+\frac{llcc}{dd}$, pour avoir

$$y \backsim \frac{aa+bb}{2ab}.$$

$$x \backsim \frac{cc+dd}{2cd}.$$

& les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

Quatrieme Solution.

$$\frac{a^4+2aabb+b^4}{4aabb}$$

$$\frac{c^4+2ccdd+d^4}{4ccdd}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$

$$b \backsim 2.$$

$$c \backsim 3.$$

$$d \backsim 4.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{625}{576}.$$

$$\frac{25}{16}.$$

comme auparavant.

Il est évident que par cette Question, l'on resoud celle-cy;

Trouver deux Nombres quarrez, dont chacun étant diminué de l'Unité, il reste deux Nombres quarrez.

à cause des deux Puissances precedentes,

$$xx-ll.$$

$$yy-ll.$$

Mais cette Question se peut proposer plus generalement, en cette sorte;

Trouver deux nombres quarrez, dont chacun étant diminué d'un même Nombre quarré, il reste deux Nombres quarrez.

que l'on peut aisément resoudre par le moyen de ce Canon.

Canon. Si on divise les hypotenuses de deux triangles rectangles de même hauteur, chacune par cette hauteur commune, on aura les côtez des deux quarrez qu'on cherche.

Ce Canon a été tiré de la solution suivante. Mettez

$$\frac{xx,\ yy}{zz}.$$

pour les deux quarrez qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez en entiers & en moindres termes, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx-zz.$$

$$yy-zz.$$

Egalez la premiere $xx - zz$ au quarré $xx - \frac{2axz}{b} + \frac{aazz}{bb}$, pour auoir en entiers,

$$x \sim aa + bb.$$
$$z \sim 2ab.$$

& la deuxieme $yy - zz$ au quarré $yy - \frac{2cyz}{d} + \frac{cczz}{dd}$, pour auoir aussy en entiers,

$$y \sim cc + dd.$$
$$z \sim 2cd.$$

& par consequent cette Equation, $2ab \sim 2cd$, dans laquelle on trouuera $d \sim \frac{ab}{c}$, & par consequent $y \sim cc + \frac{aabb}{cc}$, & les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

Cinquieme Solution.

$$\frac{a^4 + 2aabb + b^4}{4aabb}.$$
$$\frac{c^8 + 2aabbc^4 + a^4b^4}{4aabbcc}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 3.$$
$$c \sim 1.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1369,169}{144}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{37,13}{12}.$$

Bachet ajoute icy la Question suiuante, qui sera suiuie de trois autres,

1.

Trouuer deux Nombres quarrez, dont chacun étant diminué de leur produit, il reste deux Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres quarrez

$$xx.$$
$$yy.$$

en sorte que si de chacun on ôte leur produit $xxyy$, les deux restes,

$$\|xx - xxyy.$$
$$\|yy - xxyy.$$

soient des Nombres quarrez.

Si on diuise les deux côtez d'vn triangle rectangle, chacun par l'hypotenuse, on aura les côtez des deux quarrez qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura en Moindres termes,

ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$ll - yy.$$

$$ll - xx.$$

Egalez la premiere $ll - yy$ au quarré $yy - \frac{2ay}{b} + \frac{aayy}{bb}$, & la deuxième $ll - xx$ au quarré $ll - \frac{2cx}{d} + \frac{ccxx}{dd}$, pour avoir

$$y \backsim \frac{2ab}{aa+bb}.$$

$$x \backsim \frac{2cd}{cc+dd}.$$

& les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4aabb}{a4+2aabb+b4}.$$

$$\frac{4ccdd}{c4+2ccdd+d4}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$

$$b \backsim 2.$$

$$c \backsim 3.$$

$$d \backsim 4.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{16}{25}.$$

$$\frac{576}{625}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{4}{9}.$$

$$\frac{24}{25}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$

$$b \backsim 5.$$

$$c \backsim 3.$$

$$d \backsim 7.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1764}{3364}.$$

$$\frac{400}{841}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{21}{29}.$$

$$\frac{20}{29}.$$

Il est évident que par cette Question, l'on resoud celle-cy;

Trouver deux nombres quarrez, dont chacun étant ôté de l'Unité, il reste deux nombres quarrez.

à cause des deux Puissances precedentes

$$ll - yy.$$

$$ll-yy.$$
$$ll-xx.$$

Mais on la peut proposer plus generalement, en cette sorte;

Trouuer deux Nombres quarrez, dont chacun étant ôté d'Vn même Nombre quarré, il reste deux Nombres quarrez.

Pour resoudre cette Question ainsy proposée, mettez

$$\frac{xx,\ yy}{zz}.$$

pour les deux quarrez qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, Vous aurez en entiers & en moindres termes, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$zz-yy.$$
$$zz-xx.$$

Leur difference est $xx-yy$, qui a ces deux Nombres produisans,

$$x+y.$$
$$x-y.$$

La moitié de leur somme est x, dont le quarré xx etant égalé à la plus grande Puissance $zz-yy$, on trouuera $z \sim \sqrt{xx+yy}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $xx+yy$, pour le côté duquel prenant $x \mp \frac{ay}{b}$, on trouuera

$$x \sim aa-bb.$$
$$y \sim 2ab.$$
$$z \sim aa+bb.$$

& les deux quarrez qu'on cherche, seront tels, Seconde Solution.

$$\frac{a4-2aabb+b4,\ 4aabb}{a4+2aabb+b4}.$$

dont la somme sera toujours égale à l'Vnité.

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 2.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{9,\ 16}{25}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{3,\ 4}{5}.$$

II.

Trouuer deux Nombres, dont le produit étant ajouté au quarré de chacun, il Vienne deux Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont le produit xy, étant ajouté separément à leurs quarrez xx, yy, les deux sommes

$$xx + xy.$$
$$yy + xy.$$

soient chacune un nombre quarré.

Canon. Les quarrez des deux côtez d'un triangle rectangle, sont les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx + xy.$$
$$yy + xy.$$

Egalez la premiere $xx + xy$ au quarré $\frac{aaxx}{bb}$, pour avoir $y \infty \frac{aax}{bb} - x$, & la deuxieme $yy + xy$ au quarré $\frac{ccyy}{dd}$, pour avoir le même $y \infty \frac{ddx}{cc - dd}$, & par consequent cette Equation, $\frac{aax}{bb} - x \infty \frac{ddx}{cc - dd}$, dans laquelle on trouvera $d \infty \frac{c}{a}\sqrt{aa - bb}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $aa - bb$, pour le côté duquel prenant $a - \frac{bm}{n}$, on trouvera en entiers,

$$a \infty mm + nn.$$
$$b \infty 2mn.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$4mmnn.$$
$$m^4 - 2mmnn + n^4.$$

qui sont deux quarrez égaux à un nombre quarré.

Si l'on suppose

$$m \infty 1.$$
$$n \infty 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$16.$$
$$9.$$

A l'occasion de cette Question, on devroit ajouter celle-cy;

Trouver deux nombres, dont le produit étant ôté du quarré de chacun, il reste deux nombres quarrez.

Mais elle est impossible: car si l'on met

$$x.$$
$$y.$$

pour les deux nombres qu'on cherche, on aura selon les conditions de la Question, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx - xy.$$
$$yy - xy.$$

Dans la premiere $xx-xy$, on trouvera $x \oplus y$: & dans la seconde $yy-xy$, on trouvera $x \ominus y$; ce qui étant contradictoire, on conclud aisément que la Question proposée est impossible.

Ou bien le produit des deux Puissances precedentes est $2xxyy-xy^3-x^3y$, qui doit être un nombre quarré: c'est pourquoy si on le divise par le quarré $xx-2xy+yy$, le quotient $-xy$ doit être un nombre quarré, ce qui étant impossible, parcequ'il est nié, la Question proposée est aussy impossible. Autre demonstration.

Ou bien encore considerez les deux nombres qu'on cherche comme les deux segmens de l'hypotenuse d'un triangle rectangle, & alors leur produit doit être consideré comme le quarré de la perpendiculaire, laquelle étant plus grande que l'un des segmens, & plus petite que l'autre, parcequ'elle est moyenne proportionnelle entre les deux segmens, son quarré ne peut pas être ôté du quarré du plus petit segment, c'est à dire que le produit des deux nombres qu'on cherche, ne peut pas être ôté du quarré du plus petit. D'où il suit que la Question proposée est impossible. Troisieme demonstration.

On demontrera de la même façon, que cette autre Question est impossible.

Trouver deux nombres, dont le produit étant diminué du quarré de chacun, il reste deux nombres quarrez.

Lemme.

Les quatre quantitez, dont le produit plan-plan est un nombre quarré, sont proportionnelles.

Je dis que si les quatre quantitez a, b, c, d, produisent par leur multiplication un nombre quarré, elles seront proportionnelles. Car puisque le plan-plan $abcd$ est un quarré, par la supposition, les deux plans ab, cd, ou les deux ac, bd, ou bien encore les deux ad, bc, qui le produisent, seront semblables, par 2. 9. Eucl. c'est pourquoy ces deux plans semblables auront leurs côtez a, b, c, d, proportionnels. Ce qu'il faloit demontrer.

III.

Trouver deux nombres, dont le produit étant ajouté au quarré du premier, & étant ôté du quarré du second, il vienne deux nombres quarrez.

On propose de trouver deux nombres

x.
y.

dont le produit xy, étant ajouté au quarré xx du premier, & étant ôté du quarré yy du second, la somme $xx+xy$, & la difference $yy-xy$ soient chacune Vn Nombre quarré.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx+xy.$$
$$yy-xy.$$

Pour cette fin, il faut égaler au quarré leur produit xy^3-x^3y, lequel a ces quatre Nombres produisans,

$$x.$$
$$y.$$
$$x+y.$$
$$x-y.$$

lesquels par consequent doiuent être proportionnels, par le Lemme precedent, ce qui est impossible : car s'ils étoient proportionnels, ils ne le pourroient être qu'en l'Vne de ces deux Manieres,

$$x, y :: x+y, x-y.$$
$$x, x-y :: y, x+y.$$

les autres Manieres que l'on peut former autrement, étant equiualentes à ces deux, qui sont impossibles.

Pour demontrer en premier lieu, que la premiere analogie, $x, y :: x+y, x-y$, est impossible, on considerera que puisque l'antecedent x, est moindre que l'antecedent $x+y$, aussy le consequent y, sera moindre que le consequent $x-y$, ce qui repugne à la seconde Puissance $yy-xy$, où y, doit être plus grand que $x-y$. D'où il est aisé de conclure que la premiere analogie $x, y :: x+y, x-y$, est impossible.

Pour demontrer l'impossibilité de la seconde analogie, $x, x-y :: y, x+y$, on considerera pareillement que puisque l'antecedent x, est plus grand que son consequent $x-y$, aussy l'antecedent y est plus grand que son consequent $x+y$, ce qui étant essentiellement impossible, on conclud aussy que la seconde analogie $x, x-y :: y, x+y$, est impossible.

Donc puisque les quatre Nombres produisans du produit xy^3-x^3y ne peuuent pas être proportionnels, ce même produit xy^3-x^3y ne peut pas être Vn Nombre quarré, ny par consequent les deux Puissances precedentes

$$xx+xy.$$
$$yy-xy.$$

D'où il suit que la Question proposée est impossible.

Puisque le produit xy^3-x^3y ne peut pas être un nombre quarré, & qu'il est aire de ce triangle rectangle, Corollaire remarquable.

$$2xy.$$
$$xx-yy.$$
$$xx+yy.$$

il s'ensuit que l'aire d'un triangle rectangle, dont les trois lignes sont rationnelles, ne peut pas être un nombre quarré.

IV.

Trouver deux Nombres, dont le produit étant augmenté du quarré du premier, & étant diminué du quarré du second, il vienne deux nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont le produit xy étant augmenté du quarré xx, du premier, & étant diminué du quarré yy, du second, la somme $xy+xx$, & la difference $xy-yy$ soient des nombres quarrez.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xy+xx.$$
$$xy-yy.$$

Pour cette fin il faut égaler au quarré le produit x^3y-xy^3, ce qui est impossible, parcequ'il est l'aire d'un triangle rectangle, laquelle ne peut pas être un nombre quarré, comme il a été demontré dans la Question precedente. D'où il suit que la Question proposée est aussy impossible.

Question XXXI.

Trouver deux Nombres, dont la somme étant ajoutée & ôtée de leur produit, il vienne deux Nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la somme $x+y$ étant ajoutée & ôtée de leur produit xy, la somme $xy+1x+1y$, & la difference $xy-1x-1y$, soient des Nombres quarrez.

Si on divise la somme de l'unité & de l'hypotenuse d'un triangle rectangle par le côté égal au double du produit des Canon.

Nombres generateurs, on aura l'un des deux Nombres qu'on cherche: que l'on multipliera par l'hypotenuse du même triangle rectangle, pour avoir l'autre Nombre.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xy+lx+ly.$$

$$xy-lx-ly.$$

Egalez la premiere $xy+lx+ly$ au quarré yy, pour avoir $x \backsim \frac{yy-ly}{y+l}$, & au lieu de la seconde $xy-lx-ly$, on aura en entiers & en moindres termes, celle-cy à égaler au quarré, $yy-2ly-3ll$, pour le côté duquel prenant $y \cdots a$, on trouvera $y \backsim \frac{aa+3ll}{2a-2l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^4-2la^3+3llaa-6l^3a+15l^4}{2a^3+2laa-2lla-2l^3}.$$

$$\frac{aa+3ll}{2a-2l}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$35, \frac{63}{18}.$$

Pour avoir une Solution plus generale, égalez la premiere Puissance $xy+lx+ly$ au quarré zz pour avoir $x \backsim \frac{zz-ly}{y+l}$, & au lieu de la seconde Puissance $xy-lx-ly$ vous aurez en entiers & en moindres termes, celle-cy à égaler au quarré, $yyzz-llzz-2llyy-2ly^3$. Egalez auparavant au quarré la Puissance $yy-ll$, qui multiplie le quarré zz afinque le premier terme devienne quarré: si vous l'égalez au quarré $yy-2ay+aa$, en sorte qu'on ait $\sqrt{yy-ll} \backsim y \cdots a$, on trouvera $y \backsim \frac{aa+ll}{2a}$, & par consequent $\sqrt{yy-ll} \backsim \frac{aa-ll}{2a}$, que nous apelerons m, pour éviter un long calcul, & au lieu de la Puissance precedente $yyzz-llzz-2llyy-2ly^3$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $mmzz-2llyy-2ly^3$, pour le côté duquel prenant $mz \cdots \frac{byy}{c}$, on trouvera $z \backsim \frac{bbyy+lccy+2llcc}{2bcm}$, & si on restitue à y sa valeur trouvée $\frac{aa+ll}{2a}$, & à m sa veritable valeur $\frac{aa-ll}{2a}$, on aura $z \backsim \frac{a^4bb+4la^3cc+8llaacc+2llaabb+4la^3cc+l^4bb}{4a^3bc-4llabc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{aa+ll}{2a}.$$

$$\frac{\left.\begin{matrix}+aab^4\\+4llb^4\\+16llc^4\\+16llbbcc\end{matrix}\right\}a^6 \left.\begin{matrix}+32l^3bbcc\\+64l^3c^4\end{matrix}\right\}a^5 \left.\begin{matrix}+64l^4b^4\\+96l^4c^4\\+32l^4bbcc\end{matrix}\right\}a^4 \left.\begin{matrix}+32l^5bbcc\\+64l^5c^4\end{matrix}\right\}a^3 \left.\begin{matrix}+16l^6c^4\\+16l^6bbcc\end{matrix}\right\}aa +l^8b^4}{8a^7bbcc+16la^6bbcc-8a^5llbbcc-32l^3a^4bbcc-8l^4a^3bbcc+16l^5aabbcc+8l^6abbcc}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$
$$c \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{8689,\ 1620}{1296}.$$

On peut autrement & plus facilement rendre quarée la Puissance precedente $yyzz - llzz - 2llyy - 2ly^3$, sauoir en supposant

$$y \sim \frac{az}{b}.$$

pour auoir en entiers & en moindres termes cette autre Puissance à égaler au quarré, $aabbzz - llb^4 - 2llaabb - 2la^3bz$, pour le côté duquel prenant $abz - bcd$, on trouuera

$$z \sim \frac{bccdd + 2llaab + llb^3}{2abcd - 2la^3}.$$

$$y \sim \frac{accdd + 2lla^3 + llabb}{2abcd - 2la^3}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aaccdd + 2lla^3 + llabb}{2abcd - 2la^3}.$$

$$\frac{4l^4a^6 \left.\begin{array}{l} +6l^4bb \\ -4l^3bcd \\ +2llccdd \end{array}\right\} a^4 \left.\begin{array}{l} +4l^4b^4 \\ -2lbc^3d^3 \\ -2l^3b^3cd \\ +4llbbccdd \end{array}\right\} aa + 2llb^4ccdd + bbc^4d^4 + l^4b^6.}{2aabc^3d^3 - 4lla^4bcd + 2llaab^3cd - 2la^4ccdd - 2l^3a^4bb + 4laabbccdd}.$$

Troisieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 2.$$
$$c \sim 1.$$
$$d \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{182,\ 63}{18}.$$

La Metode de Diophante est plus abregée que celle-cy, & elle est équiualente à la suiuante, où Nous auons decouuert cette proprieté des Nombres, dont Diophante se sert pour resoudre la Question, comme Vous alez Voir.

Egalez la premiere Puissance $xy + lx + ly$ au quarré $\frac{aaxx + 2abxx + bbxx}{cc}$, pour auoir le Plan $xy \sim \frac{aaxx + 2abxx + bbxx}{cc} - lx - ly$, & la deuxieme Puissance $xy - lx - ly$, au quarré $\frac{aaxx - 2abxx + bbxx}{cc}$, pour auoir le même Plan $xy \sim \frac{aaxx - 2abxx + bbxx}{cc} + lx + ly$, & par consequent cette Equation, $\frac{aaxx + 2abxx + bbxx}{cc} - lx - ly \sim \frac{aaxx - 2abxx + bbxx}{cc} + lx + ly$, dans laquelle on trouuera la somme $lx + ly \sim \frac{2abxx}{cc}$. c'est pourquoy si à la place de cette somme $lx + ly$, on met sa Valeur trouuée $\frac{2abxx}{cc}$, l'Equation

Metode de Diophante.

precedente $xy \sim \frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc} - lx - ly$, se changera en celle-cy, $xy \sim \frac{aaxx+bbxx}{cc}$, dans laquelle on trouuera $y \sim \frac{aax+bbx}{cc}$, & au lieu de $lx+ly \sim \frac{2abxx}{cc}$, on aura $lx + \frac{laax+lbbx}{cc} \sim \frac{2abxx}{cc}$, & dans cette Equation l'on trouuera $x \sim \frac{aa+bb+cc}{2ab}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Quatrieme Solution.

$$\frac{aa+bb+cc}{2ab}.$$

$$\frac{a^4+2aabb+b^4+aacc+bbcc}{2abcc}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 3.$$
$$c \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{7,91}{6}.$$

On tire de cette quatrieme Solution, le Canon suiuant;

Canon. Si on diuise la somme d'vn quarré indeterminé & de l'hypotenuse d'vn triangle rectangle, par le côté égal au double du produit des Nombres generateurs, on aura l'vn des deux Nombres qu'on cherche, qu'il faudra multiplier par l'hypotenuse, & diuiser le produit par le quarré indeterminé, pour auoir l'autre Nombre.

On peut aussy égaler la premiere Puissance $xy+lx+ly$, au quarré $\frac{aaxx}{bb}$, pour auoir $xy \sim \frac{aaxx}{bb} - lx - ly$, & la deuxieme $xy-lx-ly$ au quarré $\frac{aaxx}{cc}$, pour auoir le même $xy \sim \frac{aaxx}{cc} + lx + ly$, & par consequent cette Equation, $\frac{aaxx}{bb} - lx - ly \sim \frac{aaxx}{cc} + lx + ly$, dans laquelle on trouuera $lx+ly \sim \frac{aaxx}{2bb} - \frac{aaxx}{2cc}$, & au lieu de $xy \sim \frac{aaxx}{bb} - lx - ly$, ou de $xy \sim \frac{aaxx}{cc} + lx + ly$, on aura $xy \sim \frac{aaccxx+aabbxx}{2bbcc}$, & par consequent $y \sim \frac{aabbx+aaccx}{2bbcc}$, & au lieu de $lx+ly \sim \frac{aaxx}{2bb} - \frac{aaxx}{2cc}$, on aura $lx + \frac{laabbx+laaccx}{2bbcc} \sim \frac{aaxx}{2bb} - \frac{aaxx}{2cc}$, & dans cette Equation l'on trouuera $x \sim \frac{aabb+2bbcc+aacc}{aacc-aabb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Cinquieme Solution.

$$\frac{aabb+2bbcc+aacc}{aacc-aabb}.$$

$$\frac{aab^4+2aabbcc+aac^4+2bbc^4+2ccb^4}{2bbc^4-2ccb^4}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 1.$$
$$c \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{104,69}{24}.$$

On auroit pû rendre plus generales ces deux dernieres

Solutions, en mettant par tout des lettres differentes, ce qui auroit rendu la Solution plus embarassée. Nous aurons soin de mettre par tout de differentes lettres dans la Solution suiuante.

Supposez pour auoir vn calcul plus aisé,

$$x+y \backsim z.$$

& alors vous aurez ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$xy+lz.$$

$$xy-lz.$$

Egalez la premiere $xy+lz$ au quarré $\frac{aazz}{bb}$, pour auoir $xy \backsim \frac{aazz}{bb}-lz$, & la deuxieme $xy-lz$ au quarré $\frac{cczz}{dd}$, pour auoir le même $xy \backsim \frac{cczz}{dd}+lz$, & par consequent cette Equation, $\frac{aazz}{bb}-lz \backsim \frac{cczz}{dd}+lz$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{2lbbdd}{aadd-bbcc}$, & au lieu de l'Equation supposée $x+y \backsim z$, on aura celle-cy, $x+y \backsim \frac{2lbbdd}{aadd-bbcc}$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{2lbbdd}{aadd-bbcc}-x$, & au lieu de $xy \backsim \frac{aazz}{bb}-lz$, ou de $xy \backsim \frac{cczz}{dd}+lz$, on aura $\frac{2lbbddx}{aadd-bbcc}-xx \backsim \frac{2llaabbd^4+2llccddb^4}{a^4d^4-2aabbccdd+b^4c^4}$, où l'on trouuera $x \backsim \frac{lbbdd}{aadd-bbcc} \mp \frac{lbdd}{aadd-bbcc}\sqrt{bbdd-2aadd-bbcc}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $bbdd-2aadd-2bbcc$; Pour cette fin égalez auparauant au quarré la Puissance $bb-2aa$, qui multiplie le quarré dd, comme au quarré $bb-\frac{2abm}{n}+\frac{aamm}{nn}$, & vous trouuerez en entiers,

$$a \backsim 2mn.$$

$$b \backsim mm+2nn.$$

& au lieu de la Puissance precedente $bbdd-2aadd-2bbcc$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $m^4dd-4mmnndd+4nndd-2m^4cc-8ccmmnn-8ccn^4$, pour le côté duquel prenant $mmd \ldots 2nnd \ldots fgc$, on trouuera en entiers,

$$c \backsim 2fgmn-4fgnn.$$

$$d \backsim ffgg+8mmnn+8n^4+2m^4.$$

C'estpourquoy si l'on suppose

$$m \backsim 1.$$

$$n \backsim 1.$$

$$f \backsim 2.$$

$$g \backsim 2.$$

on trouuera

$$a \backsim 2.$$

$$b \backsim 3.$$

$$c \backsim 8.$$

$$d \backsim 4.$$

ou

$$c \backsim 4.$$

$$d \backsim 17.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1275,\ 1326}{506}.$$

Si Vous voulez d'autres Solutions, mettez

$$x+y.$$

$$x-y.$$

pour les deux nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, Vous aurez ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx-yy+2lx.$$

$$xx-yy-2lx.$$

Egalez la premiere $xx-yy+2lx$ au quarré xx, pour avoir $lx \backsim \frac{1}{2}yy$, & au lieu de la seconde $xx-yy-2lx$ Vous aurez en entiers & en moindres termes, celle-cy à égaler au quarré $yy-8ll$, pour le côté duquel prenant $y-2a$, on trouuera

$$y \backsim a+\frac{2ll}{a}.$$

$$lx \backsim \frac{1}{2}aa+2ll+\frac{2l^4}{aa}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Sixieme Solution.

$$\frac{a^4+2la^3+4llaa+4l^3a+4l^4,\ a^4-2la^3+4llaa-4l^3a+4l^4}{2aa}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{15,\ 3}{2}.$$

dont la somme sera toujours Vn Nombre quarré. Ainsy ils satisferont, étant ainsy trouuez aux conditions de la Quest. XXXII.

Ou bien égalez la premiere Puissance $xx-yy+2lx$ au quarré $xx+2xy+yy$, pour avoir $x \backsim \frac{yy}{l-y}$, & au lieu de la seconde Puissance $xx-yy-2lx$, Vous aurez en entiers & en moindres, celle-cy à égaler au quarré $4ly-3ll$, pour le côté duquel prenant a, on trouuera $y \backsim \frac{1}{4}aa+\frac{3}{4}ll$, & par consequent $lx \backsim \frac{a^4+6llaa+9l^4}{4ll-4aa}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Septieme Solution.

$$\frac{2llaa+6l^4,\ a^4+4llaa+3l^4}{2ll-2aa}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim \frac{1}{3}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{104,\ 65}{24}.$$

Si Vous voulez que la somme de ces deux Nombres ainsy trouuez soit Vn Nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette

Puissance $2ll-2aa$. Pour cette fin, Supposez

$$a \sim l-z.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $4lz-zz$ pour le côté duquel prenant $\frac{bz}{c}$, on trouvera

$$z \sim \frac{4cc}{bb+cc}.$$

$$a \sim \frac{bb-3cc}{bb+cc}.$$

C'estpourquoy si l'on suppose

$$b \sim 2.$$

$$c \sim 1.$$

on trouvera

$$a \sim \frac{3}{5}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{357,\ 525}{200}.$$

dont la somme $\frac{441}{100}$ a sa Racine quarrée $\frac{21}{10}$.

Si vous voulez encore d'autres solutions, mettez

$$xz.$$

$$yz.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xyzz+llxz+llyz.$$

$$xyzz-llxz-llyz.$$

Leur difference est $2llxz+2llyz$, dont les deux nombres produisans sont tels,

$$2lz.$$

$$lx+ly.$$

La moitié de leur somme est $\frac{1}{2}lx+\frac{1}{2}ly+lz$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xyzz+llxz+llyz$, on trouvera $\frac{1}{2}lx+\frac{1}{2}ly \sim \sqrt{xyzz-llzz}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $xyzz-llzz$, pour le côté duquel prenant az, on trouvera

$$x \sim \frac{aa+ll}{y}.$$

$$z \sim \frac{yy+aa+ll}{2ayy}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Huitieme Solution.

$$\frac{l^4+2llaa+a^4+llyy+aayy,\ y^4+llyy+aayy}{2ayy}.$$

Si l'on suppose

$$y \sim 2.$$

$$a \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{35,\ 14}{6}.$$

& si l'on suppose

$$y \backsim 1.$$

$$a \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{15, 3}{2}.$$

Pour auoir auoir Vne Solution plus generale, égalez la premiere Puissance $xyzz + llxz + llyz$ au quarré $aazz$, pour auoir $llx + lly \backsim aaz - xyz$, & la deuxieme $xyzz - llxz - llyz$ au quarré $bbzz$, pour auoir encore $llx + lly \backsim xyz - bbz$, & par consequent cette Equation, $aaz - xyz \backsim xyz - bbz$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{aa+bb}{2x}$, & au lieu de $llx + lly \backsim aaz - xyz$, ou de $llx + lly \backsim xyz - bbz$, on aura $llx + \frac{llaa + llbb}{2x} \backsim \frac{aaz - bbz}{2}$, & l'on trouuera $z \backsim \frac{2xx + aa + bb}{aax - bbx}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Neuuieme Solution.

$$\frac{4x^4 + 2aaxx + 2bbxx, \quad a^4 + 2aabb + b^4 + 2aaxx + 2bbxx}{2aaxx - 2bbxx}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$

$$b \backsim 1.$$

$$x \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{14, 35}{6}.$$

Si vous voulez que la somme de ces deux Nombres ainsy trouuez, soit Vn Nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette Puissance $2aa - 2bb$. Pour cette fin supposez

$$b \backsim a - \omega.$$

& alors Vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $4a\omega - 2\omega\omega$, pour le côté duquel prenant $\frac{c\omega}{d}$, on trouuera

$$\omega \backsim 4dd.$$

$$a \backsim cc + 2dd.$$

$$b \backsim cc - 2dd.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Dixieme Solution.

$$\frac{4l^4x^4 + 4llc^4xx + 16lld^4xx, \quad 4c^8 + 32c^4d^4 + 64d^8 + 4llc^4xx + 16lld^4xx}{16ccddxx}.$$

Si l'on suppase

$$x \backsim 1.$$

$$c \backsim 1.$$

$$d \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3, 15}{2}.$$

dont la somme 9 a sa Racine quarrée 3.

Si outre cette condition, vous voulez que la difference des deux Nombres qu'on cherche, soit Vn Nombre quarré, il faudra égaler

au quarré cette Puissance $c^8+8c^4d^4+16d^8-14x^4$, pour le côté duquel prenant $c^4 \cdots 4d^4$, on trouuera $lx \backsim 2cd$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Voyez Quest. XXXII.

$$\frac{16c^4d^4+4c^6dd+16ccd^6,\ c^8+8c^4d^4+16d^8+4c^6dd+16ccd^6}{16c^4d^4}.$$

onziéme Solution.

Si l'on suppose

$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{36,45}{16}.$$

dont la somme $\frac{81}{16}$, & la difference $\frac{9}{16}$, ont leurs Racines quarrées $\frac{9}{4}$, $\frac{3}{4}$.

On peut autrement rendre quarrées les deux Puissances precedentes,

$$xyzz+llxz+llyz.$$
$$xyzz-llxz-llyz.$$

en supposant

$$lx+ly \backsim z\omega.$$

& alors on aura ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$xy+l\omega.$$
$$xy-l\omega.$$

Egalez la premiere $xy+l\omega$, au quarré mm, pour auoir $l\omega \backsim mm-xy$, & la deuxieme $xy-l\omega$, au quarré nn, pour auoir le même $l\omega \backsim xy-nn$, & par consequent cette Equation, $mm-xy \backsim xy-nn$, dans laquelle on trouuera $m \backsim \sqrt{2xy-nn}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2xy-nn$. Pour cette fin supposez

$$x \backsim a+n.$$
$$y \backsim b+n.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $nn+2an+2bn+2ab$, pour le côté duquel prenant $n \cdots c$, on trouuera

$$n \backsim \frac{cc-2ab}{2a+2b+2c}.$$
$$m \backsim \frac{cc+2ac+2ab+2bc}{2a+2b+2c}.$$
$$x \backsim \frac{cc+2ac+2aa}{2a+2b+2c}.$$
$$y \backsim \frac{cc+2bc+2bb}{2a+2b+2c}.$$
$$l\omega \backsim \frac{acc+bcc+2abc}{2a+2b+2c}.$$

& au lieu de l'Equation supposée $lx+ly \backsim z\omega$, on aura celle-cy, $\frac{2laa+2lbb+2lcc+2lac+2lbc}{2a+2b+2c} \backsim \frac{accz+bccz+2abcz}{2la+2lb+2lc}$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{2aa+2bb+2cc+2ac+2bc}{acc+bcc+2abc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Douzieme Solution.

$$\frac{5aacc+bbcc+c^4+bc^3+2a^4+2aabb+4a^3c+2aabc+2abbc+3ac^3+2abcc}{aacc+4abcc+2aabc+bbcc+2abbc+ac^3+bc^3}.$$

$$\frac{5bbcc+aacc+c^4+ac^3+2b^4+2aabb+4b^3c+2abbc+2aabc+3bc^3+2abcc}{aacc+4abcc+2aabc+bbcc+2abbc+ac^3+bc^3}.$$

Si l'on suppose

$a \backsim 1.$

$b \backsim 2.$

$c \backsim 1.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{45,\ 117}{28}.$

Ou bien la difference des deux Puissances precedentes est $2l\omega$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$2\omega.$

$l.$

La Moitié de leur somme est $\omega+\frac{1}{2}l$, dont le quaré étant égalé à la plus grande Puissance $xy+l\omega$, on trouuera $z \backsim \frac{4xx+4\omega\omega+ll}{4x\omega}$, parceque l'on trouuera $y \backsim \frac{4\omega\omega+ll}{4x}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Treisieme Solution.

$$\frac{16x^4+16xx\omega\omega+4llxx,\ 16xx\omega\omega+16\omega^4+8ll\omega\omega+4llxx+l^4}{16xx\omega\omega}.$$

Si l'on suppose

$x \backsim 1.$

$\omega \backsim 2.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{84,\ 357}{52}.$

& si l'on suppose

$x \backsim \frac{1}{2}.$

$\omega \backsim 1.$

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{3,\ 15}{2}.$

mais si l'on suppose

$x \backsim 1.$

$\omega \backsim 1.$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{36,\ 45}{16}.$

Si Vous voulez que la somme de ces deux Nombres ainsy trouuez soit Vn nombre quarré, il suffira de mettre pour ω, tel nombre quarré que l'on voudra: comme par exemple 1, & alors les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Quatorzieme Solution.

$$\frac{16x^4+20llxx,\ 25l^4+20llxx}{16xx}.$$

Dont la somme $\frac{16x^4+40llxx+25l^4}{16xx}$ a sa Racine quarrée $\frac{4xx+5ll}{4x}$.

Si l'on suppose

$$x \backsim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{36,\ 45}{16}.$$

& si l'on suppose

$$x \backsim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{336,\ 105}{64}.$$

Mais si l'on suppose

$$x \backsim \frac{1}{2}.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,\ 15}{2}.$$

Pour n'être obligé d'emprunter l'Vnité, mettez

$$\frac{x,\ y}{z}.$$

pour les deux nombres qu'on cherche, & alors vous aurez en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xy + xz + yz.$$

$$xy - xz - yz.$$

Si on égale la premiere $xy + xz + yz$ au quarré aa, on trouuera $z \backsim \frac{aa - xy}{x + y}$, & si on égale la deuxieme $xy - xz - yz$ au quarré bb, on trouuera le même $z \backsim \frac{xy - bb}{x + y}$. c'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{aa - xy}{x + y} \backsim \frac{xy - bb}{x + y}$, ou $aa - xy \backsim xy - bb$, dans laquelle on trouuera

$$y \backsim \frac{aa + bb}{x}.$$

$$z \backsim \frac{aax - bbx}{aa + bb + 2xx}.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4x^4 + 2aaxx + 2bbxx,\ a^4 + 2aabb + b^4 + 2aaxx + 2bbxx}{2aaxx - 2bbxx}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$

$$b \backsim 2.$$

$$x \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{6,\ 39}{2}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 4.$$

$$b \backsim 2.$$

$$x \backsim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{11,\ 110}{6}.$$

Cette Solution est la même que la Neuvieme: & pour en auoir Vne differente, metter

$$\frac{x+y,\ x-y}{2}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & alors Vous aurez en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx-yy+2xz.$$
$$xx-yy-2xz.$$

Egalez la premiere $xx-yy+2xz$ au quarré xx, pour auoir $z \sim \frac{yy}{2x}$, & la deuxieme $xx-yy-2xz$ se changera en celle-cy, $xx-2yy$, laquelle étant égalée au quarré $xx-\frac{2axy}{b}+\frac{aayy}{bb}$, on trouuera

$$x \sim aa+bb.$$
$$y \sim 2ab.$$
$$z \sim \frac{2aabb}{aa+2bb}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Quinzieme Solution. $$\frac{a^4+2a^3b+4aabb+4ab^3+4b^4,\ a^4-2a^3b+4aabb-4ab^3+4b^4}{2aabb}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{15,\ 3}{2}.$$

dont la somme sera toujours Vn Nombre quarré, & ainsy ils satisfont aux conditions de la Quest. XXXII.

Ou bien égalez la premiere Puissance $xx-yy+2xz$ au quarré aa, pour auoir $z \sim \frac{aa-xx+yy}{2x}$, & la deuxieme $xx-yy-2xz$ au quarré bb, pour auoir le même $z \sim \frac{xx-yy-bb}{2x}$, & par consequent cette Equation, $aa-xx+yy \sim xx-yy-bb$, dans laquelle on trouuera $a \sim \sqrt{2xx-2yy-bb}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2xx-2yy-bb$. Pour cette fin supposez

$$b \sim x-y.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $xx+2xy-3yy$, pour le côté duquel prenant $x-\frac{cy}{d}$, on trouuera

$$x \sim cc+3dd.$$
$$y \sim 2dd+2cd.$$
$$b \sim cc-2cd+dd.$$
$$a \sim cc+2cd-3dd.$$
$$z \sim \frac{2d^4-2cd^3-2ccdd+2c^3d}{cc+3dd}.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

Seizieme Solution. $$\frac{c^4+2c^3d+8ccdd+6cd^3+15d^4,\ c^4-2c^3d+4ccdd-6cd^3+3d^4}{2d^4-2cd^3-2ccdd+2c^3d}.$$

Si

Si l'on suppose

$$c \backsim 2.$$
$$d \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur

$$\frac{91,7}{6}.$$

Cette Question se peut resoudre tres élegamment par le Moyen du triangle rectangle, & faire que les deux deux Nombres qu'on cherche soient dans la raison de deux quarrez, c'est à dire que le produit des deux Nombres qu'on cherche, soit Un Nombre quarré, en cette sorte.

Ayant pris à Volonté Un triangle rectangle indeterminé, tel qu'est le suivant,

$$aax - bbx.$$
$$2abx.$$
$$aax + bbx.$$

où le double de l'aire est $2a^3bxx - 2ab^3xx$, lequel étant augmenté & diminué de la quantité indeterminée z, on aura

$$2a^3bxx - 2ab^3xx + 15z.$$
$$2a^3bxx - 2ab^3xx - 15z.$$

que l'on prendra pour les deux Nombres qu'on cherche, dont le produit sera representé par le quarré

$$a^4xx + 2aabbxx + b^4xx$$

de l'hypotenuse $aax + bbx$, afinque ces deux Nombres soient dans la raison de deux quarrez, & que leur somme $4a^3bxx - 4ab^3xx$ soit égale au quadruple de l'aire du triangle rectangle: car ainsy cette somme étant ajoutée & ôtée du produit supposé $a^4xx + 2aabbxx + b^4xx$, il Viendra deux nombres quarrez par la nature du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à égaler le produit des deux Nombres à leur produit supposé, par cette Equation, $4a^6bbx^4 - 8a^4b^4x^4 + 4aab^6x^4 - 16zz \backsim a^4xx + 2aabbxx + b^4xx$, où l'on trouvera $z \backsim \sqrt{4a^6bbx^4 - 8a^4b^4x^4 + 4aab^6x^4 - 16a^4xx - 216aabbxx - 16b^4xx}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $4a^6bbx^4 - 8a^4b^4x^4 + 4aab^6x^4 - 16a^4xx - 216aabbxx - 16b^4xx$, pour le côté duquel prenant $2a^3bxx - 2ab^3xx \ldots 14cx$, on trouvera $x \backsim \frac{a^4 + 2aabb + b^4 + llcc}{4a^3bc - 4ab^3c}$.

C'estpourquoy si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 1.$$

on trouvera

on trouuera

$$x \sim \frac{13}{12}.$$

$$z \sim 13.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{325,\ 13}{12}.$$

dont le produit $\frac{4225}{144}$ a sa Racine quarrée $\frac{65}{12}$.

Bachet ajoute icy la Question suiuante, laquelle sera suiuie de deux autres.

1.

Trouuer deux nombres, dont le produit étant ajouté & ôté de leur somme, il vienne deux nombres quarrez.

On propose de trouuer deux nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont le produit xy étant ajouté & ôté de leur somme $x+y$, la somme $lx+ly+xy$, & le reste $lx+ly-xy$ soient des nombres quarrez.

Canon. Si au quadruple du produit de deux nombres indeterminez on ajoute separément le quadruple du quarré de chacun, & qu'on diuise chaque somme par la somme du quarré de l'vn & du quadruple du quarré de l'autre; on aura les deux nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$lx+ly+xy.$$

$$lx+ly-xy.$$

Leur difference est $2xy$, qui a ces deux nombres produisans,

$$2x.$$

$$y.$$

La moitié de leur somme est $x+\frac{1}{2}y$, dont le quarré $xx+xy+\frac{1}{4}yy$ étant égalé à la plus grande Puissance $lx+ly+xy$, on trouuera $y \sim 2l+\sqrt{4ll+4lx-4xx}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $4ll+4lx-4xx$, pour le côté duquel prenant $2l \cdots \frac{ax}{b}$, on trouuera $x \sim \frac{4ab+4bb}{aa+4bb}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4ab+4bb,\ 4ab+4aa}{aa+4bb}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 3.$$

$$b \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{16,\ 48}{13}$.

& si l'on suppose

$a \backsim 4.$

$b \backsim 1.$

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

1.

4.

Si vous voulez que la somme de ces deux nombres ainsy trouvez soit un nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette puissance $aa + 4bb$, pour le côté duquel prenant $a - \frac{2bc}{c}$ [sic], on trouvera en entiers,

$a \backsim cc - dd.$

$b \backsim 2cd.$

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{4ccdd + 4c^3d - 4cd^3,\ 4c^4 - 8ccdd + 4d^4 + 4c^3d - 4cd^3}{c^4 + 2ccdd + d^4}$. Seconde Solution.

dont la somme $\frac{4c^4 + 8c^3d - 4ccdd - 8cd^3 + 4d^4}{c^4 + 2ccdd + d^4}$, a sa racine quarrée $\frac{2cc + 2cd - 2dd}{cc + dd}$

Si l'on suppose

$c \backsim 2.$

$d \backsim 1.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{8,\ 12}{5}$.

On peut autrement rendre quarrées les deux puissances precedentes,

$lx + ly + xy.$

$lx + ly - xy.$

en égalant la premiere $lx + ly + xy$ au quarré $\frac{aaxx + 2abxx + bbxx}{cc}$, pour avoir $xy \backsim \frac{aaxx + 2abxx + bbxx}{cc} - lx - ly$, & la seconde $lx + ly - xy$ au quarré $\frac{aaxx - 2abxx + bbxx}{cc}$, pour avoir le même $xy \backsim lx + ly - \frac{aaxx + 2abxx - bbxx}{cc}$, & par consequent cette Equation, $lx + ly - \frac{aaxx + 2abxx - bbxx}{cc} \backsim \frac{aaxx + 2abxx + bbxx}{cc} - lx - ly$, dans laquelle on trouvera $lx + ly \backsim \frac{aaxx + bbxx}{cc}$: c'est pourquoy au lieu de $xy \backsim \frac{aaxx + 2abxx + bbxx}{cc} - lx - ly$, ou de $xy \backsim lx + ly - \frac{aaxx + 2abxx - bbxx}{cc}$, on aura $xy \backsim \frac{2abxx}{cc}$, & par consequent $y \backsim \frac{2abx}{cc}$; & au lieu de $lx + ly \backsim \frac{aaxx + bbxx}{cc}$, on aura $lx + \frac{2labx}{cc} \backsim \frac{aaxx + bbxx}{cc}$, & l'on trouvera $x \backsim \frac{2ab + cc}{aa + bb}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{2abcc + c^4,\ 2abcc + 4aabb}{aacc + bbcc}$. Troisieme Solution.

Si l'on suppose

$a \backsim 1.$

$b \backsim 2.$

$c \backsim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

1.

4.

& si l'on suppose

a∾2.

b∾3.

c∾1.

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

1,

12.

On tire de cette troisieme Solution, le Canon suiuant;

Canon. Si on diuise la somme d'vn quarré indeterminé & du côté égal au double du produit des nombres generateurs d'vn triangle rectangle, par l'hypotenuse de ce triangle, on aura l'vn des deux nombres qu'on cherche, lequel étant multiplié par le même côté, & le produit étant diuisé par le même quarré, on aura l'autre nombre qu'on cherche.

La solution se fera toujours en nombres entiers, si pour le quarré indeterminé, qui est icy cc, on met l'vnité, & que le triangle rectangle soit tel que l'excez de l'hypotenuse sur le côté égal au double du produit des nombres generateurs, soit égal à l'vnité. Tel est le triangle rectangle suiuant;

7.

24.

25.

dont nous enseignerons l'inuention dans le Lemme suiuant; Par le moyen de ce triangle rectangle les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront de cette grandeur,

1.

24.

& par le moyen de cet autre triangle rectangle,

9,

40.

41.

les deux nombres qu'on cherche, se trouueront tels,

1.

40.

Mais sans qu'il soit besoin de recourir au Lemme suiuant, on peut aisément tirer de la solution precedente

indefinie, une autre solution indefinie en entiers, sauoir en supposant

$c ∾ l.$

$b ∾ a + l.$

& alors les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$ll.$

$2aa + 2la.$ Quatrieme Solution.

Si l'on suppose

$a ∾ 1.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

1.

4.

& si l'on suppose

$a ∾ 2.$

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

1.

12.

Mais si l'on suppose

$a ∾ 3.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

1.

24.

Si vous voulez que chacun de ces deux nombres ainsy trouvez, soit un nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette Puissance $2aa + 2la$, pour le côté duquel prenant $\frac{ad}{m}$, on trouvera $a ∾ \frac{2mm}{dd - 2mm}$, & les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$ll.$

$\frac{4ddmm}{d^4 - 4ddmm + 4m^4}.$ Cinquieme Solution.

dont les côtez sont tels,

$l.$

$\frac{2dm}{dd - 2mm}.$

Si l'on suppose

$d ∾ 2.$

$m ∾ 1.$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

1.

4.

& si l'on suppose

$d ∾ 3.$

$m ∾ 2.$

les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$1.$$
$$144.$$

Mais si l'on suppose

$$d \propto 5.$$
$$m \propto 7.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$1.$$
$$4900.$$

On peut trouuer en entiers vne infinité d'autres solutions, par vne metode toutafait semblable à celle que nous auons enseignée au Lemme de la derniere des quatre Questions, qui ont été ajoutées à la Quest. XXIV.

Mais si vous ne voulez pas vne solution en nombres entiers, on pourra trouuer autrement ces deux quarrez, sans que le premier soit égal à l'vnité, sauoir par le moyen du triangle rectangle, en cette sorte.

Formez des deux Plans indeterminez ax, bx, ce triangle rectangle,

$$aaxx - bbxx.$$
$$2abxx.$$
$$aaxx + bbxx.$$

& mettez

$$aaxx.$$
$$bbxx.$$

pour les deux quarrez qu'on cherche, &

$$2abxx.$$

pour leur produit $aabbx^4$, car ainsy ce produit supposé $2abxx$ étant ajouté & ôté de leur somme $aaxx + bbxx$, il viendra deux nombres quarrez, par la nature du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation, $aabbx^4 \propto 2l^4abxx$, dans laquelle on trouuera $x \propto \sqrt{\frac{2l^4}{ab}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré $\frac{2l^4}{ab}$, ou $2ab$, pour le côté duquel prenant c, on trouuera $a \propto \frac{cc}{2b}$, & par consequent $x \propto \frac{2ll}{c}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

Sixieme Solution. $$\frac{c^4,\ 4b^4}{bbcc}.$$

dont les Racines quarrées sont telles,

$$\frac{cc,\ 2bb}{bc}.$$

Si l'on suppose

$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$4.$$
$$1.$$

& si l'on suppose

$$b \backsim \tfrac{1}{2}.$$
$$c \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$16.$$
$$\tfrac{1}{4}.$$

Mais si l'on suppose

$$b \backsim 2.$$
$$c \backsim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{81, 64}{36}.$$

On tire de cette sixieme Solution, le Canon suivant;

Si par le Plan de deux Nombres indeterminez on diuise le quarré de l'Vn & le double du quarré de l'autre, on aura les Racines quarrées des deux Nombres qu'on cherche. Canon.

On peut encore autrement & tres facilement rendre quarrées les deux Puissances precedentes,

$$lx + ly + xy.$$
$$lx + ly - xy.$$

en égalant la premiere $lx + ly + xy$ au quarré $\frac{aaxx}{cc}$, pour auoir $xy \backsim \frac{aaxx}{cc} - lx - ly$, & la deuxieme $lx + ly - xy$ au quarré $\frac{aaxx}{bb}$, pour auoir le Même $xy \backsim \frac{aaxx}{bb} + lx + ly$, & par consequent cette Equation, $\frac{aaxx}{bb} + lx + ly \backsim \frac{aaxx}{cc} - lx - ly$, dans laquelle on trouuera $lx + ly \backsim \frac{aabbxx + aaccxx}{2bbcc}$: c'est pourquoy au lieu de $xy \backsim \frac{aaxx}{cc} - lx - ly$, ou de $xy \backsim \frac{aaxx}{bb} + lx + ly$, on aura $xy \backsim \frac{aabbxx - aaccxx}{2bbcc}$, & par consequent $y \backsim \frac{aabbx - aaccx}{2bbcc}$, & au lieu de $lx + ly \backsim \frac{aabbxx + aaccxx}{2bbcc}$, on aura $lx + \frac{laabbx - laaccx}{2bbcc} \backsim \frac{aabbxx + aaccxx}{2bbcc}$, & dans cette Equation, l'on trouuera $x \backsim \frac{aabb - aacc + 2bbcc}{aabb + aacc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Settieme Solution.

$$\frac{aabb - aacc + 2bbcc}{aabb + aacc}.$$
$$\frac{aab^4 - 2aabbcc + aac^4 + 2b^4cc - 2bbc^4}{2bbc^4 + 2ccb^4}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 2.$$
$$c \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{88,\ 33}{40}.$$

Si vous voulez que la somme de ces deux Nombres ainsy trouuez soit vn Nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette Puissance $2bb+2cc$. Pour cette fin, supposez

$$b \infty z \cdots c.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $4cc-4cz+2zz$, pour le côté duquel prenant $2c+\frac{dz}{m}$, on trouuera en entiers,

$$z \infty 4dm+4mm.$$
$$c \infty 2mm-dd.$$
$$b \infty dd+2dm+4dm.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$$a \infty 1.$$
$$d \infty 1.$$
$$m \infty 1.$$

on trouuera

$$z \infty 8.$$
$$b \infty 7.$$
$$c \infty 1.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{3577,\ 1752}{1225}.$$

dont la somme $\frac{5329}{1225}$ a sa Racine quarrée $\frac{73}{35}$.

Ou bien seruez vous de la 4.e Solution, & égalez au quarré cette Puissance $2aa+2la+ll$, pour le côté duquel prenant $l \cdots \frac{ab}{c}$, on trouuera $a \infty \frac{2bc+2cc}{bb-2cc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Huitieme Solution.

$$ll.$$
$$\frac{8bc^3+12bbcc+4b^3c}{b^4-4bbcc+4c^4}.$$

Si l'on suppose

$$b \infty 1.$$
$$c \infty 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$1.$$
$$24.$$

& si l'on suppose

$$b \infty 3.$$
$$c \infty 2.$$

Les

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$1.$$

$$840.$$

& l'on en peut donner en entiers vne infinité d'autres, comme dans la Solution 4.e

Ou bien encore seruez vous de la Solution 3.e & égalez au quarré cette Puissance $aa+bb$, pour le côté duquel prenant $a \mp \frac{bd}{m}$, on trouuera en entiers,

$$a \backsim dd - mm.$$

$$b \backsim 2dm.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4llccd^3m - 4llccdm^3 + l^4c^4,\ 4llccd^3m - 4llccdm^3 + 16d^6mm - 32d^4m^4 + 16ddm^6}{ccd^4 + 2ccddmm + ccm^4}.$$ Neuuieme Solution.

Si l'on suppose

$$c \backsim 1.$$

$$d \backsim 2.$$

$$m \backsim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$1.$$

$$24.$$

Lemme.

Trouuer Vn triangle rectangle, où l'excez de l'hypotenuse sur le côté égal au double du produit des nombres generateurs, soit égal à l'Vnité.

On propose de trouuer Vn triangle rectangle

$$xx - yy.$$

$$2xy.$$

$$xx + yy.$$

où l'excez $xx+yy-2xy$ de l'hypotenuse $xx+yy$ sur le côté $2xy$, qui est égal au double du produit des nombres generateurs soit égal à l'Vnité.

Si de deux nombres quelconques, dont la difference soit égale à l'Vnité, on forme Vn triangle rectangle, on aura celuy qu'on cherche. Canon.

Selon la condition de la Question, on aura cette Equation,

$$xx - 2xy + yy \backsim ll.$$

dont la Racine quarrée donne celle-cy, $x - y \backsim l$, dans laquelle on trouuera $x \backsim y + l$, & le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

$$2ly + ll.$$

$$2yy + 2ly.$$

$$2yy + 2ly + ll.$$

Si l'on suppose

$y \sim 1.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

3.

4.

5.

& si l'on suppose

$y \sim 2.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

5.

12.

13.

mais si l'on suppose

$y \sim 3.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

7.

24.

25.

Pour auoir vne solution plus generale, mettez

$x.$

$y.$

pour les deux côtez du triangle rectangle, qu'on cherche, &

$y+l.$

pour son hypotenuse, afinque cette hypotenuse surpasse le second côté y, de l'vnité, & par la proprieté du triangle rectangle, on aura cette Equation, $xx+yy \sim yy+2ly+ll$, dans laquelle on trouuera $x \sim \sqrt{2ly+ll}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2ly+ll$, pour le côté duquel prenant $l \ldots \frac{ay}{b}$, on trouuera $y \sim \frac{2ab+2bb}{aa}$, & au lieu de $x \sim \sqrt{2ly+ll}$, on aura $x \sim \frac{la+2lb}{a}$, & le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

Seconde Solution.

$$\frac{aa+2ab,\ 2ab+2bb,\ aa+2ab+2bb}{aa}.$$

Si l'on suppose

$a \sim 1.$

$b \sim 2.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

5.

12.

13.

& si l'on suppose

a∾1.

b∾3.

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

7.

24.

25.

Mais si l'on suppose

a∾1.

b∾4.

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

9.

40.

41.

Que si l'on suppose

a∾1.

b∾5.

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

11.

60.

61.

où vous voyez que pour auoir vne solution en nombres entiers, il faut que la quantité indeterminée a, soit égale à 1. Mais on la peut aussy faire égale à 2, pourueûque pour l'autre quantité indeterminée b, on mette vn nombre pair. Comme si l'on suppose

a∾2.

b∾2.

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

3.

4.

5.

& si l'on suppose

a∾2.

b∾4.

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

5.

12.

13.

Mais si l'on suppose

a ∾ 2.

b ∾ 6.

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

7.

24.

25.

On tire de cette seconde solution, le canon suiuant;

Canon. Si de la somme de deux nombres indeterminez & de l'vn de ces deux mêmes nombres, on forme vn triangle rectangle, & qu'on le diuise par le quarré de l'autre nombre, on aura le triangle rectangle qu'on cherche.

Nous ajouterons icy vne douzaine de triangles rectangles primitifs en nombres entiers, où l'hypotenuse surpasse l'vn des deux côtez de l'vnité.

3.	4.	5.
5.	12.	13.
7.	24.	25.
9.	40.	41.
11.	60.	61.
13.	84.	85.
15.	112.	113.
17.	144.	145.
19.	180.	181.
21.	220.	221.
23.	264.	265.
25.	312.	313.

Il est aisé de continuer ces triangles rectangles à l'infiny sans le canon precedent, parceque les côtez & les hypotenuses y croissent dans vne progression symmetrique, c'est à dire que les dernieres differences y sont égales.

Si vous voulez que l'vn des deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche, soit vn nombre quarré, seruez-vous des precedens, & formez le triangle rectangle qu'on demande, de l'hypotenuse de l'vn des precedens & du côté moindre de l'vnité. Ainsy en se seruant du premier triangle rectangle 3, 4, 5, le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

9.

40.

41.

dont le premier côté 9 a sa Racine quarrée 3, & dont les Nombres generateurs sont 4, 5; & en se seruant du second triangle rectangle 5, 12, 13; le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

25.
312.
313.

dont le premier côté 25 a sa Racine quarrée 5, & dont les Nombres generateurs sont 12, 13; Mais en se seruant du troisieme triangle rectangle 7, 24, 25; le triangle rectangle qu'on cherche, se trouuera de cette grandeur,

49.
1200.
1201.

dont le premier côté 49 a sa Racine quarrée 7, & dont les Nombres generateurs sont 24, 25.

C'est de cette maniere que par le moyen des douze triangles rectangles precedens, nous auons trouuez les douze triangles rectangles suiuans, dont les premiers côtez sont des Nombres quarrez.

9.	40.	41.
25.	312.	313.
49.	1200.	1201.
81.	3280.	3281.
121.	7320.	7321.
169.	14280.	14281.
225.	25312.	25313.
289.	41760.	41761.
361.	65160.	65161.
441.	97240.	97241.
529.	139920.	139921.
625.	195312.	195313.

Ou bien seruez-vous de l'vne des deux solutions precedentes indefinies, pour auoir aussy vne solution indefinie. Si vous vous seruez de la premiere solution indefinie, le triangle rectangle qu'on cherche, se trouuera tel,

Troisieme Solution.

$4llyy + 4l^3y + l^4.$

$8y^4 + 16ly^3 + 12llyy + 4l^3y.$

$8y^4 + 16ly^3 + 12llyy + 4l^3y + l^4.$

dont le premier côté $4llyy + 4l^3y + l^4$ a sa Racine quarrée $2ly + ll$.

Si l'on suppose

$y \backsim 1.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur

9.

40.

41.

& si l'on suppose

$y \backsim 2.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

25.

312.

313.

Vous aurez une solution plus generale, si vous vous seruez de la 2.e solution indefinie, car alors le triangle rectangle qu'on cherche, se trouuera de cette grandeur,

Quatrieme Solution.

$$\frac{aa+4ab+4bb}{aa}.$$

$$\frac{4a^3b+12aabb+16ab^3+8b^4}{a^4}.$$

$$\frac{a^4+4a^3b+12aabb+16ab^3+8b^4}{a^4}.$$

dont le premier côté $\frac{aa+4ab+4bb}{aa}$ a sa Racine quarrée $\frac{a+2b}{a}$.

Si l'on suppose

$a \backsim 1.$

$b \backsim 1.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel

9.

40.

41.

& si l'on suppose

$a \backsim 1.$

$b \backsim 2.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

25.

312.

313.

Vous aurez une solution plus simple, si dans la même 2.e solution, vous égalez le premier côté $aa+2ab$ (en negligeant le denominateur aa, qui est quarré) au quarré $\frac{aacc}{dd}$, pour auoir

$a \backsim 2dd.$

$b \backsim cc-dd.$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{2ccdd,\ c4-d4,\ c4+d4}{2d4}.$$

Si l'on suppose *Cinquieme Solution.*

$c \sim 3.$

$d \sim 1.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur

9.

40.

41.

& si l'on suppose

$c \sim 5.$

$d \sim 1.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

25.

312.

313.

On tire de cette cinquieme Solution, le canon suiuant;

Canon. Si de deux quarrez indeterminez on forme vn triangle rectangle, & qu'on le diuise par le double du quarré du plus petit des deux quarrez indeterminez on aura le triangle rectangle qu'on cherche.

Ou bien égalez le second côté $2ab+2bb$ au quarré $\frac{4bbcc}{dd}$, pour auoir en entiers

$a \sim 2cc-dd.$

$b \sim dd.$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{4c4-d4,\ 4ccdd,\ 4c4+d4}{4c4-4ccdd+d4}.$$

Si l'on suppose *Sixieme Solution.*

$c \sim 2.$

$d \sim 3.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur;

17.

144.

145.

& si l'on suppose

$c \sim 5.$

$d \sim 7.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

99.

4900.

4901.

& si l'on suppose

$$c \backsim 12.$$
$$d \backsim 17.$$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

577.

166464.

166465.

dont le second côté 166464 a sa Racine quarrée 408.

Si au lieu de cette condition, vous voulez que l'hypotenuse soit un nombre quarré, en vous servant de la 2.e solution, vous aurez cette Puissance à égaler au quarré, $aa + 2ab + 2bb$, pour le côté duquel prenant $a \ldots \frac{bc}{d}$, on trouvera

$$a \backsim cc - 2dd.$$
$$b \backsim 2cd + 2dd.$$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

Settieme Solution.

$$\frac{c^4 + 4c^3d - 8cd^3 - 4d^4,\ 4c^3d + 12ccdd + 8cd^3,\ c^4 + 4c^3d + 8ccdd + 8cd^3 + 4d^4}{c^4 - 4ccdd + 4d^4}.$$

dont l'hypotenuse $\frac{c^4 + 4c^3d + 8ccdd + 8cd^3 + 4d^4}{c^4 - 4ccdd + 4d^4}$, a sa Racine quarrée $\frac{cc + 2cd + 2dd}{cc \ldots 2dd}$.

Si l'on suppose

$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 1.$$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

7.

24.

25.

& si l'on suppose

$$c \backsim 3.$$
$$d \backsim 2.$$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

41.

840.

841.

mais si l'on suppose

$$c \backsim 7.$$
$$d \backsim 5.$$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

239.

28560.

28561.

Comme

Comme les Nombres generateurs de ce dernier triangle rectangle indefini, sont les deux côtez de cet autre triangle rectangle,

$$2cd+2dd,\ cc+2cd,\ \frac{cc+2cd+2dd}{cc-2dd}.$$

où la difference des deux côtez est égale à l'Unité, on tire de cette settieme Solution, le Canon suivant;

Si des deux côtez d'Un triangle rectangle, où la difference de ces deux mêmes côtez soit égale à l'Unité, on forme Un triangle rectangle; on aura le triangle rectangle qu'on cherche. Canon.

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la somme des deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche, soit Un nombre quarré, il faudra dans la même 2.e Solution, égaler au quarré cette Puissance, $aa+4ab+2bb$, pour le côté duquel prenant $a-\frac{bc}{d}$, on trouvera en entiers,

$$a \sim cc-2dd.$$
$$b \sim 2cd+4dd.$$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

$$c^4+4c^3d+4ccdd-8cd^3-12d^4.$$
$$16d^4+24cd^3+16ccdd+4c^3d.$$
$$\frac{c^4+4c^3d+12ccdd+24cd^3+20d^4}{c^4-4ccdd+4d^4}.$$

Huitieme Solution.

où la somme des deux côtez $\frac{c^4+8c^3d+20ccdd+16cd^3+4d^4}{c^4-4ccdd+4d^4}$ a sa Racine quarrée $\frac{cc+4cd+2dd}{cc-2dd}$.

Si l'on suppose

$$c \sim 3.$$
$$d \sim 2.$$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur;

57.
1624.
1625.

Si au lieu de la somme, vous voulez que la difference des deux côtez du triangle rectangle qu'on cherche, soit Un nombre quarré, il faut dans la même 2.e Solution, égaler au quarré cette Puissance, $2bb-aa$. Pour cette fin, Supposez

$$b \sim a+a.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $aa+4ac+2cc$, pour le côté duquel prenant $a-\frac{cd}{m}$, on trouvera

$$a \sim dd-2mm.$$
$$c \sim 2dm+4mm.$$
$$b \sim dd+2dm+2mm.$$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

Neuvieme Solution.

$$3d^4-4d^3m-8dm^3.$$
$$4d^4+4d^3m+20ddmm+8dm^3+4m^4.$$
$$\frac{5d^4+4d^3m+16ddmm+8dm^3+8m^4}{d^4-4ddmm+4m^4}.$$

ou la difference des deux côtez $\frac{d^4+8d^3m+20ddmm+8dm^3+4m^4}{d^4-4ddmm+4m^4}$, a sa Racine quarrée $\frac{dd+4dm+2mm}{dd\cdots 2mm}$.

Si l'on suppose

$$d \sim 3.$$
$$m \sim 1.$$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur, $\frac{111,\ 640,\ 689}{49}$.

Ou bien il faudra égaler au quarré cette Puissance, $aa-2bb$, pour le côté duquel prenant $a\cdots\frac{bc}{d}$, on trouvera

$$a \sim cc+2dd.$$
$$b \sim 2cd.$$

& le ~~triangle rectangle~~ qu'on cherche, sera tel,

Dixieme Solution.

$$4c^3d+8ccdd+8cd^3.$$
$$c^4+4c^3d+4ccdd+8cd^3+4d^4.$$
$$\frac{c^4+4c^3d+12ccdd+8cd^3+4d^4}{c^4+4ccdd+4d^4}.$$

où la difference des deux côtez $\frac{c^4-4ccdd+4d^4}{c^4+4ccdd+4d^4}$, a sa Racine quarrée $\frac{cc\cdots 2dd}{cc+2dd}$.

Si l'on suppose

$$c \sim 1.$$
$$d \sim 1.$$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur, $\frac{20,\ 21,\ 29}{9}$.

Enfin si au lieu de cette condition, vous voulez que le contour du triangle rectangle qu'on cherche, soit un nombre quarré, en vous servant de la même 2.e Solution, vous aurez cette Puissance à égaler au quarré, $4bb+6ab+2aa$, pour le côté duquel prenant $2b\cdots\frac{ac}{d}$, on trouvera en entiers

$$a \sim 6dd+4cd.$$
$$b \sim cc-2dd.$$

& le triangle rectangle qu'on cherche, sera tel,

Onzieme Solution

$$6d^4+16cd^3+14ccdd+4c^3d.$$
$$c^4+4c^3d+2ccdd-8cd^3-8d^4.$$
$$\frac{c^4+4c^3d+10ccdd+16cd^3+10d^4}{18d^4+24cd^3+8ccdd}.$$

dont le contour $\frac{c^4+6c^3d+13ccdd+12cd^3+4d^4}{9d^4+12cd^3+4ccdd}$, a sa Racine quarrée $\frac{cc+3cd+2dd}{3dd+2cd}$.

Si l'on suppose

$c \sim 2.$

$d \sim 1.$

le triangle rectangle qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$\frac{16, 63, 65}{49}.$

Il est évident que pour trouuer vn triangle rectangle, où l'hypotenuse surpasse l'vn des deux côtez de l'vnité, il n'y a qu'à diuiser vn triangle rectangle quelconque par l'excez de l'hypotenuse sur l'vn des côtez. Ainsy l'analyse que nous auons faite pour resoudre cette Question seroit inutile, si nôtre dessein n'auoit été de donner vne solution en nombres entiers.

Il est évident aussy que quand on a vne fois trouué vn triangle rectangle, où l'excez de l'hypotenuse sur l'vn des côtez est égal à l'vnité, on trouuera aisément vn autre triangle rectangle, où l'excez de l'hypotenuse sur l'vn des côtez sera égal à vn nombre donné, sauoir en multipliant le triangle rectangle trouué par le nombre donné. Cela est trop aisé à comprendre, pour en donner vn exemple particulier.

II.

Trouuer deux nombres, dont la difference étant ajoutée & ôtée de leur produit, il vienne deux nombres quarrées.

On propose de trouuer deux nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ étant ajoutée & ôtée de leur produit xy, la somme $xy+1x-1y$, & le reste $xy-1x+1y$, soient chacun vn nombre quarré.

Si au quarré de la somme de deux nombres indeterminez on ajoute separément le quarré du double du premier, & le quarré de la somme du second & du triple du premier, & qu'on diuise chaque somme par le double de l'excez du quarré du premier sur le quintuple du quarré du second; on aura les deux nombres qu'on cherche. Canon

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$xy+1x-1y.$

$xy-1x+1y.$

Leur difference est $2lx - 2ly$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$$2x - 2y.$$
$$l.$$

La moitié de leur somme est $x - y + \frac{1}{2}l$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xy + lx - ly$, on trouvera $y \propto \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{5xx - ll}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $5xx - ll$. Pour cette fin, supposez

$$x \propto z + l.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $5zz + 10lz + 4ll$, pour le côté duquel prenant $2l - \frac{az}{b}$, on trouvera

$$z \propto \frac{4ab + 10bb}{aa - 5bb}.$$
$$x \propto \frac{aa + 4ab + 5bb}{aa - 5bb}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2aa + 8ab + 10bb,\ aa + 2ab + 5bb}{2aa - 10bb}.$$

Si l'on suppose

$$a \propto 3.$$
$$b \propto 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{13,\ 5}{2}.$$

& si l'on suppose

$$a \propto 2.$$
$$b \propto 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{34,\ 13}{2}.$$

Mais si l'on suppose

$$a \propto 1.$$
$$b \propto 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{5,\ 2}{2}.$$

Cette Question se peut comme la precedente, resoudre tres facilement par le moyen du triangle rectangle, en cette sorte.

Formez des deux Plans indeterminez, ax, bx, ce triangle rectangle,

$$aaxx - bbxx.$$
$$2abxx.$$
$$aaxx + bbxx.$$

& mettez

$$l3z.$$
$$2abxx + l3z.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & l'hypotenuse

$$aaxx + bbxx.$$

pour leur produit $2l^3abxxz + l^6zz$, afinque ce produit supposé $aaxx + bbxx$ étant augmenté & diminué de leur difference $2abxx$, il vienne deux nombres quarrez, par la Nature du triangle rectangle, & il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation, $2l^3abxxz + l^6zz \sim aaxx + bbxx$, dans laquelle on trouvera $z \sim \sqrt{aabbx^4 + l^4aaxx + l^4bbxx}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $aabbx^4 + l^4aaxx + l^4bbxx$, pour le côté duquel prenant $abxx \mp abcx$, on trouvera $x \sim \frac{aabbcc \ldots l^4aa \ldots l^4bb}{2aabbc}$.

C'est pourquoy si l'on suppose

$$a \sim 1.$$

$$b \sim 2.$$

$$c \sim 1.$$

on trouvera

$$x \sim \frac{1}{8}.$$

$$z \sim \frac{1}{4}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{45}{16}.$$

III.

Trouver deux Nombres, dont le produit étant ajouté & ôté de leur difference, il vienne deux Nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

en sorte que si à leur difference $x-y$, on ajoute & on ôte leur produit xy, la somme $lx - ly + xy$, & le reste $lx - ly - xy$, soient des nombres quarrez.

Si on multiplie la somme de deux nombres indeterminez & l'excez du premier sur le quadruple du second, châcun par le quadruple du premier, & qu'on divise chaque produit par la somme du quarré du premier & du quarré du double du second; on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$lx - ly + xy.$$

$$lx - ly - xy.$$

Leur difference est $2xy$, qui a ces deux Nombres produisans,

$2x.$

$y.$

La moitié de leur somme est $x+\frac{1}{2}y$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $lx-ly+xy$, on trouuera $y \sim \sqrt{4ll+4lx-4xx}-2l$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $4ll+4lx-4xx$, pour le côté duquel prenant $2l \ldots \frac{ax}{b}$, on trouuera $x \sim \frac{4ab+4bb}{aa+4bb}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4ab+4bb,\ 4ab-16bb}{aa+4bb}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 5.$$

$$b \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{24,\ 4}{29}.$$

Si vous voulez que la difference de ces deux nombres ainsy trouuez, soit un nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette Puissance, $5aa+20bb$, Pour cette fin, supposez

$$a \sim b \ldots c.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $25bb-10bc+5cc$, pour le côté duquel prenant $5b+\frac{cd}{m}$, on trouuera en entiers,

$$b \sim 5mm-dd.$$

$$c \sim 10dm+10mm.$$

$$a \sim dd+10dm+5mm.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$$d \sim 2.$$

$$m \sim 1.$$

on trouuera

$$b \sim 1.$$

$$c \sim 30.$$

$$a \sim 29.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{24,\ 20}{169}.$$

dont la difference $\frac{4}{169}$, a sa Racine quarrée $\frac{2}{13}$, & dont le produit $\frac{480}{28561}$ étant ajouté & ôté de cette difference $\frac{4}{169}$, ou $\frac{676}{28561}$, il vient ces deux nombres quarrez $\frac{1156,\ 196}{28561}$, dont les côtez sont $\frac{34,\ 14}{169}$.

Question XXXII.

Trouver deux nombres, dont la somme soit un nombre quarré, & dont le produit étant ajouté & diminué de leur même somme, il vienne deux nombres quarrez.

On propose de trouver deux nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont la somme $x+y$ soit un nombre quarré, tel que si on l'ajoute & qu'on l'ote de leur produit xy, la somme $xy+lx+ly$, & le reste $xy-lx-ly$, soient des nombres quarrez.

Si on divise d'un quarré indeterminé & de l'hypotenuse d'un triangle rectangle, dont les nombres generateurs soient en raison double, par le côté égal au double du produit des mêmes nombres generateurs, on aura l'un des deux nombres qu'on cherche, lequel étant multiplié par l'hypotenuse, & le produit étant divisé par le quarré indeterminé, on aura l'autre nombre qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Puissances à égaler au quarré,

$$lx+ly.$$
$$xy+lx+ly.$$
$$xy-lx-ly.$$

Egalez la seconde Puissance $xy+lx+ly$ au quarré $\frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc}$, pour avoir $xy \sim \frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc}-lx-ly$, & la troisieme $xy-lx-ly$ au quarré $\frac{aaxx-2abxx+bbxx}{cc}$, pour avoir le même $xy \sim \frac{aaxx-2abxx+bbxx}{cc}+lx+ly$, & par consequent cette Equation, $\frac{aaxx-2abxx+bbxx}{cc}+lx+ly \sim \frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc}-lx-ly$, dans laquelle on trouvera $lx+ly \sim \frac{2abxx}{cc}$, c'est pourquoy au lieu de $xy \sim \frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc}-lx-ly$, on aura $xy \sim \frac{aaxx+bbxx}{cc}$, où l'on trouvera $y \sim \frac{aax+bbx}{cc}$, & au lieu de $lx+ly \sim \frac{2abxx}{cc}$, on aura $lx+\frac{laax+lbbx}{cc} \sim \frac{2abxx}{cc}$, où l'on trouvera $x \sim \frac{aa+bb+cc}{2ab}$, & par consequent $y \sim \frac{a^4+2aabb+b^4+aacc+bbcc}{2abcc}$: & au lieu de la premiere Puissance $lx+ly$, on aura en entiers & en moindres termes, celle-cy à égaler au quarré, $2ab$, ce que l'on pouvoit faire par abregé en mettant pour les deux quantitez indeterminées a, b, deux autres quantitez en raison double, comme le canon porte; mais pour avoir une solution indefinie, nous égalerons la Puissance $2ab$, au quarré dd, pour avoir $b \sim \frac{dd}{2a}$, & les deux

Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4a^4 + 4aacc + d^4}{4aadd}.$$

$$\frac{d^8 + 8a^4d^4 + 16a^8 + 4aaccd^4 + 16a^6cc}{16a^4ccdd}.$$

Si l'on suppose

$$a \propto 1.$$

$$c \propto 1.$$

$$d \propto 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{36, 45}{16}.$$

Cette Question a été resolue en plusieurs autres manieres dans la Quest. XXXI. où Nous auons fait même que la difference des deux Nombres qu'on cherche, fût encore Vn Nombre quarré: Mais cela se peut faire encore en cette sorte.

Si donc Vous Voulez que la difference des deux Nombres ainsy trouuez, soit aussy Vn Nombre quarré, il foudra égaler au quarré cette Puissance, $d^8 + 8a^4d^4 + 16a^8 - 16a^4c^4$. Pour cette fin, Nous en diminuerons le nombre des termes, par cette Equation, $d^8 \propto 16a^4c^4$, dans laquelle on trouuera $c \propto \frac{dd}{2a}$, & Nous aurons en moins & en moindres termes, cette autre Puissance à égaler au quarré, $4a^4 + 2d^4$, pour le côté duquel prenant $6aa$, on trouuera

$$a \propto 1.$$

$$d \propto 2.$$

$$c \propto 2.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{36, 45}{16}.$$

Si Vous en Voulez deux autres, supposez

$$d \propto 2a - z.$$

& au lieu de la Puissance precedente $4a^4 + 2d^4$, Vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $36a^4 - 64a^3z + 48aazz - 16az^3 + 2z^4$, pour le côté duquel prenant $6aa - \frac{16az}{3} + \frac{44}{27}zz$, on trouuera

$$z \propto 504.$$

$$a \propto 239.$$

$$d \propto 26.$$

$$c \propto \frac{338}{239}.$$

aprez quoy les deux Nombres qu'on cherche, se pourront connoitre, & comme ils se trouuent icy Vn peu grands, nous n'auons pas Voulu prendre la peine de les calculer.

On peut autrement rendre quarrée la Puissance $d^8 + 8a^4d^4 + 16a^8 - 16a^4c^4$,

$-16a^4c^4$, sauoir en l'égalant au quarré $9a^4c^4$. & alors on trouuera $5ac \backsim \sqrt{5\partial^4 + 20a^4}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $5\partial^4 + 20a^4$. Pour cette fin, supposez

$$\partial \backsim a.$$

& l'on trouuera les deux mêmes Nombres qu'auparauant: & pour en trouuer deux autres, supposez

$$\partial \backsim \omega + a.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $25a^4 + 20a^3\omega + 30aa\omega\omega + 20a\omega^3 + 5\omega^4$, pour le côté duquel prenant $5aa + 2a\omega + \frac{13}{5}\omega\omega$, on trouuera

$$a \backsim 11.$$

$$\omega \backsim 60.$$

$$\partial \backsim 71.$$

$$c \backsim \frac{2257}{11}.$$

aprez quoy les deux Nombres qu'on cherche, seront faciles à trouuer, la difficulté n'étant que dans la longueur du calcul.

Ou bien en l'égalant au quarré $\partial^8 - 8a^4\partial^4 + 16a^8$, & alors on trouuera $c \backsim \partial$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4aac^6 + 16a^4c^4 + 16a^6cc,\ c^8 + 8a^4c^4 + 16a^8 + 4aac^6 + 16a^6cc}{16a^4c^4}.$$

Seconde Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$

$$c \backsim 1.$$

ou

$$c \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{36,\ 45}{16}.$$

dont la somme $\frac{81}{16}$, & la difference $\frac{9}{16}$, ont leurs Racines quarrées $\frac{9}{4}$, $\frac{3}{4}$: & si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$

$$c \backsim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4356,\ 10285}{1296}.$$

dont la somme $\frac{14641}{1296}$, & la difference $\frac{5929}{1296}$, ont leurs Racines quarrées $\frac{121}{36}$, $\frac{77}{36}$.

Dans la 6.e Solution de la Quest. XXXI. on a trouué ces deux Nombres

$$\frac{a^4 + 2la^3 + 4llaa + 4l^3a + 4l^4,\ a^4 - 2la^3 + 4llaa - 4l^3a + 4l^4}{2aa}.$$

qui satisfont aux conditions de celle-cy, de sorte que leur somme $\frac{a^4 + 4llaa + 4l^4}{aa}$, est vn Nombre quarré, dont le côté est $\frac{aa + 2ll}{a}$:

& si vous voulez que leur difference soit aussy vn nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette Puissance, $2la^3+4l^3a$, pour le côté duquel prenant ab, on trouuera $a \backsim \frac{bb+\sqrt{b^4-32l^4}}{4l}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré b^4-32l^4, pour le côté duquel prenant $bb \cdots 2ll$, on trouuera

$$b \backsim 3.$$

$$a \backsim 4.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{117,\ 45}{8}.$$

dont la somme $\frac{81}{4}$, & la difference 9, ont leurs Racines quarrées $\frac{9}{2}$, 3.

Ou bien supposer

$$b \backsim z \cdots 3.$$

& au lieu de la Puissance b^4-32l^4, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $z^4-12z^3+54zz-108z+49$, pour le côté duquel prenant $7 \cdots \frac{54}{7}z \cdots zz$, on trouuera

$$z \backsim \frac{13}{42}.$$

$$b \backsim \frac{113}{42}.$$

$$a \backsim \frac{144}{49}.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{506290850,\ 145898594}{49787136}.$$

dont la somme $\frac{652189444}{49787136}$, & la difference $\frac{360392256}{49787136}$, ont leurs Racines quarrées

$$\frac{25538,\ 18984}{7056}.$$

Dans la 9e Solution de la même Quest. XXXI. Nous auons trouué ces deux autres nombres,

$$\frac{4x^4+2aaxx+2bbxx,\ a^4+2aabb+2aaxx+2bbxx}{2aaxx-2bbxx}.$$

dont la somme a été rendue quarrée en supposant

$$a \backsim cc+2dd.$$

$$b \backsim cc \cdots dd.$$

Mais on peut aussy supposer

$$a \backsim cc+dd.$$

$$b \backsim cc \cdots 2dd.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes que dans la Quest. XXXI. sauoir

Troisieme Solution.

$$\frac{4l^4x^4+4llc^4xx+16lld^4xx,\ 4c^8+32c^4d^4+64d^8+4llc^4xx+16lld^4xx}{16ccddxx}.$$

dont la difference $4c^8+32c^4d^4+64d^8-4l^4x^4$ se pourra rendre quarrée, comme dans la Quest. XXXI. ou bien en l'égalant au quarré $\frac{9}{4}l^4x^4$, pour auoir $lx \backsim \sqrt{\frac{4c^4+16d^4}{5}}$. Ainsy on aura cette

Puissance à égaler au quarré, $\frac{4x^4+16\partial^4}{5ll}$, ou $20x^4+80\partial^4$; ce qui sera facile, parceque la somme des Unitez 100 a sa Racine quarrée 10. Supposez donc

$$c \backsim z+\partial.$$

pour auoir en Moindres termes, cette autre Puissance à égaler au quarré, $25\partial^4+20\partial^3z+30\partial\partial zz+20\partial z^3+5z^4$, pour le côté duquel prenant $5\partial\partial+2\partial z+\frac{13}{5}zz$, on trouuera

$$\partial \backsim 11.$$

$$z \backsim 60.$$

$$c \backsim 71.$$

$$x \backsim 4514.$$

$$a \backsim 5162.$$

$$b \backsim 4799.$$

aprez quoy les deux Nombres qu'on cherche, se pourront trouuer en Nombres Veritables, en mettant à la place des trois quantitez indeterminées c, ∂, x, qui demeurent dans la Solution indefinie, leurs Valeurs trouuées 71, 11, 4514.

Nous ajouterons icy treize Questions, dont la premiere & la derniere sont de Bachet.

I.

Trouuer deux Nombres, dont la somme soit Vn Nombre quarré, lequel étant augmenté & diminué de leur produit, il vienne deux Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la somme $x+y$ soit Vn Nombre quarré, tel que si on luy ajoute & qu'on en ôte leur produit xy, la somme $lx+ly+xy$, & la difference $lx+ly-xy$, soient des Nombres quarrez.

Si des deux côtez d'Vn triangle rectangle on forme Vn autre triangle rectangle, & qu'on diuise la somme d'Vn quarré indeterminé & du côté égal au double du produit des Nombres generateurs de ce second triangle rectangle, par l'hypotenuse du même triangle, on aura l'Vn des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant multiplié par le même côté, & le produit étant diuisé par le quarré indeterminé, on aura l'autre nombre qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Puissances à égaler au quarré,

$lx+ly.$

$lx+ly+xy.$

$lx+ly-xy.$

Egalez la seconde $lx+ly+xy$ au quarré $\frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc}$, pour auoir $xy \sim \frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc}-lx-ly$, & la seconde $lx+ly-xy$ au quarré $\frac{aaxx-2abxx+bbxx}{cc}$, pour auoir le même $xy \sim lx+ly-\frac{aaxx+2abxx-bbxx}{cc}$, & par consequent cette Equation, $lx+ly-\frac{aaxx+2abxx-bbxx}{cc} \sim \frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc}-lx-ly$, dans laquelle on trouuera $lx+ly \sim \frac{aaxx+bbxx}{cc}$. C'est pourquoy au lieu de $xy \sim \frac{aaxx+2abxx-bbxx}{cc}-lx-ly$, ou de $xy \sim lx+ly-\frac{aaxx+2abxx-bbxx}{cc}$, on aura $xy \sim \frac{2abxx}{cc}$, & par consequent $y \sim \frac{2abx}{cc}$, & au lieu de $lx+ly \sim \frac{aaxx+bbxx}{cc}$, on aura $lx+\frac{2labx}{cc} \sim \frac{aaxx+bbxx}{cc}$, & l'on trouuera $x \sim \frac{2ab+cc}{aa+bb}$, & par consequent $y \sim \frac{2abcc+4aabb}{aacc+bbcc}$, & au lieu de la premiere Puissance $lx+ly$, on aura en entiers & en moindres termes, celle-cy à égaler au quarré, $aa+bb$, pour le côté duquel prenant $a \pm \frac{bd}{m}$, on trouuera en entiers

$a \sim dd - mm.$

$b \sim 2dm.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4ccd^3m-4ccdm^3+llc^4,\ 16d^6mm-32d^4m^4+16ddm^6+4llccd^3m-4llccdm^3}{ccd^4+2ccddmm+ccm^4}.$$

Si l'on suppose

$c \sim 1.$

$d \sim 2.$

$m \sim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

1.

24.

Le Canon precedent a été tiré de cette solution, mais on le peut enoncer plus simplement en cette sorte.

Canon. Si au quadruple de l'aire d'vn triangle rectangle, on ajoute vn quarré indeterminé, & qu'on diuise la somme par le quarré de l'hypotenuse, on aura l'vn des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant multiplié par le quadruple de l'aire, & le produit étant diuisé par le quarré indeterminé, on aura l'autre Nombre qu'on cherche.

Si vous voulez que la difference de ces deux Nombres ainsy trouuez, soit aussy vn Nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette Puissance $16mmd^6-32m^4d^4+16ddm^6-l^4c^4$. Pour cette fin, on en diminuera le Nombre des termes, par

cette Equation, $16mmd^6 \backsim l^4c^4$, dans laquelle on trouuera $m \backsim \frac{llcc}{4d^3}$, & l'on aura en moins & en moindres termes, & en entiers, cette autre Puissance à égaler au quarré, $l^4c^4 - 32d^8$, pour le côté duquel prenant $llcc \cdots 2d^4$, on trouuera $lc \backsim 3dd$, & au lieu de $m \backsim \frac{llcc}{4d^3}$, on aura $m \backsim \frac{9}{4}d$.

C'est pourquoy Si l'on suppose

$$d \backsim 4.$$

on trouuera

$$m \backsim 9.$$

$$c \backsim 48.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{7056,\ 28665}{9409}.$$

dont la somme $\frac{35721}{9409}$, & la difference $\frac{21609}{9409}$, ont leurs Racines quarrées $\frac{189}{97}$, $\frac{147}{97}$.

On peut autrement & tres facilement resoudre cette Question, en commençant à rendre quarées les deux dernieres Puissances,

$$lx + ly + xy.$$

$$lx + ly - xy.$$

par la metode de Diophante, comme Vous alez Voir.

Leur difference est $2xy$, qui a ces deux Nombres produisans,

$$2x.$$

$$y.$$

La moitié de leur somme est $x + \frac{1}{2}y$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $lx + ly + xy$, on trouuera $y \backsim 2l + \sqrt{4ll + 4lx - 4xx}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $4ll + 4lx - 4xx$, pour le côté duquel prenant $2l \cdots \frac{ax}{b}$, on trouuera $x \backsim \frac{4ab+4bb}{aa+4bb}$, & par consequent $y \backsim \frac{4aa+4ab}{aa+4bb}$, & au lieu de la premiere Puissance $lx + ly$, on aura en entiers, celle-cy à égaler au quarré, $aa + 4bb$, pour le côté duquel prenant $a \pm \frac{bc}{d}$, on trouuera en entiers,

$$a \backsim cc \cdots 4dd.$$

$$b \backsim 2cd$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Seconde Solution.

$$\frac{16ccdd + 32cd^3 - 8c^3d,\ 64d^4 - 32ccdd + 4c^4 + 32cd^3 - 8c^3d}{c^4 + 8ccdd + 16d^4}.$$

Si l'on suppose

$$c \backsim 1.$$

$$d \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{8,\ 12}{5}.$$

Si au lieu de prendre $a \pm \frac{bc}{d}$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance $aa+4bb$, on prend $2b \cdots \frac{ac}{d}$, on trouuera

$$a \sim 4cd.$$

$$b \sim cc \cdots dd.$$

Troisieme Solution. & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^4-2ccdd+d^4+4c^3d-4cd^3,\ 16ccdd+4c^3d-4cd^3}{c^4+2ccdd+d^4}.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 2.$$

$$d \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{33,\ 88}{25}.$$

Voyez la 1.e des trois que nous auons ajoutées à la Quest. XXXI.

II.

Trouuer deux Nombres, dont la difference soit vn Nombre quarré, lequel étant ajouté & ôté de leur produit, il vienne deux nombres quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont la difference $x-y$, soit vn Nombre quarré, lequel étant ajouté & ôté de leur produit xy, la somme $xy+lx-ly$, & le reste $xy-lx+ly$, soient des Nombres quarrez.

Canon. Si on diuise l'excez d'vn quarré indeterminé sur l'hypotenuse d'vn triangle rectangle, dont les Nombres generateurs soient en raison double, par le côté égal au double du produit des mêmes Nombres generateurs, on aura l'vn des deux Nombres qu'on cherche, lequel étant multiplié par l'hypotenuse du même triangle, & le produit étant diuisé par le même quarré, on aura l'autre Nombre qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Puissances à égaler au quarré,

$$lx-ly.$$

$$xy+lx-ly.$$

$$xy-lx+ly.$$

Egalez la deuxieme $xy+lx-ly$, au quarré $\frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc}$, pour auoir $xy \sim \frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc}-lx+ly$, & la troisieme $xy-lx+ly$ au quarré $\frac{aaxx-2abxx+bbxx}{cc}$, pour auoir le même $xy \sim \frac{aaxx-2abxx+bbxx}{cc}+lx-ly$, & par consequent cette Equation, $\frac{aaxx-2abxx+bbxx}{cc}+lx-ly \sim \frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc}-lx+ly$, dans

laquelle on trouuera $lx-ly \sim \frac{2abxx}{cc}$: c'est pourquoy au lieu de $xy \sim \frac{aabbxx+2abxx+bbxx}{cc} - lx + ly$, on aura $xy \sim \frac{aaxx+bbxx}{cc}$, & par consequent $y \sim \frac{aax+bbx}{cc}$, & au lieu de $lx-ly \sim \frac{2abxx}{cc}$, on aura $lx - \frac{laax-lbbx}{cc} \sim \frac{2abxx}{cc}$, où l'on trouuera $x \sim \frac{cc-aa-bb}{2ab}$, & par consequent $y \sim \frac{aacc+bbcc-a^4-2aabb-b^4}{2abcc}$: & enfin au lieu de la premiere Puissance $lx-ly$, on aura en entiers & en moindres termes, celle-cy à égaler au quarré, $2ab$, pour le côté duquel prenant d, on trouuera $b \sim \frac{dd}{2a}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4aacc-4a^4-d^4}{4aadd}$$

$$\frac{16a^6cc+4aaccd^4-16a^8-8a^4d^4-d^8}{16a^4ccdd}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$c \sim 2.$$
$$d \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{176, 55}{64}.$$

Pour auoir vne autre Solution, égalez la Puissance precedente $2ab$, au quarré $\frac{bbdd}{mm}$, pour auoir en entiers

$$a \sim dd.$$
$$b \sim 2mm.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Seconde Solution.

$$\frac{llcc-d^4-4m^4}{4ddmm}.$$

$$\frac{ccd^4+4ccm^4-16m^8-8d^4m^4-d^8}{4ccddmm}.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 3.$$
$$d \sim 1.$$
$$m \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{21, 5}{9}.$$

Si vous voulez vne Solution bien simple, égalez la premiere Puissance $lx-ly$ au quarré aa, pour auoir $lx \sim aa+ly$, & les deux dernieres Puissances se changeront en ces deux autres,

$$llyy+laay+llaa.$$
$$llyy+laay-llaa.$$

Egalez la premiere $llyy+laay+llaa$ au quarré $llyy+2llay+llaa$, pour auoir $a \sim 2l$, & la derniere $llyy+laay-llaa$, se changera en celle-cy, $yy+4ly-4ll$, laquelle étant égalée au quarré $yy-2by+bb$, on

trouuera $y \sim \frac{bb+4ll}{2b+4l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront de cette grandeur

Troisieme Solution.

$$\frac{bb+8lb+20ll,\ bb+4ll}{2b+4l}.$$

Si l'on suppose

$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{29,5}{6}.$$

& Si l'on suppose

$$b \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$5.$$

$$1.$$

On tire de cette troisieme Solution, le Canon suiuant;

Canon. Si on diuise la somme de quatre Unitez & du quarré de la somme d'un Nombre indeterminé & de quatre Unitez, & la somme de quatre Unitez & du quarré du Nombre indeterminé, chacune par la somme de quatre Unitez & du double du même Nombre indeterminé; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Pour auoir une Solution plus generale, égalez la derniere Puissance $llyy+laay-llaa$, au quarré yy, pour auoir $y \sim l$, & la premiere $llyy+laay+llaa$, se changera en celle-cy, $ll+2aa$, laquelle étant égalée au quarré $ll-\frac{2lab}{c}+\frac{aabb}{cc}$, on trouuera $a \sim \frac{2bc}{bb-2cc}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Quatrieme Solution.

$$\frac{b4+4c4,\ b4-4bbcc+4c4}{b4-4bbcc+4c4}.$$

Si l'on suppose

$$b \sim 3.$$

$$c \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$145.$$

$$1.$$

& Si l'on suppose

$$b \sim 7.$$

$$c \sim 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$4901.$$

$$1.$$

On peut donner autant d'autres Nombres entiers que l'on voudra, par une metode toutafait semblable à celle que vous auez dans le Lemme qui precede la Quest. XXV.

Si

Si Vous voulez qu'outre la difference, la somme des deux Nombres qu'on cherche, soit aussy un nombre quarré, il faut se servir de la 3.e Solution, & égaler au quarré ces deux Puissances,

$$lb+2ll$$
$$bb+4lb+12ll.$$

Egalez la premiere $lb+2ll$, au quarré aa, pour auoir $lb \backsim aa-2ll$, & la deuxieme $bb+4lb+12ll$, se changera en celle-cy, a^4+8l^4, où la somme des Unitez fait le Nombre quarré 9, ce qui fait connoitre que l'on peut attribuer l'Unité à la lettre indeterminée a.

Si donc on suppose

$$a \backsim 1.$$

on trouuera

$$b \backsim -1.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{13,\ 5}{2}.$$

dont la somme 9, & la difference 4, ont leurs Racines quarrées 3, 2.

Pour auoir une seconde solution, supposez

$$a \backsim c+1.$$

& au lieu de la Puissance precedente a^4+8l^4, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $c^4+4c^3+6cc+4c+9$, pour le côté duquel prenant $3+\frac{2}{3}c+cc$, on trouuera

$$c \backsim \frac{1}{6}.$$
$$a \backsim \frac{7}{6}.$$
$$b \backsim -\frac{23}{36}.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{19825,\ 5713}{3528}.$$

dont la somme $\frac{12769}{1764}$, & la difference 4, ont leurs Racines quarrées $\frac{113}{42}$, 2.

Ou bien à cause de $b \backsim -1$, supposez

$$b \backsim z-1.$$

& les deux premieres Puissances se changeront en ces deux autres,

$$z+1.$$
$$zz+2z+9.$$

dont la premiere $z+1$ doit être multipliée par le Nombre quarré 9, pour auoir ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$9z+9.$$
$$zz+2z+9.$$

Leur difference est $zz-7z$, qui a ces deux Nombres produisans,

$$z.$$

$$z-7.$$

La Moitié de leur difference est $\frac{7}{2}$, dont le quaré $\frac{49}{4}$ étant égalé à la plus petite Puissance $9z+9$, on trouuera $z \sim \frac{13}{36}$. c'est pourquoy au lieu de $b \sim z-1$, on aura $b \sim -\frac{23}{36}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Pour auoir encore d'autres Solutions, mettez

$$\frac{a,\ b}{z}$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez en entiers, ces quatre Puissances à égaler au quaré,

$$az+bz.$$

$$az-bz.$$

$$ab+az-bz.$$

$$ab-az+bz.$$

Egalez la premiere $az+bz$ au quaré $\frac{ccxx}{dd}$, pour auoir $a \sim \frac{ccxx}{ddz} -b$, & la deuxieme $az-bz$ au quaré $\frac{mmyy}{nn}$, pour auoir le même $a \sim \frac{mmyy}{nnz} +b$, & par consequent cette Equation, $\frac{ccxx}{ddz} - b \sim \frac{mmyy}{nnz} + b$, dans laquelle on trouuera $b \sim \frac{ccnnxx - ddmmyy}{2ddnnz}$. c'est pourquoy au lieu de $a \sim \frac{ccxx}{ddz} - b$, ou de $a \sim \frac{mmyy}{nnz} + b$, on aura $a \sim \frac{ccnnxx + ddmmyy}{2ddnnz}$, & les deux dernieres Puissances se changeront en ces deux autres,

$$c^4n^4x^4 - d^4m^4y^4 + 4d^4mmnnyyzz.$$

$$c^4n^4x^4 - d^4m^4y^4 - 4d^4mmnnyyzz.$$

Leur difference est $8d^4mmnnyyzz$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$$2ddmnyz.$$

$$4ddmnyz.$$

La Moitié de leur somme est $3ddmnyz$, dont le quaré étant égalé à la plus grande Puissance $c^4n^4x^4 - d^4m^4y^4 + 4d^4mmnnyyzz$, on trouuera $z \sim \sqrt{\frac{c^4n^4x^4 - d^4m^4y^4}{5d^4mmnnyy}}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quaré, $5c^4n^4x^4 - 5d^4m^4y^4$, ou $20c^4n^4x^4 - 20d^4m^4y^4$, laquelle a ces deux Nombres produisans,

$$4ccnnxx + 4ddmmyy.$$

$$5ccnnxx - 5ddmmyy.$$

que l'on égalera ensemble, par cette Equation, $4ccnnxx + 4ddmmyy \sim 5ccnnxx - 5ddmmyy$, dans laquelle on trouuera en entiers,

$$x \sim 3dm.$$

$$y \sim cn.$$

& par consequent

$$z \backsim 4cm.$$
$$a \backsim \frac{5}{4}cm.$$
$$b \backsim cm.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{5,4}{16}.$$

dont la somme $\frac{9}{16}$, & la difference $\frac{1}{16}$, ont leurs Racines quarrées $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$.

Si vous voulez deux autres nombres, mettez

$$\frac{5}{16}xx.$$
$$\frac{4}{16}xx.$$

pour ces deux Nombres, afinque leur somme & leur difference soit des Nombres quarrez, & il n'y aura plus qu'à égaler au quarré ces deux Puissances,

$$20xx+16.$$
$$20xx-16.$$

où la somme des Unitez fait dans chacune un nombre quarré, ce qui fait connoître qu'on peut supposer $x \backsim 1$, & alors les deux Nombres qu'on cherche, se troueueront les mêmes qu'auparauant: & pour en auoir deux autres, supposez

$$x \backsim z+1.$$

pour auoir ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$20zz+40z+36.$$
$$20zz+40z+4.$$

dont la derniere $20zz+40z+4$, doit être multipliée par le nombre quarré 9, pour auoir ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$20zz+40z+36$$
$$180zz+360z+36.$$

Leur difference est $160zz+320z$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$$\frac{80}{3}z.$$
$$6z+12.$$

La Moitié de leur somme est $6+\frac{49}{3}z$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $180zz+360z+36$, on trouvera $z \backsim \frac{1476}{781}$, & par consequent $x \backsim \frac{2257}{781}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{25470245,\ 20376196}{9759376}.$$

dont la somme $\frac{45846441}{9759376}$, & la difference $\frac{5094049}{9759376}$, ont leurs Racines quarrées $\frac{6771,\ 2257}{3124}$.

III.

Trouver deux Nombres, dont la difference soit un nombre quarré, lequel étant augmenté & diminué de leur produit, il vienne deux nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la difference $x-y$ soit un nombre quarré, lequel étant augmenté & diminué de leur produit xy, la somme $1x-1y+xy$, & le reste $1x-1y-xy$, soient des Nombres quarrez.

Canon. Si on divise l'excez d'un quarré indeterminé sur le quadruple de l'aire d'un triangle rectangle, par le quarré de l'hypotenuse du même triangle, on aura le plus grand des deux nombres qu'on cherche, lequel étant multiplié par le même quadruple, & le produit étant divisé par le même quarré, on aura le plus petit.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Puissances à égaler au quarré,

$1x-1y.$

$1x-1y+xy.$

$1x-1y-xy.$

Egalez la deuxieme $1x-1y+xy$ au quarré $\frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc}$, pour avoir $xy \propto \frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc} - 1x + 1y$, & la troisieme $1x-1y-xy$ au quarré $\frac{aaxx-2abxx+bbxx}{cc}$, pour avoir le même $xy \propto 1x-1y-\frac{aaxx+2abxx-bbxx}{cc}$, & par consequent cette Equation, $\frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc} - 1x + 1y \propto 1x - 1y - \frac{aaxx+2abxx-bbxx}{cc}$, dans laquelle on trouvera $1x-1y \propto \frac{aaxx+bbxx}{cc}$. C'est pourquoy au lieu de $xy \propto \frac{aaxx+2abxx+bbxx}{cc} - 1x + 1y$, on aura $xy \propto \frac{2abxx}{cc}$, & par consequent $y \propto \frac{2abx}{cc}$, & au lieu de $1x-1y \propto \frac{aaxx+bbxx}{cc}$, on aura $1x - \frac{2abx}{cc} \propto \frac{aaxx+bbxx}{cc}$, où l'on trouvera $x \propto \frac{cc-2ab}{aa+bb}$, & au lieu de $y \propto \frac{2abx}{cc}$, on aura $y \propto \frac{2abcc-4aabb}{aacc+bbcc}$, & enfin au lieu de la premiere Puissance $1x-1y$, on aura en entiers & en moindres termes, celle-cy à égaler au quarré, $aa+bb$, pour le côté duquel prenant $a \mp \frac{bm}{n}$, on trouvera en entiers

$a \propto mm - nn.$

$b \propto 2mn.$

qui sont les deux côtez d'un triangle rectangle, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{llcc - 4m^3n + 4mn^3}{m^4 + 2mmnn + n^4}.$$

$$\frac{4llccm^3n - 4llccmn^3 - 16m^6nn + 32m^4n^4 - 16mmn^6}{ccm^4 + 2ccmmnn + ccn^4}.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 5.$$
$$m \sim 2.$$
$$n \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{25, 24}{625}.$$

Il arriue icy par hazard que la somme des deux nombres trouuez est aussy Vn nombre quarré: mais si vous voulez que cela arriue par Vne metode certaine, il faut mettre pour le quarré indeterminé cc, le quarré de l'hypotenuse d'Vn triangle rectangle, dont les deux autres quantitez indeterminées m, n, sont les nombres generateurs, sauoir $m^4 + 2mmnn + n^4$. D'où l'on tire ce Canon.

Si l'on diuise le quarré de la difference des deux côtez d'Vn triangle rectangle par le quarré de l'hypotenuse du même triangle, on aura le plus grand des deux nombres qu'on cherche, lequel étant multiplié par le quadruple de l'aire du même triangle, & le produit étant diuisé par le quarré de l'hypotenuse, on aura le plus petit. Canon.

Cette Question se peut encore resoudre tres facilement en cette sorte.

La difference des deux dernieres Puissances est $2xy$, dont les deux nombres produisans sont tels,

$$2x.$$
$$y.$$

La moitié de leur somme est $x + \frac{1}{2}y$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $lx - ly + xy$, on trouuera $y \sim \sqrt{4ll + 4lx - 4xx} - 2l$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $4ll + 4lx - 4xx$, pour le côté duquel prenant $2l \cdots \frac{ax}{b}$, on trouuera $x \sim \frac{4ab + 4bb}{aa + 4bb}$, & par consequent $y \sim \frac{4ab - 16bb}{aa + 4bb}$, & au lieu de la premiere Puissance $lx - ly$, on aura en entiers, celle-cy à égaler au quarré, $5aa + 20bb$. Pour cette fin, supposez

$$b \sim z \cdots a.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $25aa - 40az + 20zz$, pour le côté duquel prenant $5a \cdots \frac{5cz}{d}$, on trouuera en entiers,

$$z \sim 10cd - 8dd.$$
$$a \sim 5cc - 4dd.$$
$$b \sim 5cc - 10cd + 4dd.$$

C'est pourquoy si l'on suppose

$c \sim 5.$

$d \sim 3.$

on trouuera

$a \sim 89.$

$b \sim 11.$

& les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{880, 396}{1681}.$

Voyez la derniere des trois que nous auons ajoutées à la Quest. XXXI.

IV.

Trouuer deux Nombres, dont le produit étant ajouté à leur somme & à leur difference, il vienne deux nombres quarez.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

dont le produit xy étant ajouté à leur somme $x+y$, & à leur difference $x-y$, les deux sommes

$lx+ly+xy.$

$lx-ly+xy.$

soient chacune vn nombre quarré.

Canon. Prenez pour le plus petit des deux nombres qu'on cherche, vn nombre indeterminé moindre que le quart de l'vnité, & pour auoir le plus grand, ajoutez l'vnité au quadruple du quarré du plus petit, & diuisez le quart de la somme par la somme du plus petit & de l'vnité.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$xy+lx+ly.$

$xy+lx-ly.$

Leur difference est $2ly$, qui a ces deux nombres produisans,

$2y.$

$l.$

La moitié de leur somme est $y+\frac{1}{2}l$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xy+lx+ly$, on trouuera $x \sim \frac{4yy+ll}{4y+4l}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{4yy+ll,\ 4yy+4ly}{4y+4l}.$

Si l'on suppose

$$y \sim \frac{1}{5}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{29,\ 24}{120}.$$

& si l'on suppose

$$y \sim \frac{1}{6}.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{10,\ 7}{42}.$$

Pour auoir vne solution plus generale, égalez la premiere Puissance $xy+lx+ly$, au quarré aa, pour auoir $x \sim \frac{aa-ly}{y+l}$, & la deuxieme $xy+lx-ly$, au quarré bb, pour auoir le même $x \sim \frac{bb+ly}{y+l}$, & par consequent cette Equation, $aa-ly \sim bb+ly$, dans laquelle on trouuera $ly \sim \frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb$. & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront de cette grandeur; Seconde Solution.

$$\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb.$$

$$\frac{aa+bb}{aa-bb+2ll}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2\frac{1}{2}.$$

$$b \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{328,\ 153}{136}.$$

On tire de cette seconde solution, le Canon suiuant;

La Moitié de la difference de deux quarrez indeterminez est le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, & pour auoir le plus grand, on diuisera la somme des deux quarrez indeterminez par leur difference augmentée de deux Vnitez. Canon.

La determination de cette Question ainsy resolue, à l'égard des deux Nombres indeterminez a, b, est que le premier doit être plus grand que le second b, & moindre que $\sqrt{bb+2lb}$. Determination.

Car afinque le premier Nombre trouué $\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb$, soit affirmé, il faut que aa soit plus grand que bb & par consequent a plus grand que b. Ce qui est l'Vne des deux choses qu'il faloit demontrer. Demonstration.

Deplus afinque le même Nombre $\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb$ soit plus petit que le second $\frac{aa+bb}{aa-bb+2ll}$, on aura cette inégalité, $\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb \ominus \frac{aa+bb}{aa-bb+2ll}$, laquelle étant Multipliée par $2aa-2bb+4ll$, on aura celle-cy, $a^4-2aabb+b^4+2llaa-2llbb \ominus 2llaa+2llbb$, & par l'antithese on aura celle-cy, $a^4-2aabb+b^4 \ominus 4llbb$, & par la Racine quarrée on aura celle-cy, $aa-bb \ominus 2lb$, & par consequent $aa \ominus bb+2lb$, ou $a \ominus \sqrt{bb+2lb}$. Ce qui restoit à demontrer.

V.

Trouver deux Nombres, dont la somme & la difference étant ôtées de leur produit, il reste deux Nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

x.

y.

dont la somme $x+y$, & la difference $x-y$, étant ôtées de leur produit les deux restes

$xy-lx-ly$.

$xy-lx+ly$.

soient chacun Un Nombre quarré.

Canon. Prenez pour le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, Un Nombre indeterminé plus grand que l'Unité, & pour avoir le plus grand, divisez la somme du quart de l'Unité & du quarré du Nombre indeterminé, par l'excez de ce même Nombre sur l'Unité.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$xy-lx-ly$.

$xy-lx+ly$.

Leur difference est qui a ces deux Nombres produisans,

$2y$.

l.

La moitié de leur somme est $y+\frac{1}{2}l$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xy-lx+ly$, on trouvera $x \sim \frac{4yy+ll}{4y-4l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{4yy+ll,\ 4yy-4ly}{4y-4l}$.

Si l'on suppose

$y \sim 2$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{17,\ 8}{4}$.

& si l'on suppose

$y \sim 3$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{37,\ 24}{8}$.

Pour avoir Une Solution plus generale, égalez la premiere Puissance $xy-lx-ly$, au quarré aa, pour avoir $x \sim \frac{aa+ly}{y-l}$, & la deuxieme $xy-lx+ly$, au quarré bb, pour avoir le même $x \sim \frac{bb-ly}{y-l}$, & par

par consequent cette Equation, $aa + ly \backsim bb - ly$, dans laquelle on trouuera $ly \backsim \frac{1}{2}bb - \frac{1}{2}aa$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront de cette grandeur;

$$\tfrac{1}{2}bb - \tfrac{1}{2}aa.$$

$$\frac{bb+aa}{bb-aa-2ll}.$$ Deuxieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$

$$b \backsim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{26,\ 15}{6}.$$

& Si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$

$$b \backsim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{10,\ 7}{2}.$$

On tire de cette seconde Solution, le Canon suiuant;

La Moitié de la difference de deux quarrez indeterminez est le plus petit des deux Nombres qu'on cherche: & pour auoir le plus grand, on diuisera la Somme des deux quarrez indeterminez par l'excez de leur difference sur deux Vnitez. Canon.

VI.

Trouuer deux Nombres, dont le produit étant ôté de leur somme & de leur difference, il reste deux Nombres quarez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont le produit xy, ètant ôté de leur somme $x+y$, & de leur difference $x-y$, les deux restes

$$1x + 1y - xy.$$

$$1x - 1y - xy.$$

Soient chacun Vn Nombre quarré.

Prenez pour le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, Vn Nombre indeterminé moindre que l'Vnité; & pour auoir le plus grand, ajoutez l'Vnité au quarré de la moitié du plus petit, & diuisez la somme par l'excez de l'Vnité sur le plus petit. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$lx+ly-xy.$$
$$lx-ly-xy.$$

Leur difference est $2ly$, qui a ces deux nombres produisans,

$$y.$$
$$2l.$$

La moitié de leur somme est $\frac{1}{2}y+l$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $lx+ly-xy$, on trouuera $x \sim \frac{yy+4ll}{4l-4y}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{yy+4ll,\ 4ly-4yy}{4l-4y}.$$

Si l'on suppose

$$y \sim \frac{1}{2}.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{17,\ 4}{8}.$$

& Si l'on suppose

$$y \sim \frac{1}{4}.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{65,\ 12}{48}.$$

Pour auoir une solution plus generale, égalez la premiere Puissance $lx+ly-xy$ au quarré aa, pour auoir $x \sim \frac{aa-ly}{l-y}$, & la deuxieme $lx-ly-xy$ au quarré bb, pour auoir le même $x \sim \frac{bb+ly}{l-y}$, & par consequent cette Equation, $aa-ly \sim bb+ly$, dans laquelle on trouuera $ly \sim \frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb.$$
$$\frac{aa+bb}{2ll-aa+bb}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2\tfrac{1}{3}.$$
$$b \sim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{306,\ 13}{18}.$$

On tire de cette seconde Solution, le canon suiuant;

Canon. La moitié de la difference de deux quarrez indeterminez est le plus petit des deux nombres qu'on cherche; & pour auoir le plus grand, on diuisera la somme des deux quarrez indeterminez par le double de l'excez de l'Unité sur le plus petit.

On on aura une Solution plus élegante, en faisant des positions conformes à la Nature du Probleme, sauoir en mettant

$$\frac{x,\ y}{2}.$$

pour les deux nombres qu'on cherche, & alors on aura en entiers,

ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xz+yz-xy.$$
$$xz-yz-xy.$$

Leur difference est $2yz$, qui a ces deux Nombres produisans,

$$y.$$
$$2z.$$

La Moitié de leur somme est $\frac{1}{2}y+z$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xz+yz-xy$, on trouuera $z \backsim \frac{1}{2}x$ 7 $\sqrt{\frac{1}{4}xx-xy-\frac{1}{4}yy}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $\frac{1}{4}xx-xy-\frac{1}{4}yy$, ou ~~xx~~ $-4xy-4yy$, pour le côté duquel prenant $x-a$, on trouuera $x \backsim \frac{aa+yy}{2a-4y}$, & par consequent $z \backsim \frac{yy+2ay}{2a-4y}$, ou $z \backsim \frac{1}{2}a$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{aa+yy,\ 2ay-4yy}{yy+2ay}.$$

ou.

$$\frac{aa+yy,\ 2ay-4yy}{aa-2ay}.$$

Troisieme & quatrieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$
$$y \backsim 1.$$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{10,\ 2}{7}.$$

ou

$$\frac{10,\ 2}{3}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 4.$$
$$y \backsim 1.$$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{17,\ 4}{9}.$$

ou

$$\frac{17,\ 4}{[illegible]}.$$

Pour auoir Une solution plus generale, égalez la premiere Puissance $xz+yz-xy$, au quarré aa, pour auoir $z \backsim \frac{aa+xy}{x+y}$, & la deuxieme $xz-yz-xz$, au quarré bb, pour auoir le même $z \backsim \frac{bb+xy}{x-y}$, & par consequent cette Equation $\frac{aa+xy}{x+y} \backsim \frac{bb+xy}{x-y}$, dans laquelle on trouuera $x \backsim \frac{aay+bby}{aa-bb-2yy}$, & au lieu de $z \backsim \frac{aa+xy}{x+y}$, ou de $z \backsim \frac{bb+xy}{x-y}$, on aura $z \backsim \frac{a^4-aabb-aayy+bbyy}{2aay-2y^3}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{2a^4yy+2aabbyy-2aay^4-2bby^4,\ 2a^4yy-2aabbyy-6aay^4+2bby^4+4y^6}{a^6-2a^4bb+aab^4-3a^4yy+4aabbyy+2aay^4-2bby^4-b^4yy}.$$

Cinquieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 3.$$
$$b \sim 1.$$
$$y \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{5,\ 3}{12}.$$

Voyez la 2.e Question, qui sera ajoutée à 2.1. 3.

VII.

Trouuer deux Nombres, dont le produit étant ajouté à leur somme, & étant ôté de leur difference, il vienne deux Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont le produit xy, étant ajouté à leur somme $x+y$, & étant ôté de leur difference $x-y$, la somme $lx+ly+xy$, & le reste $lx-ly-xy$, soient des Nombres quarrez.

Canon. La Moitié de la somme de deux quarrez indeterminez, est le plus grand des deux Nombres qu'on cherche : & pour auoir le plus petit, diuisez la difference des deux quarrez indeterminez par leur somme augmentée de deux Vnitez.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$lx+ly+xy.$$
$$lx-ly-xy.$$

Egalez la premiere $lx+ly+xy$ au quarré aa, pour auoir $xy \sim aa-lx-ly$, & la deuxieme $lx-ly-xy$ au quarré bb, pour auoir le même $xy \sim lx-ly-bb$, & par consequent cette Equation, $aa-lx-ly \sim lx-ly-bb$, dans laquelle on trouuera $lx \sim \frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}bb$, & au lieu de $xy \sim aa-lx-ly$, ou de $xy \sim lx-ly-bb$, on aura $\frac{1}{2}aay+\frac{1}{2}bby \sim \frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb-ly$, où l'on trouuera $y \sim \frac{aa-bb}{aa+bb+2ll}$. Ainsy les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}bb.$$
$$\frac{aa-bb}{aa+bb+2ll}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{35,\ 6}{14}.$$

& Si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$

$$b \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{15,2}{3}.$$

Pour auoir Vne solution plus generale, mettez

$$\frac{x,y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & alors Vous aurez, en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xz+yz+xy.$$

$$xz-yz-xy.$$

Egalez la premiere $xz+yz+xy$, au quarré aa, pour auoir $xy \backsim aa-xz-yz$, & la deuxieme $xz-yz-xy$, au quarré bb, pour auoir le même $xy \backsim xz-yz-bb$, & par consequent cette Equation, $aa-xz-yz \backsim xz-yz-bb$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{aa+bb}{2x}$, & au lieu de $xy \backsim aa-xz-yz$ ou de $xy \backsim xz-yz-bb$, on aura $xy \backsim \frac{aax-bbx-aay-bby}{2x}$: & l'on trouuera $y \backsim \frac{aax-bbx}{aa+bb+2xx}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4x^4+2aaxx+2bbxx,\ 2aaxx-2bbxx}{a^4+2aabb+b^4+2aaxx+2bbxx}.$$ Seconde Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$

$$b \backsim 1.$$

$$x \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{14,6}{35}.$$

VIII.

Trouuer deux Nombres, dont le produit étant ôté de leur somme, & étant ajouté à leur difference, il Vienne deux Nombres quarez.

On propose de trouuer deux Nombres

$$x.$$

$$y.$$

dont le produit xy, étant ôté de leur somme $x+y$, & étant ajouté à leur difference $x-y$, le reste $1x+1y-xy$, & la somme $1x-1y+xy$, soient chacun Vn Nombre quarré.

Si par la somme de deux quarez indeterminez on diuise la somme du premier & du quarré de la somme du côté du second & du double du côté du premier, on aura le plus grand des deux Nombres qu'on cherche: & pour auoir le plus petit, on Canon.

divisera par la somme des deux mêmes quarrez indeterminez l'excez du quarré de la somme de leurs côtez sur le double du quarré du premier côté.

Selon les conditions de la Question, vous aurez ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$lx + ly - xy.$$
$$lx - ly + xy.$$

Leur difference est $2ly - 2xy$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$$2y.$$
$$l - x.$$

La moitié de leur somme est $\frac{1}{2}l - \frac{1}{2}x + y$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $lx + ly - xy$, on trouvera $x \sim 3l + 2\sqrt{2ll - yy}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2ll - yy$. Pour cette fin, supposez

$$y \sim z - l.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $ll + 2lz - zz$, pour le côté duquel prenant $l - \frac{az}{b}$, on trouvera $z \sim \frac{2ab + 2bb}{aa + bb}$, & par consequent $y \sim \frac{bb + 2ab - aa}{aa + bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bb + 4ab + 5aa,\ bb + 2ab - aa}{aa + bb}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{17,7}{5}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$5.$$
$$1.$$

Le Canon precedent a été tiré de cette solution: mais on le peut énoncer plus facilement en cette sorte;

Canon. Si par l'hypotenuse d'un triangle rectangle, on divise la somme des deux côtez on aura le plus petit des deux Nombres qu'on cherche: & pour avoir le plus grand, on ôtera le quarré du plus petit de deux Unitez & on ajoutera trois Unitez au double de la Racine quarrée du reste.

Si vous voulez que la somme de ces deux Nombres ainsy trouuez soit vn Nombre quarré, il faudra égaler au quarré ces deux Puissances,

$$4aa+4bb.$$

$$4aa+6ab+2bb.$$

Leur difference est $2bb-6ab$, qui a ces deux Nombres produisans,

$$\frac{3}{2}b.$$

$$\frac{4}{3}b-4a.$$

La moitié de leur somme est $\frac{17}{12}b-2a$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $4aa+4bb$, on trouuera en entiers,

$$a \backsim 287.$$

$$b \backsim -816.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{140933,\ 115103}{748225}.$$

dont la somme $\frac{256036}{748225}$ a sa Racine quarrée $\frac{506}{875}$.

Ou bien le produit de ces deux Puissances est $16a^4+24a^3b+24aabb+24ab^3+8b^4$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $4aa+3ab+\frac{15}{8}bb$, on trouuera en entiers,

$$a \backsim 287.$$

$$b \backsim -816.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, se trouueront les mêmes qu'auparauant.

Pour faire qu'au lieu de la somme, la difference des deux Nombres qu'on cherche, soit vn Nombre quarré, il faudra égaler au quarré ces deux autres Puissances,

$$2ab+6bb.$$

$$aa+bb.$$

ce qui sera facile, parceque dans leur produit $6b^4+8aabb+2a^3b$, la somme 16 des Unitez est vn Nombre quarré, ce qui fait connoître que l'on peut supposer $a \backsim b$, & alors les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$5.$$

$$1.$$

dont la difference 4, a sa Racine quarrée 2.

Si vous en voulez deux autres, seruez vous des deux precedens 5, 1, & mettez

$$\frac{5,\ 1,}{\omega+1}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, vous aurez ces trois Puissances à égaler au quarré,

$6\omega+1.$

$4\omega+9.$

$\omega+1.$

Leur produit solide est $9+67\omega+82\omega\omega+24\omega^3$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $3+\frac{67}{6}\omega+\frac{1537}{216}\omega\omega$, on trouvera $\omega \sim \frac{8534232}{2362369}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{11811845,\ 2362369}{10896601}.$$

dont la difference $\frac{2449476}{10896601}$, a sa Racine quarrée $\frac{3074}{3301}$.

Nous enseignerons sur la fin de cette Question, la maniere d'accomplir ensemble ces deux conditions, c'est à dire de rendre quarrées la somme & la difference des deux Nombres qu'on cherche. Cependant pour avoir une seconde Solution indefinie de cette Question, nous égalerons autrement au quarré les deux premieres Puissances,

$lx+ly-xy.$

$lx-ly+xy.$

Leur difference est $2ly-2xy$, dont les deux nombres produisans sont tels,

$y.$

$2l-2x.$

La Moitié de leur somme est $l-x+\frac{1}{2}y$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $lx+ly-xy$, on trouvera $x \sim \frac{3}{2}l+\frac{1}{2}\sqrt{5ll-yy}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $5ll-yy$. Pour cette fin, supposez

$y \sim z-l.$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $4ll+2lz-zz$, pour le côté duquel prenant $2l\ldots\frac{az}{b}$, on trouvera $z \sim \frac{4ab+2bb}{aa+bb}$, & par consequent $y \sim \frac{bb+4ab-aa}{aa+bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Deuxieme Solution.

$$\frac{bb+2ab+5aa,\ 2bb+8ab-2aa}{2aa+2bb}.$$

Si l'on suppose

$a \sim 2.$

$b \sim 1.$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{5,\ 2}{2}.$$

& si l'on suppose

$a \sim 3.$

$b \sim 1.$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{13,\ 2}{5}.$$

On

On tire de cette seconde Solution, le Canon suiuant;

Si par la somme de deux quarrez indeterminez, on diuise leur difference augmentée du quadruple du prodiut sous leurs côtez on aura le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, dont le quarré étant ôté de cinq Unitez, & la moitié de la Racine quarrée du reste étant ajoutée à la Moitié de trois Unitez on aura le plus grand. Canon.

Ou bien égaler la premiere Puissance $lx+ly-xy$ au quarré aa, pour auoir $xy \sim lx+ly-aa$, & la deuxieme $lx-ly+xy$ au quarré bb, pour auoir le même $xy \sim bb-lx+ly$, & par consequent cette Equation, $lx+ly-aa \sim bb-lx+ly$, dans laquelle on trouuera $lx \sim \frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}bb$: c'est pourquoy au lieu de $xy \sim lx+ly-aa$, ou de $xy \sim bb-lx+ly$, on aura $\frac{1}{2}aay+\frac{1}{2}bby \sim \frac{1}{2}bb-\frac{1}{2}aa+ly$, & dans cette Equation, l'on trouuera $y \sim \frac{bb-aa}{aa+bb-2ll}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Troisieme Solution.

$$\frac{a^4+2aabb+b^4-2llaa-2llbb,\ 2llbb-2llaa}{2aa+2bb-2ll}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{5,\,2}{2}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 1.$$
$$b \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$5,$$
$$1.$$

On tire de cette troisieme Solution, le Canon suiuant;

La Moitié de la somme de deux quarrez indeterminez est le plus grand des deux Nombres qu'on cherche: & pour auoir le plus petit, on diuisera la difference des deux quarrez indeterminez par l'excez de leur somme sur deux Unitez. Canon.

Pour auoir d'autres Solutions, mettez

$$\frac{x,\,y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & alors vous aurez en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xz+yz-xy.$$
$$xz-yz+xy.$$

Leur difference est $2yz-2xy$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$2y.$

$z-x.$

La Moitié de leur difference est $\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}z$, dont le quarré étant égalé à la plus petite Puissance $xz-yz+xy$, on trouvera $y \backsim \frac{1}{2}\sqrt{6xz-xx-zz}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $6xz-xx-zz$. Pour cette fin supposez

$x \backsim z+l.$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $4zz+4lz-ll$, pour le côté duquel prenant $2z - \frac{la}{b}$, on trouvera $z \backsim \frac{aa+bb}{4ab+4bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, se trouveront les même que dans la seconde Solution.

Pour avoir une autre Solution, prenez ces deux autres Nombres produisans,

$y.$

$2z-x.$

La Moitié de leur difference est $x+\frac{1}{2}y-z$, dont le quarré étant égalé à la plus petite Puissance $xz-yz+xy$, on trouvera $y \backsim 2\sqrt{3xy-yy-zz}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $3xy-yy-zz$. Pour cette fin, supposez

$x \backsim z+l.$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $zz+lz-ll$, pour le côté duquel prenant $z - \frac{la}{b}$, on trouvera $z \backsim \frac{aa+bb}{2ab+bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Quatrieme Solution. $\frac{aa+2ab+2bb,\ 2aa+2ab-2bb}{aa+bb}.$

Si l'on suppose

$a \backsim 1.$

$b \backsim 1.$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{5,\ 2}{2}.$

& si l'on suppose

$a \backsim 3.$

$b \backsim 2.$

Les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{29,\ 22}{13}.$

On tire de cette quatrieme Solution, le canon suivant;

Canon. Si par la somme de deux quarrez indeterminez, on divise la somme du second & du quarré de la somme de leurs côtez, & la somme du quarré de la même somme des côtez, & de l'excez du premier quarré sur le triple du second; on aura les deux Nombres qu'on cherche.

Ou bien encore égaler la premiere Puissance $xz+yz-xy$ au quarré aa, pour avoir $xy \backsim xz+yz-aa$, & la seconde $xz-yz+xy$ au quarré bb, pour avoir le même $xy \backsim bb-xz+yz$, & par consequent cette Equation, $xz+yz-aa \backsim bb-xz+yz$, dans laquelle on trouvera $z \backsim \frac{aa+bb}{2x}$, & au lieu de $xy \backsim xz+yz-aa$, ou de $xy \backsim bb-xz+yz$, on aura $xy \backsim \frac{1}{2}bb-\frac{1}{2}aa+\frac{aay+bby}{2x}$, & dans cette Equation, l'on trouvera $y \backsim \frac{bbx-aax}{2xx-aa-bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4x^4-2aaxx-2bbxx,\ 2bbxx-2aaxx}{2aaxx+2bbxx-a^4-2aabb-b^4}.$$ Cinquieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 2.$$
$$x \backsim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{234,\ 54}{65}.$$

On peut tirer de cette cinquieme Solution Un canon general, Mais comme il se trouve trop composé, Nous Mettrons en sa place le suivant, qui est le plus simple & le plus beau de tous ceux que l'on sauroit trouver.

Si on divise la somme & la difference de deux Nombres indeterminez, chacune par la somme des deux Mêmes Nombres, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Ce Canon a été tiré de la solution suivante, qui a été trouvée en mettant

$$\frac{x+y,\ x-y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & alors on aura en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$2xz-xx+yy.$$
$$2xz+xx-yy.$$

Si on égale laquelle on trouvera on voudra de ces deux Puissances au quarré $xx+2xy+yy$, ou bien au quarré zz, on trouvera Une même Valeur pour z, sauoir $x+y$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{x+y,\ x-y}{x+y}.$$ Sixieme Solution.

Si l'on suppose

$$x \backsim 2.$$
$$y \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,\ 1}{3}.$$

& si l'on suppose

$$x \sim 3.$$

$$y \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2,1}{2}.$$

Si vous voulez que chacun de ces deux nombres ainsy trouvez, soit un nombre quarré, il faudra mettre pour x, l'hypotenuse d'un triangle rectangle, & pour y, le côté égal au double du produit des nombres generateurs du même triangle. Ainsy en se servant de ce triangle rectangle

$$aa-bb.$$

$$2ab.$$

$$aa+bb.$$

& en supposant

$$x \sim aa+bb.$$

$$y \sim 2ab.$$

Settieme Solution.

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+2ab+bb,\ aa-2ab+bb}{aa+2ab+bb}.$$

dont les Racines quarrées sont telles,

$$\frac{a+b,\ a-b}{a+b}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

$$b \sim 1.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{9,1}{9}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 1.$$

$$b \sim 3.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4,1}{4}.$$

Il est évident que si l'on veut que chacun des deux nombres qu'on cherche, soit un quarré-quarré, il faut mettre pour a, l'hypotenuse d'un autre triangle, & pour b, le côté égal au double du produit des nombres generateur du même triangle. Ainsy en se servant de ce triangle rectangle

$$cc-dd.$$

$$2cd.$$

$$cc+dd.$$

& en supposant

$$a \sim cc+dd.$$

$$b \sim 2cd.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^4+4c^3d+6ccdd+4cd^3+d^4,\ c^4-4c^3d+6ccdd-4cd^3+d^4}{c^4+4c^3d+6ccdd+4cd^3+d^4}.$$ Huitieme Solution.

dont les Racines quarré-quarrées sont telles,

$$\frac{c+d,\ c-d}{c+d}.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 2.$$

$$d \sim 1.$$

les deux quarré-quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{81,\ 1}{81}.$$

& si l'on suppose

$$c \sim 3.$$

$$d \sim 1.$$

les deux quarré-quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{16,\ 1}{16}.$$

Comme deux Nombres quelconques sont la somme & la difference de deux autres, le Canon precedent se peut changer au suivant, qui est plus simple & plus general, parceque par son Moyen on peut ajouter à la Question telle autre condition possible que l'on voudra.

Si on divise deux Nombres indeterminez, chacun par le plus grand, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Pour vous faire voir que par le Moyen de ce Canon, on peut ajouter à la Question telle autre condition que l'on voudra, il est bien évident que l'on peut rendre quarrez les deux Nombres qu'on cherche, en prenant pour les deux Nombres indeterminez du Canon, deux quarrez quelconques. Comme si l'on prend ces deux quarrez indeterminez aa, bb, dont le premier soit le plus grand, les deux Nombres qu'on cherche, se trouveront selon le Canon de cette grandeur,

$$\frac{aa,\ bb}{aa}.$$ Neuvieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

$$b \sim 1.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{4,\ 1}{4}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$

~~les deux quarrez~~

$$b \backsim 2.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2,\,4}{9}.$$

Si outre cette condition, l'on veut que la somme de ces deux quarrez soit un nombre quarré, il faudra prendre pour les deux quantitez indeterminées a, b, les côtez d'un triangle rectangle. Ainsy en se seruant de ce triangle rectangle,

$$cc - dd.$$

$$2cd.$$

$$cc + dd.$$

& en supposant

$$a \backsim cc - dd.$$

$$b \backsim 2cd.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

Dixieme Solution

$$\frac{c^4 - 2ccdd + d^4,\ 4ccdd}{c^4 - 2ccdd + d^4}.$$

Si l'on suppose

$$c \backsim 5.$$

$$d \backsim 2.$$

Les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{441,\,400}{441}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{21,\,20}{21}.$$

& si l'on suppose

$$c \backsim 3.$$

$$d \backsim 1.$$

Les deux quarrez qu'on cherche, seront tels

$$\frac{64,\,36}{64}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{8,\,6}{8}.$$

Mais en supposant

$$a \backsim 2cd.$$

$$b \backsim cc - dd.$$

on aura ces deux autres quarrez,

Onzieme Solution.

$$\frac{4ccdd,\ c^4 - 4ccdd + d^4}{4ccdd}.$$

Si l'on suppose

$$c \backsim 1.$$

$$d \backsim 2.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{9,16}{16}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{3,4}{4}.$$

& si l'on suppose

$$c \sim 2.$$
$$d \sim 3.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{25,144}{144}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{5,12}{12}.$$

Si au lieu de la somme, vous voulez que la difference des deux quarrez qu'on cherche, soit un nombre quarré, il faudra prendre pour a, l'hypotenuse d'un triangle rectangle, & pour b, l'un des deux côtez du même triangle. Ainsy en se servant du triangle rectangle precedent

$$cc - dd.$$
$$2cd.$$
$$cc + dd.$$

& en supposant

$$a \sim cc + dd.$$
$$b \sim cc - dd.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^4 + 2ccdd + d^4,\ c^4 - 2ccdd + d^4}{c^4 + 2ccdd + d^4}.$$ Douzieme Solution.

Si l'on suppose

$$c \sim 1.$$
$$d \sim 2.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{25,9}{25}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{5,3}{5}.$$

& si l'on suppose

$$c \sim 2.$$
$$d \sim 3.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{169,25}{169}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{13,5}{13}.$$

Mais en supposant

$$a \sim cc+dd.$$

$$b \sim 2cd.$$

Treisieme Solution

les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^4+2ccdd+d^4,\ 4ccdd}{c^4+2ccdd+d^4}.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 1.$$

$$d \sim 2.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{25,\ 16}{25}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{5,\ 4}{5}.$$

& si l'on suppose

$$c \sim 2.$$

$$d \sim 3.$$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{169,\ 144}{169}.$$

dont les côtez sont tels,

$$\frac{13,\ 12}{13}.$$

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la somme & la difference des deux nombres qu'on cherche, soient des nombres quarrez, il faudra mettre pour le plus grand nombre du canon precedent l'hypotenuse d'un triangle rectangle, & pour le plus petit le côté égal au double du produit des nombres generateurs du même triangle, dont l'hypotenuse doit être un nombre quarré. Ainsy en se seruant de ce triangle rectangle,

$$a^4-6aabb+b^4.$$

$$4a^3b-4ab^3.$$

$$a^4+2aabb+b^4.$$

dont l'hypotenuse $a^4+2aabb+b^4$ a sa Racine quarrée $aa+bb$, les deux nombres qu'on cherche, se trouueront tels,

Quatorzieme Solution.

$$\frac{a^4+2aabb+b^4,\ 4a^3b-4ab^3}{a^4+2aabb+b^4}:$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$

$$b \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{25,\ 24}{25}.$$

dont la somme $\frac{49}{25}$, & la difference $\frac{1}{25}$, ont leurs Racines quarrées $\frac{7}{5}$, $\frac{1}{5}$: & si l'on suppose

$$a \sim 3.$$

$$b \sim 2.$$

les

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{169,\ 120}{169}.$$

dont la somme $\frac{289}{169}$, & la difference $\frac{49}{169}$, ont leurs Racines quarrées $\frac{17}{13}$, $\frac{7}{13}$: Mais si l'on suppose

$$a \backsim 4.$$
$$b \backsim 3.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{625,\ 336}{625}.$$

dont la somme $\frac{961}{625}$, & la difference $\frac{289}{625}$, ont leurs Racines quarrées $\frac{31}{25}$, $\frac{17}{25}$.

On tire de cette quatorzieme solution, le canon suiuant;

Si par le quarré de l'hypotenuse d'vn triangle rectangle, on diuise separément le quarré de la même hypotenuse, & le quadruple de l'aire du même triangle, on aura les deux Nombres qu'on cherche. Canon.

Pareillement si l'on veut que chacun des deux nombres qu'on cherche, soit vn cube, on prendra pour les deux nombres indeterminez du même canon, deux cubes quelconques. Comme si l'on prend ces deux cubes a^3, b^3, dont le plus grand soit a^3, les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^3,\ b^3}{a^3}.$$ Quinzieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{8,\ 1}{8}.$$

qui ont leurs Racines cubiques $\frac{2,\ 1}{2}$.

& si l'on suppose

$$a \backsim 5.$$
$$b \backsim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{125,\ 64}{125}.$$

qui ont leurs Racines cubiques, $\frac{5,\ 4}{5}$.

Tous les Nombres que l'on peut trouuer par cette metode abregée, sont tels que le plus grand est toujours égal à l'Vnité, ce qui rend la solution vn peu limitée. C'est pourquoy pour en auoir vne plus generale, il faudra autrement égaler au quarré les deux Puissances precedentes,

$$2xz - xx + yy.$$
$$2yz + xx - yy.$$

comme vous alez voir.

Leur difference est $2xz-2yz-2xx+2yy$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$$x-y.$$

$$2z-2x-2y.$$

La Moitié de leur somme est $z-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y$, dont le quarré étant égale à la plus grande Puissance $2xz-xx+yy$, on trouuera $z\backsim\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}y+\sqrt{xx+3xy+yy}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $xx+3xy+yy$, pour le côté duquel prenant $x-\frac{ay}{b}$, on trouuera

$$x\backsim aa-bb.$$

$$y\backsim 2ab+3bb.$$

$$z\backsim\frac{5}{2}aa+6ab+4bb.$$

Seizieme Solution. & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+2ab+2bb,\ aa-2ab-4bb}{\frac{5}{2}aa+6ab+4bb}.$$

Si l'on suppose

$$a\backsim 4.$$

$$b\backsim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{13,\ 2}{34}.$$

& si l'on suppose

$$a\backsim 5.$$

$$b\backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{74,\ 22}{193}.$$

Pour auoir vne solution plus generale, égalez la premiere Puissance $2xz-xx+yy$, au quarré $yy+\frac{2axy}{b}+\frac{aaxx}{bb}$, pour auoir $z\backsim\frac{aax+bbx+2aby}{2bb}$, & la deuxieme $2yz+xx-yy$, au quarré $xx+\frac{2cxy}{d}+\frac{ccyy}{dd}$, pour auoir le même $z\backsim\frac{ccy+ddy+2cdx}{2dd}$, & par consequent cette Equation, $\frac{aax+bbx+2aby}{2bb}\backsim\frac{ccy+ddy+2cdx}{2dd}$, dans laquelle on trouuera $z\backsim\frac{aacc+aadd+bbcc+bbdd-4abcd}{2}$, parceque l'on trouuera

$$x\backsim bbcc-2abdd+bbdd.$$

$$y\backsim aadd-2bbcd+bbdd$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Dixseptieme Solution.

$$\frac{2bbcc+4bbdd+2aadd-4abdd-4bbcd,\ 2bbcc-2aadd-4abdd+4bbcd}{aacc+bbcc+aadd+bbdd-4abcd}.$$

qui sont autant generaux qu'ils le peuuent être.

Si l'on suppose

$a \backsim 1.$

$b \backsim 2.$

$c \backsim 3.$

$d \backsim 5.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{41,31}{29}.$$

IX.

Trouuer deux Nombres, dont la somme étant ajoutée & la difference étant ôtée de leur produit, il vienne deux Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

dont le produit xy étant augmenté de leur somme $x+y$, & étant diminué de leur difference $x-y$, la somme $xy+lx+ly$, & la difference $xy-lx+ly$, soient chacune vn Nombre quarré.

La Moitié de la difference de deux quarrez indeterminez est le plus grand des deux Nombres qu'on cherche : & pour auoir le plus petit, on diuisera la somme des deux quarrez indeterminez par leur difference augmentée de deux Vnitez. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$xy+lx+ly.$

$xy-lx+ly.$

Egalez la premiere $xy+lx+ly$ au quarré aa, pour auoir $xy \backsim aa-lx-ly$, & la deuxieme $xy-lx+ly$, au quarré bb, pour auoir le même $xy \backsim bb+lx-ly$, & par conséquent cette Equation, $aa-lx-ly \backsim bb+lx-ly$, dans laquelle on trouuera $lx \backsim \frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}bb$, & au lieu de $xy \backsim aa-lx-ly$, ou de $xy \backsim bb+lx-ly$, on aura xy, ou $\frac{1}{2}aay-\frac{1}{2}bby \backsim \frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}bb-ly$, dans laquelle on trouuera $y \backsim \frac{aa+bb}{aa-bb+2ll}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^4-2aabb+b^4+2llaa-2llbb,\ 2llaa+2llbb}{2aa-2bb+2ll}.$$

Si l'on suppose

$a \backsim 2.$

$b \backsim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,2}{2}.$$

& si l'on suppose

$a \backsim 3.$

$b \backsim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

4.

1.

Ou bien la difference de ces deux Puissances est $2lx$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$2x$.

l.

La Moitié de leur somme est $x + \frac{1}{2}l$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xy + lx + ly$, on trouuera $y \sim \frac{4xx + ll}{4x + 4l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{4xx + 4lx,\ 4xx + ll}{4x + 4l}.$$

Si l'on suppos

$x \sim 1$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{8,\ 5}{8}.$$

& si l'on suppose

$x \sim 2$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{24,\ 17}{12}.$$

On tire de cette seconde Solution, le Canon suiuant,

Canon. Le plus grand des deux nombres qu'on cherche, peut être tel Nombre que l'on voudra, pourvûqu'il soit plus grand que le quart de l'Vnité: & pour auoir le plus petit, on ajoutera le quart de l'Vnité au quarré du plus grand, & on diuisera la somme par le plus grand augmenté de l'Vnité.

Ou bien les deux Nombres produisans de la difference $2lx$ des deux Puissances precedentes, sont tels,

x.

$2l$.

La Moitié de leur somme est $\frac{1}{2}x + l$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xy + lx + ly$, on trouuera $y \sim \frac{xx + 4ll}{4x + 4l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Troisiéme Solution.

$$\frac{4xx + 4lx,\ xx + 4ll}{4x + 4l}.$$

Si l'on suppose

$x \sim 1$.

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{8,\ 5}{8}.$$

& si l'on suppose

$x \sim 3$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{48,\ 13}{16}.$$

On tire de cette troisieme solution, le Canon suiuant;

Le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, peut être tel nombre entier que l'on voudra, pourvûqu'il soit plus grand ou moindre que deux Unitez : & pour auoir le plus petit, on ajoutera l'Unité au quarré de la moitié du plus grand, & on diuisera la somme par le plus grand augmenté de l'Unité. Canon.

Mais pour auoir une solution plus generale, prenez

$$a.$$

$$\frac{2lx}{a}.$$

pour les deux Nombres produisans de la difference $2lx$.

La moitié de leur somme est $\frac{1}{2}a + \frac{lx}{a}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xy + lx + ly$, on trouuera $y \sim \frac{a^4 + 4llxx}{4aax + 4laa}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, Quatrieme Solution.

$$\frac{4aaxx + 4laax,\ a^4 + 4llxx}{4aax + 4laa}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 1.$$

$$x \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{8,\ 5}{8}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 3.$$

$$x \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{432,\ 117}{144}.$$

Mais si l'on suppose

$$a \sim 3.$$

$$x \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{216,\ 97}{108}.$$

Ou bien prenez

$$2a.$$

$$\frac{lx}{a}.$$

pour les deux Nombres produisans de la difference $2lx$.

La moitié de leur somme est $a + \frac{lx}{2a}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xy + lx + ly$, on trouuera

cinquieme Solution.

$y \sim \frac{4a^4 + llxx}{4aax + 4laa}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels, $\frac{4aaxx + 4laax,\ 4a^4 + llxx}{4aax + 4laa}$.

Si l'on suppose

$a \sim 1$.

$x \sim 1$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{8,\ 5}{8}$.

& si l'on suppose

$a \sim 1$.

$x \sim 2$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{6,\ 2}{3}$.

Mais si l'on suppose

$a \sim 1$.

$x \sim 3$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{48,\ 13}{16}$.

& si l'on suppose

$a \sim 2$.

$x \sim 3$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{192,\ 73}{64}$.

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'Vnité, mettez

$\frac{x,\ y}{z}$.

pour les deux Nombres qu'on cherche, & alors on aura en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$xy + xz + yz$.

$xy - xz + yz$.

Leur difference est $2xz$, qui a ces deux Nombres produisans,

$2x$.

z.

La Moitié de leur somme est $x + \frac{1}{2}z$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xy + xz + yz$, on trouvera $z \sim 2y + 2\sqrt{yy + xy - xx}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $yy + xy - xx$, pour le côté duquel prenant $y \cdots \frac{ax}{b}$, on trouvera en entiers,

$x \sim 2ab + bb$.

$y \sim aa + bb$.

$z \sim 4aa + 2ab$.

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2ab+bb,\ aa+bb}{4aa+2ab}.$$

Si l'on suppose Sixieme Solution.

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{8,\ 5}{8}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$
$$b \backsim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{16,\ 13}{48}.$$

Ou bien les deux nombres produisans de la difference precedente $2xz$, sont tels,

$$x.$$
$$2z.$$

La moitié de leur somme est $\frac{1}{2}x+z$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xy+xz+yz$, on trouuera $z \backsim \frac{1}{2}y + \sqrt{\frac{1}{4}yy+xy-\frac{1}{4}xx}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré $\frac{1}{4}yy+xy-\frac{1}{4}xx$, ou $yy+4xy-xx$, pour le côté duquel prenant $y \cdots \frac{ax}{b}$, on trouuera en entiers,

$$x \backsim 2ab+4bb.$$
$$y \backsim aa+bb.$$
$$z \backsim aa+2ab.$$

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2ab+4bb,\ aa+bb}{aa+2ab}.$$

Si l'on suppose Settieme Solution.

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$4.$$
$$1.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$
$$b \backsim 2.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{28,\ 13}{21}.$$

Mais si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{8,\ 5}{8}.$$

Pour auoir vne Solution plus generale, prenez

$$\frac{ax}{b}.$$
$$\frac{2bz}{a}.$$

pour les deux Nombres produisans de la difference $2xz$.

La Moitié de leur somme est $\frac{ax}{2b}+\frac{bz}{a}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xy+xz+yz$, on trouuera $y \backsim \frac{a^4xx+4b^4zz}{4aabbx+4aabbz}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Huitieme Solution.

$$\frac{4aabbxx+4aabbxz,\ a^4xx+4b^4zz}{4aabbxz+4aabbzz}.$$

Si l'on suppose

$a \backsim 2$.
$b \backsim 1$.
$x \backsim 1$.
$z \backsim 3$.

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{16,\ 13}{48}.$$

Ou bien prenez

$$\frac{2ax}{b}.$$
$$\frac{bz}{a}.$$

pour les deux nombres produisans de la difference $2xz$.

La Moitié de leur somme est $\frac{ax}{b}+\frac{bz}{2a}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xy+xz+yz$, on trouuera $y \backsim \frac{4a^4xx+b^4zz}{4aabbx+4aabbz}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Neuvieme Solution.

$$\frac{4aabbxx+4aabbxz,\ 4a^4xx+b^4zz}{4aabbxz+4aabbzz}.$$

Si l'on suppose

$a \backsim 1$.
$b \backsim 1$. ou $b \backsim 2$.
$x \backsim 1$.
$z \backsim 1$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{8,\ 5}{8}.$$

& si l'on suppose

$a \backsim 2$.
$b \backsim 3$.
$x \backsim 1$.
$z \backsim 1$.

les

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{288,\ 145}{288}.$$

Ou bien encore, égalez la premiere Puissance $xy+xz+yz$ au quarré aa, pour auoir $xy \backsim aa-xz-yz$, & la deuxieme $xy-xz+yz$ au quarré bb, pour auoir le même $xy \backsim bb+xz-yz$, & par consequent cette Equation, $aa-xz-yz \backsim bb+xz-yz$, dans laquelle on trouuera $z \backsim \frac{aa+bb}{2x}$: & au lieu de $xy \backsim bb+xz-yz$, ou de $xy \backsim aa-xz-yz$, on aura $xy \backsim \frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}bb-\frac{aay+bby}{2x}$, & dans cette Equation, l'on trouuera $y \backsim \frac{aax+bbx}{2xx+aa-bb}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4x^4+2aaxx-2bbxx,\ 2aaxx+2bbxx}{a^4-2aabb+b^4+2aaxx-2bbxx}.$$ Dixieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$
$$x \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{88,\ 40}{33}.$$

Pour auoir d'autres Solutions, mettez

$$\frac{x+y,\ x-y}{z}.$$

pour les deux Nombres qu'on cherche, & alors vous aurez, en entiers, ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx-yy+2xz.$$
$$xx-yy-2yz.$$

Egalez la deuxieme $xx-yy-2yz$ au quarré $xx-2xy+yy$, pour auoir $z \backsim x-y$, & au lieu de la premiere $xx-yy+2xz$ vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $3xx-2xy-yy$. Pour cette fin, supposez

$$x \backsim \omega+y.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $3\omega\omega+4y\omega$, pour le côté duquel prenant $\frac{a\omega}{b}$, on trouuera

$$\omega \backsim 4bb.$$
$$y \backsim aa-3bb.$$
$$x \backsim aa+bb.$$
$$z \backsim 4bb.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa-bb,\ 2bb}{2bb}.$$ Onzieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{3, 2}{2}$.

& si l'on suppose

$a \sim 3$.

$b \sim 1$.

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

4.

1.

On tire de cette onzieme solution, le canon suiuant;

Canon. Si on diuise la difference de deux quarrez indeterminez par le double du plus petit, on aura le plus grand des deux nombres qu'on cherche: le plus petit étant égal à l'Vnité.

Si Vous voulez que chacun de ces deux nombres ainsy trouuez, soit Vn nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette Puissance $2aa - 2bb$. Pour cette fin, supposez

$b \sim r - a$.

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $4ar - 2rr$, pour le côté duquel prenant $\frac{cr}{d}$, on trouuera

$r \sim 4dd$.

$a \sim cc + 2dd$.

$b \sim cc - 2dd$.

Douzieme Solution. & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{4ccdd, \; c^4 - 4ccdd + 4d^4}{c^4 - 4ccdd + 4d^4}$.

qui ont leurs Racines quarrées,

$\frac{2cd, \; cc - 2dd}{cc - 2dd}$.

Si l'on suppose

$c \sim 1$.

$d \sim 1$.

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

4.

1.

& si l'on suppose

$c \sim 3$.

$d \sim 2$.

les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

144.

1.

Mais si l'on suppose

$c \backsim 7.$

$d \backsim 5.$

les deux quarrez qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$4900.$

$1.$

& si l'on suppose

$c \backsim 17.$

$d \backsim 12.$

les deux quarrez qu'on cherche, seront tels,

$166464.$

$1.$

& ainsy en suite on peut donner une infinité de solutions en nombres entiers, comme nous auons enseigné dans le Lemme, qui precede la Quest. XXV.

On tire de cette douzieme solution, le canon suiuant;

Si on diuise le double du produit de deux nombres indeterminez par la difference entre le quarré de l'un & le double du quarré de l'autre, on aura le côté du plus grand des deux quarrez qu'on cherche: le plus petit étant égal à l'Unité. Canon.

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la somme des deux nombres qu'on cherche, soit un nombre quarré, il faudra égaler au quarré cette Puissance, $2aa+2bb$. Pour cette fin, supposez

$a \backsim r+b.$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $4bb+4br+2rr$, pour le côté duquel prenant $2b \cdots \frac{cr}{d}$, on trouuera

$r \backsim 4cd+4dd.$

$b \backsim cc-2dd.$

$a \backsim cc+4cd+2dd.$

& les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4c^3d+12ccdd+8cd^3,\quad c^4-4ccdd+4d^4}{c^4-4ccdd+4d^4}.$$ Treizieme Solution.

Si l'on suppose

$c \backsim 1.$

$d \backsim 1.$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$24.$

$1.$

dont la somme 25, a sa Racine quarrée 5: & si l'on suppose

$c \backsim 3.$

$d \backsim 1.$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$840.$$

$$1.$$

dont la somme 841 a sa Racine quarée 29: Mais si l'on suppose

$$c \sim 7.$$

$$d \sim 5.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$28560.$$

$$1.$$

dont la somme 28561, a sa Racine quarée 169, & si l'on suppose

$$c \sim 17.$$

$$d \sim 12.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$970224.$$

$$1.$$

dont la somme 970225 a sa Racine quarée 985.

On tire de cette treizieme solution, le canon suivant, par le moyen duquel on pourra trouuer en entiers autant de Nombres que l'on voudra.

Canon. Le plus petit des deux Nombres qu'on cherche, est égal à l'Vnité, & le plus grand est égal au quadruple de l'aire d'Vn triangle rectangle, où la difference des deux côtez est égale à l'Vnité.

Si au lieu de cette condition, vous voulez que la difference des deux nombres qu'on cherche, soit Vn nombre quarré, seruez-vous de la 6.e solution, & égalez au quarré cette Puissance $4bb + 6ab - 4aa$, pour le côté duquel prenant $2b \cdots \frac{ac}{d}$, on trouuera en entiers,

$$a \sim 4cd + 6dd.$$

$$b \sim cc + 4dd.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

Quatorzieme Solution. $$\frac{c^4 + 8c^3d + 20ccdd + 32cd^3 + 64d^4,\ c^4 + 24ccdd + 48cd^3 + 52d^4}{192d^4 + 224cd^3 + 76ccdd + 8c^3d}.$$

Si l'on suppose

$$c \sim 2.$$

$$d \sim 1.$$

les deux nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{72,\ 65}{252}.$$

dont la difference $\frac{1}{36}$, a sa Racine quarée $\frac{1}{6}$.

Ou bien il faudra égaler au quarré ces deux Puissances,

$2ab - aa.$

$2ab + 4aa.$

Egalez la premiere $2ab - aa$, au quarré $\frac{aacc}{dd}$, pour auoir

$a \sim 2dd.$

$b \sim cc + dd.$

& au lieu de la seconde $2ab + 4aa$, vous aurez en moindres termes, celle-cy à égaler au quarré $cc + 5dd$, pour le côté duquel prenant $c \ldots \frac{dm}{n}$, on trouuera en entiers,

$c \sim mm - 5nn.$

$d \sim 2mn.$

$a \sim 8mmnn.$

$b \sim m^4 - 6mmnn + 25n^4.$

C'est pourquoy si l'on suppose

$m \sim 3.$

$n \sim 1.$

on trouuera

$c \sim 4.$

$d \sim 6.$

$a \sim 72.$

$b \sim 52.$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{637, 493}{1764}.$

dont la difference $\frac{4}{49}$ a sa Racine quarrée $\frac{2}{7}$.

X.

Trouuer deux Nombres, dont la somme étant ôtée, & la difference étant ajoutée à leur produit, il vienne deux Nombres quarrez.

On propose de trouuer deux Nombres

$x.$

$y.$

dont la somme $x + y$, étant otée, & la difference $x - y$, étant ajoutée à leur produit xy, le reste $xy - 1x - 1y$, & la somme $xy + 1x - 1y$, soient des Nombres quarrez.

Le plus grand des deux Nombres qu'on cherche, peut être tel nombre qu'on voudra, pourueu qu'il soit plus grand que deux Vnitez, & on aura le plus petit en ajoutant l'Vnité au quarré de la Moitié du plus grand, & en diuisant la somme par l'excez du plus grand sur l'Vnité. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xy+lx-ly.$$
$$xy-lx-ly.$$

Leur difference est $2lx$, laquelle a ces deux Nombres produisans,

$$x.$$
$$2l.$$

La Moitié de leur somme est $\frac{1}{2}x+l$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xy+lx-ly$, on trouuera $y \sim \frac{xx+4ll}{4x-4l}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4xx-4lx,\ xx+4ll}{4x-4l}.$$

Si l'on suppose

$$x \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{12,\ 5}{3}.$$

Pour auoir une Solution plus generale, prenez

$$\frac{2ax}{b}.$$
$$\frac{lb}{a}.$$

pour les deux Nombres produisans de la difference $2lx$.

La Moitié de leur somme est [illegible] $+\frac{lb}{2a}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $xy+lx-ly$, on trouuera $y \sim \frac{4a^4xx+llb^4}{4aabbx-4laabb}$, & les deux nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{4aabbxx-4laabbx,\ 4a^4xx+llb^4}{4aabbx-4laabb}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim \frac{1}{2}.$$
$$b \sim 1.$$
$$x \sim 3.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{24,\ 13}{8}.$$

& Si l'on suppose

$$a \sim \frac{1}{2}.$$
$$b \sim 1.$$
$$x \sim 4.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{12,\ 5}{3}.$$

Ou bien égalez la premiere Puissance $xy+lx-ly$ au quarré aa, pour auoir $xy \sim aa-lx+ly$, & la deuxieme $xy-lx-ly$ au quarré bb, pour auoir le même $xy \sim bb+lx+ly$, & par consequent

cette Equation, $aa - lx + ly \sim bb + lx + ly$, dans laquelle on trouvera $lx \sim \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb$, & au lieu de $xy \sim aa - lx + ly$, ou de $xy \sim bb + lx + ly$, on aura $\frac{aay - bby}{2l} \sim \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}bb + ly$, & dans cette Equation, l'on trouvera $y \sim \frac{aa+bb}{aa-bb-2ll}$, & les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{a^4 - 2aabb + b^4 - 2llaa + 2llbb,\ 2llaa + 2llbb}{2aa - 2bb - 4ll}.$$

Troisieme Solution.

Si l'on suppose

$$a \sim 3.$$
$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{12,\ 5}{3}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 4.$$
$$b \sim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{195,\ 34}{26}.$$

mais si l'on suppose

$$a \sim 4.$$
$$b \sim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

6.

2.

On tire de cette troisieme Solution, le Canon suivant;

La Moitié de la difference de deux quarrez indeterminez est le plus grand des deux Nombres qu'on cherche: & pour avoir le plus petit, on divisera la somme des deux mêmes quarrez par l'excez du plus grand sur deux Unitez. Canon.

XI.

Trouver deux Nombres, dont le produit étant ajouté & ôté de leur somme, & étant augmenté & diminué de leur difference, il vienne quatre Nombres quarrez.

On propose de trouver deux Nombres

$$x.$$
$$y.$$

dont le produit xy étant ajouté & ôté de leur somme $x+y$, & étant augmenté & diminué de leur difference $x-y$, les deux Sommes

$$xy + lx + ly.$$
$$xy + lx - ly.$$

& les deux restes :

$$lx+ly-xy.$$
$$xy+lx-ly.$$

Soient des Nombres quarez.

Canon. Si d'Un quarré indeterminé & du double d'Un autre quarré indeterminé, on forme Un triangle rectangle, & qu'on divise l'hypotenuse par le double du côté égal au double du produit des Nombres generateurs, on aura le plus grand des deux Nombres qu'on cherche : le plus petit étant égal à l'Unité.

Selon les conditions de la Question, on aura ces quatre Puissances à égaler au quarré,

$$lx+ly+xy.$$
$$lx+ly-xy.$$
$$xy-lx+ly.$$
$$xy+lx-ly.$$

Dans la 11.e Solution de la 9.e de ces Questions ajoutées on a trouvé ces deux Nombres,

$$\frac{aa-bb,\ 2bb}{2bb}.$$

qui rendent quarrées les trois premieres Puissances : c'est pourquoy pour rendre quarrée la derniere $xy+lx-ly$, il n'y aura plus qu'à égaler au quarré cette Puissance, $aa-2bb$, pour le côté duquel prenant $a - \frac{bc}{d}$, on trouvera en entiers,

$$a \backsim cc+2dd.$$
$$b \backsim 2cd.$$

& les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^4+4d^4,\ 8ccdd}{8ccdd}.$$

Si l'on suppose

$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 2.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{65,\ 32}{32}.$$

& si l'on suppose

$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 1.$$

les deux Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{5,\ 8}{8}.$$

Par le canon que nous donné aprez la 8.e Solution, de la de ces Questions ajoutées, on trouve ces deux Nombres,

$$\frac{a,\ b}{a}$$

qui

lesquels rendent quarrées la seconde Puissance $lx+ly+xy$, & la quatrieme $xy+lx-ly$: c'est pourquoy pour rendre quarrée la premiere $lx+ly+xy$, & la troisieme $xy-lx+ly$, il faudra égaler au quarré ces deux autres,

$$2ab+aa.$$
$$2ab-aa.$$

Leur difference est $2aa$, qui a ces deux Nombres produisans,

$$\frac{ac}{d}.$$
$$\frac{2ad}{c}.$$

La moitié de leur somme est $\frac{ac}{2d}+\frac{ad}{c}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $2ab+aa$, on trouvera

$$a \propto 8ccdd.$$
$$b \propto c^4+4d^4.$$

& l'on aura Une Solution semblable à la precedente.

XII.

Trouuer Vn nombre quarré, lequel étant ajouté & ôté de son côté, il vienne deux Nombres quarrez.

On propose de trouuer Vn Nombre quarré

$$xx.$$

lequel étant ajouté & ôté de son côté x, la somme $lx+xx$, & la difference $lx-xx$, soient des Nombres quarrez.

Si on diuise le double du produit sous deux Nombres indeterminez, dont l'Vn soit quarré, & l'autre double d'Vn quarré, par la somme des quarrez de ces deux mêmes Nombres, on aura le côté du quarré qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$lx+xx.$$
$$lx-xx.$$

Leur difference est $2xx$, qui a ces deux Nombres produisans,

$$\frac{ax}{b}.$$
$$\frac{2bx}{a}.$$

La moitié de leur somme est $\frac{ax}{2b}+\frac{bx}{a}$, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $lx+xx$, on trouuera $x \propto \frac{4aabb}{a^4+4b^4}$, & le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{16a^4b^4}{a^8+8a^4b^4+16b^8}.$$

Si l'on suppose

$$a \propto 1.$$
$$b \propto 1.$$

le quarré qu'on cherche, sera de cette grandeur;

$$\frac{16}{25}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 1.$$

$$b \sim 2.$$

le quarré qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{256}{4225}.$$

Par le moyen de cette Question, l'on resoud celle-cy;

Trouver un nombre, lequel étant ajouté & ôté de l'Unité, & son quarré étant aussy ôté de l'Unité, il vienne trois nombres quarrez.

parceque le côté du quarré que nous avons icy trouvé a ces trois conditions.

XIII.

Trouver un nombre quarré, auquel ajoutant & ôtant son côté, il vienne deux nombres quarrez.

On propose de trouver un nombre quarré

$$xx.$$

lequel étant augmenté & diminué de son côté x, la somme $xx+1x$, & le reste $xx-1x$, soient des nombres quarrez.

Canon Si par le quadruple de l'aire d'un triangle rectangle, on divise le quarré de l'hypotenuse du même triangle, on aura le côté du quarré qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura ces deux Puissances à égaler au quarré,

$$xx+1x.$$

$$xx-1x.$$

Egalez la premiere $xx+1x$ au quarré $xx-2ax+aa$, pour avoir $x \sim \frac{aa}{2a+1}$, & au lieu de la seconde $xx-1x$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $aa-2la-ll$, pour le côté duquel prenant $a-\frac{lb}{c}$, on trouvera $a \sim \frac{bb+cc}{2bc-2cc}$, & le côté du quarré qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{b4+2bbcc+c4}{4cb3-4bc3}.$$

Si l'on suppose

$$b \sim 2.$$

$$c \sim 1.$$

le nombre quarré qu'on cherche, sera de cette grandeur;

$$\frac{625}{576}.$$

dont le côté est $\frac{25}{24}$.

& si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$

$$b \backsim 2.$$

le Nombre quarré qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{28561}{14400}.$$

dont le côté est $\frac{169}{120}$, lequel étant augmenté & diminué de l'Vnité fera deux Nombres quarrez par la proprieté du triangle rectangle.

Ou bien égalez la premiere Puissance $xx+1x$, au quarré $\frac{aaxx}{bb}$, pour avoir $x \backsim \frac{bb}{aa-bb}$, & la deuxieme $xx-1x$, au quarré $\frac{ccxx}{dd}$, pour avoir le même $x \backsim \frac{dd}{dd-cc}$, & par consequent cette Equation, $\frac{bb}{aa-bb} \backsim \frac{dd}{dd-cc}$, dans laquelle on trouvera $\frac{bc}{d} \backsim \sqrt{2bb-aa}$. Ainsy on aura cette Puissance à égaler au quarré, $2bb-aa$. Pour cette fin, supposez

$$b \backsim z - a.$$

& alors vous aurez cette autre Puissance à égaler au quarré, $2zz-4az+aa$, pour le côté duquel prenant $a-\frac{mz}{n}$, on trouvera

$$a \backsim mm-2nn.$$

$$b \backsim mm-2mn+2nn.$$

$$z \backsim 2mn-4nn.$$

& le côté du quarré qu'on cherche, sera tel,

$$\frac{m^4-4m^3n+8mmnn-8mn^3+4n^4}{4m^3n-12mmnn+8mn^3}.$$

Si l'on suppose — Seconde Solution.

$$m \backsim 3.$$

$$n \backsim 1.$$

le Nombre quarré qu'on cherche, sera de cette grandeur,

$$\frac{625}{576}.$$

dont le côté est $\frac{25}{24}$.

Question XXXIII.

Trouver trois Nombres, dont chacun étant ajouté au quarré de son precedent, il vienne trois Nombres quarrez. Voyez 17. 4.

On propose de trouver trois Nombres

$$x.$$

$$y.$$

$$z.$$

en sorte que si on ajoute le second y, au quarré xx, du premier, le troisieme z au quarré yy, du second, & le premier x au quarré zz, du troisieme, les trois sommes

$$xx+ly.$$
$$yy+lz.$$
$$zz+lx.$$

Soient chacune Vn Nombre quarré.

Canon. Si d'Vn quaré indeterminé on ôte l'Vnité, & qu'on diuise le quart du reste par la somme de deux Vnitez & du côté du quaré indeterminé, on aura le premier des trois Nombres qu'on cherche, lequel étant ajouté separément au quart & à la moitié de l'Vnité, on aura les deux autres.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Puissances à égaler au quaré,

$$xx+ly.$$
$$yy+lz.$$
$$zz+lx.$$

Metode de Diophante. Egalez la premiere $xx+ly$ au quaré $xx-2xy+yy$, pour auoir $y \backsim 2x+l$, & la troisieme $zz+lx$ au quaré $zz-2xz+xx$, pour auoir $x \backsim 2z+l$, & par consequent $y \backsim 4z+3l$, comme dans Diophante, & au lieu de la seconde $yy+lz$, on aura celle-cy à égaler au quaré, $16zz+25lz+9ll$, pour le côté duquel prenant $4z \cdots a$, on trouuera $z \backsim \frac{aa-9ll}{8a+25l}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2aa+8la+7ll,\ 4aa+24la+39ll,\ aa-9ll}{8a+25l}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 4.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{71,\ 199,\ 7}{57}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 5.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{97,\ 259,\ 16}{65}.$$

Mais si l'on suppose

$$a \backsim 6.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{127,\ 327,\ 27}{73}.$$

On peut donner Vne solution plus generale, sans s'éloigner de la Metode de Diophante, si au lieu de prendre $4z \cdots a$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance precedente $16zz+25lz+9ll$, on prend $4z \cdots \frac{ac}{b}$, car alors on trouuera $z \backsim \frac{aacc-9llbb}{8ab+25bb}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{2aacc+8labc+7llbb,\ 4aacc+24labc+39llbb,\ aacc-9llbb}{8abc+25lbb}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 7.$$
$$b \sim 1.$$
$$c \sim 1.$$

les trois nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{16,\ 403,\ 40}{81}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 4.$$
$$b \sim 1.$$
$$c \sim 2.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{199,\ 743,\ 55}{89}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 4.$$
$$b \sim 2.$$
$$c \sim 2.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{263,\ 679,\ 28}{228}.$$

Ou bien en prenant $\frac{az}{b} \cdots 3l$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la même Puissance $16zz + 25lz + 9ll$, & alors on trouuera $z \sim \frac{6ab + 25bb}{aa - 16bb}$, & les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront tels, Troisieme Solution.

$$\frac{aa + 12ab + 34bb,\ 3aa + 24ab + 52bb,\ 6ab + 25bb}{aa - 16bb}.$$

Si l'on suppose

$$a \sim 2.$$
$$b \sim \frac{1}{4}.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{97,\ 218,\ 224}{24}.$$

& si l'on suppose

$$a \sim 5.$$
$$b \sim 1.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{119,\ 247,\ 55}{9}.$$

On peut rendre la Metode de Diophante encore plus generale, sauoir en égalant la premiere Puissance $xx + ly$, au quarré $xx - \frac{2axy}{b} + \frac{aayy}{bb}$, pour auoir $y \sim \frac{2abx + lbb}{aa}$, & la troisieme $zz + lx$ au quarré $zz - \frac{2cxz}{d} + \frac{ccxx}{dd}$, pour auoir $x \sim \frac{2cdz + ldd}{cc}$, & par consequent $y \sim \frac{4abcdz + 2labdd + lbbcc}{aacc}$, & au lieu de la seconde Puissance $yy + lz$, on aura en entiers celle-cy

à égaler au quarré, $llb^4c^4 + 4llab^3ccdd + 4llaabbd^4 + 8ladb^3c^3z + 16lcaaddb^3z + 16aabbccddzz + l^4a^4c^4z$, pour le côté duquel prenant $llbbcc + 2labdd + \frac{mnpqrz}{s}$, on trouuera $z \backsim$

$$\frac{2bbccmnpqrs + 4abddmnpqrs + 8adb^3c^3ss + 16caaddb^3ss + a^4c^4ss}{mmnnppqqrr - 16aabbccddss}.$$

& les trois Nombres qu'on cherche se trouueront exprimez par trois fractions, où le denominateur commun sera le même que le precedent, & les trois Numerateurs seront tels,

Quatrieme Solution. $4bbccmnpqrs + 8abddmnpqrs + 16adb^3c^3ss + 32caaddb^3ss + 2a^4c^4ss + mmnnppqqrr - 16aabbccddss$.

$8bbccmnpqrs + 16abddmnpqrs + 32adb^3c^3ss + 64caaddb^3ss + 4a^4c^4ss + 3mmnnppqqrr - 48aabbccddss$.

$2bbccmnpqrs + 4abddmnpqrs + 8adb^3c^3ss + 16caaddb^3ss + a^4c^4ss$.

Si l'on suppose

$a \backsim 1$.
$b \backsim 1$.
$c \backsim 1$.
$d \backsim 1$.
$m \backsim 1$.
$n \backsim 1$.
$p \backsim 1$.
$q \backsim 1$.
$r \backsim 5$.
$s \backsim 1$.

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur, $\frac{129, 247, 65}{9}$.

Si au lieu de prendre pour côté, $llbbcc + 2labdd \ldots \frac{mnpqrz}{s}$, on prend le côté $4abcdz \ldots \frac{lmnpqr}{s}$, comme Diophante, on trouuera $z \backsim \frac{mmnnppqqrr - b^4c^4ss - 4ab^3ccddss - 4aabbd^4ss}{8adb^3c^3ss + 16caaddb^3ss + a^4c^4ss + 8abcdmnpqrs}$, & les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront exprimez par trois fractions, où le denominateur commun sera le même que le precedent, & les trois Numerateurs seront tels,

Cinquieme Solution. $2mmnnppqqrr - 2b^4c^4ss - 8ab^3c^3ddss - 8aabbd^4ss + 8adb^3c^3ss + 16aacddb^3ss + a^4c^4ss + 8abcdmnpqrs$.

$4mmnnppqqrr - 4b^4c^4ss - 16ab^3ccddss - 16aabbd^4ss + 24adb^3c^3ss + 48caaddb^3ss + 3a^4c^4ss + 24abcdmnpqrs$.

$mmnnppqqrr - b^4c^4ss - 4ab^3ccddss - 4aabbd^4ss$.

Si l'on suppose

$a \backsim 1$.

$b \sim 1.$

$c \sim 1.$

$d \sim 1.$

$m \sim 1.$

$n \sim 1.$

$p \sim 1.$

$q \sim 1.$

$r \sim 4.$

$s \sim 1.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{22,199,7}{57}.$$

Cette Question se peut encore resoudre en cette sorte. Egalez la premiere Puissance $xx+ly$, au quarré $xx+2ax+aa$, pour auoir $ly \sim aa+2ax$, & la troisieme $zz+lx$, au quarré $zz+2bz+bb$, pour auoir $lx \sim bb+2bz$, & par consequent $lly \sim laa+2abb+4abz$; & au lieu de la seconde Puissance $yy+lz$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $lla^4+4la^3bb+4aab^4+8la^3bz+16aab^3z+16aabbzz+l^5z$, pour le côté duquel prenant $laa+2abb+4abz-cdm$, on trouuera $z \sim \frac{ccddmm-2laacdm-4abbcdm}{8abcdm+l^5}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{8ab^3cdm+l^5bb+2bccddmm-4laabcdm-8ab^3cdm}{8abcdm+l^5}.$$ Sixieme Solution.

$$\frac{8la^3bcdm+l^5aa+16aab^3cdm+2l^5abb+4abccddmm-8la^3bcdm-16aab^3cdm}{8abcdm+l^5}.$$

$$\frac{ccddmm-2laacdm-4abbcdm}{8abcdm+l^5}.$$

Si l'on suppose

$a \sim 1.$

$b \sim 1.$

$c \sim 2.$

$d \sim 4.$

$m \sim 1.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{27,259,16}{65}.$$

Ou bien aprez auoir égalé la premiere Puissance $xx+ly$, au quarré $xx+2ax+aa$, pour auoir $ly \sim aa+2ax$, au lieu de la seconde $yy+lz$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $a^4+4a^3x+4aaxx+l^3z$, pour le côté duquel prenant $aa+2ax+bc$, on trouuera $z \sim bbcc+2aabc+4abcx$, & au lieu de la troisieme Puissance $zz+lx$, on aura celle-cy à égaler au quarré, b^4c^4

$+4aab^3c^3+4a^4bbcc+8ab^3c^3x+16a^3bbccx+16aabbccxx+l7x$, pour le côté duquel prenant $bbcc+2aabc+4abcx..dmnpq$, on trouvera $x \sim \frac{ddmmnnpp-2bbccdmnp-4aabcdmnp}{8abcdmnp+l7}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

Settieme Solution.

$$\frac{ddmmnnpp-2bbccdmnp-4aabcdmnp}{8abcdmnp+l7}.$$

$$\frac{2addmmnnpp-4abbdccmnp+l7aa}{8abcdmnp+l7}.$$

$$\frac{4abcddmmnnpp+2l7aabc+l7bbcc}{8abcdmnp+l7}.$$

Si l'on suppose

$a \sim 1.$
$b \sim 1.$
$c \sim 1.$
$d \sim 2.$
$m \sim 1.$
$n \sim 1.$
$p \sim 4.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{16,\ 97,\ 259}{65}.$$

Le Canon precedent a été tiré de la metode suivante, par laquelle on peut donner aux trois Nombres qu'on cherche, la proportion arithmetique, savoir en mettant

$x.$
$x+a.$
$x+2a.$

pour ces trois Nombres, afinqu'ils soient dans une proportion arithmetique, & alors on aura selon les conditions de la Question, ces trois Puissances à égaler au quarré,

$xx+lx+la.$
$xx+2ax+aa+lx+2la.$
$xx+4ax+4aa+lx.$

La difference des deux premieres est $2ax+aa+la$, dont les deux Nombres produisans sont tels,

$a.$
$2x+a+l.$

La Moitié de leur difference est $x+\frac{1}{2}l$, dont le quarré étant égalé à la plus petite Puissance $xx+lx+la$, on trouvera $a \sim \frac{1}{4}l$, & au lieu de la troisieme Puissance $xx+4ax+4aa+lx$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $4xx+8lx+ll$, pour le côté duquel

duquel prenant $2x - b$, on trouuera $x \backsim \frac{bb-ll}{4b+8l}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bb-ll,\ bb+lb+ll,\ bb+2lb+3ll}{4b+8l}.$$ *Huitieme Solution.*

Si l'on suppose

$$b \backsim 2.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,\ 7,\ 11}{16}.$$

& si l'on suppose

$$b \backsim 3.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{8,\ 13,\ 18}{20}.$$

Mais si l'on suppose

$$b \backsim \frac{3}{2}.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{5,\ 19,\ 33}{56}.$$

On aura vne solution plus generale, si au lieu de prendre $2x - b$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance precedente $4xx + 8lx + ll$, car on trouuera $x \backsim \frac{bb-cc}{4bc+8cc}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{bb-cc,\ bb+bc+cc,\ bb+2bc+3cc}{4bc+8cc}.$$ *Neuuieme Solution.*

Si l'on suppose

$$b \backsim 2.$$

$$c \backsim 1.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3,\ 7,\ 11}{16}.$$

& si l'on suppose

$$b \backsim 3.$$

$$c \backsim 1.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{8,\ 13,\ 18}{20}.$$

Mais si l'on suppose

$$b \backsim 3.$$

$$c \backsim 2.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{5,\ 19,\ 33}{56}.$$

Ou bien si l'on prend $l - \frac{2bx}{c}$, pour le côté du même quarré, car on trouuera $x \backsim \frac{bc+2cc}{bb-cc}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4bc+8cc,\ bb+4bc+7cc,\ 2bb+4bc+6cc}{4bb-4cc}.$$ *Dixieme Solution.*

Si l'on suppose

$b \sim 2.$

$c \sim 1.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{16, 19, 22}{12}.$

& si l'on suppose

$b \sim 3.$

$c \sim 2.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{56, 61, 66}{20}.$

Mais si l'on suppose

$b \sim 8.$

$c \sim 1.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{5, 7, 9}{[illegible]}.$

On peut donner aux trois Nombres qu'on cherche, telle proportion que l'on voudra: comme si on leur veut donner la raison des trois Nombres donnez,

$1 \sim a.$

$2 \sim b.$

$3 \sim c.$

on mettra

$\frac{a, b, c}{x}.$

pour les trois Nombres qu'on cherche, & alors on aura selon les conditions de la Question, ces trois Puissances en entiers, à égaler au quarré,

$aa + bx.$

$bb + cx.$

$cc + ax.$

Leur produit solide est $aabbcc + a^3bbx + b^3ccx + a^3cxx + c^3bxx + abcx^3$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel on prendra

$$abc + \frac{\left.\begin{matrix} aac^3 \\ + bba^3 \\ + ccb^3 \end{matrix}\right\} x}{2abc} \quad \frac{\left.\begin{matrix} -a^4c^6 \\ +2bbc^3a^5 \\ -b^4a^6 \\ +2aab^3c^3 \\ -c^4b^6 \\ +2cca^3b^5 \end{matrix}\right\} xx}{8a^3b^3c^3}$$

& la valeur de la quantité indeterminée x, se trouvera égale à une fraction, dont le Numerateur sera tel,

$16a^7b^7c^7 - 8a^9b^4c^8 - 8a^{10}b^6c^5 - 8a^5b^{10}c^6 - 8a^6b^5c^{10} - 8a^4b^8c^9 - 8a^8b^9c^4 + 8a^8bbc^{11} + 8a^{11}b^8cc + 8aab^{11}c^8.$

& le denominateur sera tel,

$a^8c^{12} + a^{12}b^8 + b^{12}c^8 + 4a^7b^5c^8 + 4a^8b^7c^5 + 4a^5b^8c^7 + 6a^{10}b^4c^6$
$+ 6a^4b^6c^{10} + 6a^6b^{10}c^4 - 4a^9bbc^9 - 4aab^9c^9 - 4a^9b^9cc - 4a^{11}b^6c^3 - 4a^6b^3c^{11}$
$- 4a^3b^{11}c^6.$

& les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront exprimez par trois fractions, dont le denominateur commun sera le Numerateur precedent, & dont les trois Numerateurs seront tels,

$a^9c^{12} + a^{13}b^8 + ab^{12}c^8 + 4a^8b^5c^8 + 4a^9b^75^5 + 4a^6b^8c^7 + 6a^{11}b^4c^6 +$
$6a^5b^6c^{10} + 6a^7b^{10}c^4 - 4a^{10}bbc^9 - 4a^3b^9c^9 - 4a^{10}b^9cc - 4a^{12}b^6c^3 - 4a^7b^3c^{11}$ Onzieme Solution.
$- 4a^4b^{11}c^6.$

$a^8bc^{12} + a^{12}b^9 + b^{13}c^8 + 4a^7b^6c^8 + 4a^8b^8c^5 + 4a^5b^9c^7 + 6a^{10}b^5c^6$
$+ 6a^4b^7c^{10} + 6a^6b^{11}c^4 - 4a^9b^3c^9 - 4aab^{10}c^9 - 4a^9b^{10}cc - 4a^{11}b^7c^3 + 4a^6b^4c^{11}$
$- 4a^3b^{12}c^6.$

$a^8c^{13} + a^{12}b^8c + b^{12}c^9 + 4a^7b^5c^9 + 4a^8b^7c^6 + 4a^5b^8c^8 + 6a^{10}b^4c^7$
$+ 6a^4b^6c^{11} + 6a^6b^{10}c^5 - 4a^9bbc^{10} - 4aab^9c^{10} - 4a^9b^9c^3 - 4a^{11}b^6c^4 -$
$4a^6b^{13}c^{12} - 4a^3b^{11}c^7.$

Ces trois Nombres ainsy trouuez satisfont à la Question, car le quarré du premier étant ajouté au second fait en entiers & en moindres termes le quarré suiuant;

$a^{10}c^{12} + b^8a^{14} + 9aab^{12}c^8 + 20a^7b^8c^7 - 4a^9b^5c^8 - 4a^{10}b^7c^5 - 12a^5b^{11}c^6$
$+ 6a^{12}b^4c^6 - 2a^6b^6c^{10} - 2a^8b^{10}c^4 - 12a^4b^9c^9 + 4a^8b^{13}c^{11} - 4a^{11}bbc^9 +$
$4a^{11}b^9cc - 4a^{13}b^6c^3.$

dont le coté est tel,

$2a^6bbc^3 \ldots 2a^3b^3c^5 \ldots 2a^4b^5cc + 3ab^6c^4 \ldots a^7b^4 \ldots a^5c^6.$

Le quarré du second étant ajouté au troisieme fait en entiers & en moindres termes, le quarré suiuant;

$a^{12}b^{10} + b^{14}c^8 + 9a^8bbc^{12} + 4a^{11}b^8c^3 + 4aab^{11}c^9 - 12a^6b^5c^{11} -$
$4a^3b^{13}c^6 - 2a^4b^8c^{10} + 20a^7b^7c^8 - 4a^8b^9c^5 - 4a^5b^{10}c^7 - 2a^{10}b^6c^6 -$
$12a^9b^4c^9 + 6a^6b^{12}c^4 - 4a^9b^{11}c^5.$

dont le côté est tel,

$a^6b^5 + b^7c^4 \ldots 3a^4bc^6 + 2aab^4c^5 + 2a^5b^3c^3 \ldots 2a^3b^6cc.$

Enfin le quarré du troisieme étant ajouté au premier, fait en entiers & en moindres termes, le quarré suiuant,

$b^{12}c^{10} + a^8c^{14} + 9a^{12}b^8cc + 4a^3b^{11}c^8 - 12a^{11}b^6c^5 - 4a^6b^3c^{13} -$
$4a^7b^5c^{10} + 20a^8b^7c^7 - 2a^6b^{10}c^6 - 4a^5b^8c^9 - 2a^{10}b^4c^8 + 6a^4b^6c^{12} -$
$12a^9b^9c^4 + 4a^9bbc^{11} - 4aab^9c^{11}.$

dont le côté est tel,

$b^6c^5 + a^4c^7 \ldots 3a^6b^4c + 2a^5bbc^4 + 2a^3b^5c^3 \ldots 2aab^3c^6.$

Parceque Nous auons supposé

$a \propto 1.$

$b \sim 2$.

$c \sim 3$.

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{1560001, 3120002, 4680003}{54966240}.$$

Question XXXIV.

Voyez 18. 4. Trouver trois Nombres, dont chacun étant ôté du quaré de son precedent, il reste trois Nombres quarez.

On propose de trouver trois Nombres

x.

y.

z.

dont le premier x, étant ôté du quaré zz, du troisieme, le second y, du quaré xx du premier, & le troisieme z du quaré yy du second, les trois differences

$zz - lx$.

$xx - ly$.

$yy - lz$.

soient chacun un Nombre quaré.

Canon. Si on ajoute le sextuple du produit de deux Nombres indeterminez au quaré du quintuple du second, & qu'on divise la somme par l'excez du quaré du quadruple du second sur le quaré du premier; on aura le troisieme des trois nombres qu'on cherche; & si de son double on ôte l'unité, on aura le premier, dont le double étant pareillement diminué de l'unité, on aura le second.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Puissances à égaler au quaré,

$xx - ly$.

$yy - lz$.

$zz - lx$.

Egalez la premiere $xx - ly$ au quaré $xx - 2xy + yy$, pour avoir $y \sim 2x - l$, & la troisieme $zz - lx$ au quaré $xx - 2xz + zz$ pour avoir $x \sim 2z - l$, & par consequent $y \sim 4z - 3l$, & au lieu de la seconde Puissance $yy - lz$, on aura celle-cy à égaler au quaré, $9ll - 25lz + 16zz$, pour le côté duquel prenant $3l + \frac{az}{b}$, on trouvera $z \sim \frac{6ab + 25bb}{16bb - aa}$, & les trois nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa + 12ab + 34bb, 3aa + 24ab + 52bb, 6ab + 25bb}{16bb - aa}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$

$$b \backsim 1.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{79, 151, 43}{7}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 4.$$

$$b \backsim 1.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{62, 112, 37}{12}.$$

Au lieu de prendre $3l + \frac{az}{b}$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance precedente $9ll - 25lz + 16zz$, on peut prendre $4z - \frac{la}{b}$, & alors on trouuera $z \backsim \frac{aa - 9bb}{8ab - 25bb}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels, Seconde Solution.

$$\frac{2aa - 8ab + 7bb,\ 4aa - 24ab + 39bb,\ aa - 9bb}{8ab - 25bb}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 5.$$

$$b \backsim 1.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{37, 19, 16}{15}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 7.$$

$$b \backsim 2.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{14, 16, 13}{12}.$$

Cette Metode n'est pas tout a fait la même que celle de Diophante, neanmoins elle decouure les Theoremes dont il s'est serui dans ses positions, pour rendre quarrées les deux premieres Puissances,

$$xx - ly.$$

$$yy - lz.$$

La difference qu'il y a, est qu'au lieu de mettre x, pour le premier des trois Nombres qu'on cherche, il met $x + l$. Si donc on met Metode de Diophante.

$$x + l.$$

$$y.$$

$$z.$$

pour les trois Nombres qu'on cherche, on aura selon les conditions de la Question, ces trois Puissances à égaler au quarré,

$$xx + 2lx + ll - ly.$$
$$yy - lz.$$
$$zz - lx - ll.$$

Egalez la premiere $xx + 2lx + ll - ly$ au quarré xx, pour avoir $y \backsim 2x + l$, & les deux dernieres se changeront en ces deux autres,

$$4xx - 4lx + ll - lz.$$
$$zz - lx - ll.$$

Egalez la premiere $4xx - 4lx + ll - lz$ au quarré $4xx$, pour avoir $x \backsim 4x + l$, comme Diophante, & au lieu de la derniere Puissance $zz - lx - ll$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $16xx + 7lx$, pour le côté duquel prenant $\frac{ax}{b}$, on trouvera $x \backsim \frac{7bb}{aa - 16bb}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

Troisieme Solution.

$$\frac{aa - 9bb,\ aa - 2bb,\ aa + 12bb}{aa - 16bb}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 5.$$
$$b \backsim 1.$$

Les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{16,\ 23,\ 37}{9}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 6.$$
$$b \backsim 1.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{27,\ 34,\ 48}{20}.$$

On tire de cette troisieme Solution, le Canon suivant,

Canon. Si de deux nombres indeterminez on divise l'excez du quarré du premier sur le triple du quarré du second, & l'excez du quarré du même premier sur le double du quarré du second, par l'excez du quarré du premier sur le quarré du quadruple du second, on aura les deux premiers des trois quarrez qu'on cherche: & pour avoir le troisieme, on ajoutera l'Unité au quadruple de la difference des deux premiers.

Au lieu de prendre $\frac{ax}{b}$, pour le côté du quarré qu'il faut égaler à la Puissance precedente $16xx + 7lx$, on peut prendre $4x - a$, & alors on trouvera $x \backsim \frac{aa}{8a + 7l}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

Quatrieme Solution.

$$\frac{aa + 8la + 7ll,\ 2aa + 8la + 7ll,\ 4aa + 8la + 7ll}{8a + 7l}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{16, 17, 29}{25}.$$

mais si l'on suppose

$$a \backsim 7.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{16, 23, 97}{9}.$$

On tire de cette quatrieme Solution, le Canon suiuant;

Si on diuise separément vn quarré indeterminé, son double, & son quadruple, par la somme de sept vnitez & de l'octuple du côté du quarré indeterminé, & qu'à chaque quotient on ajoute l'vnité, on aura les trois Nombres qu'on cherche. Canon.

Au lieu de mettre $x+l$, pour le premier des trois Nombres qu'on cherche, on doit mettre $x+a$, pour auoir vne solution plus generale, & alors on aura ces trois autres Puissances à égaler au quarré,

$$xx+2ax+aa-ly.$$
$$yy-lz.$$
$$zz-lx-la.$$

Egalez la premiere $xx+2ax+aa-ly$, au quarré xx, pour auoir $ly \backsim aa+2ax$, & au lieu de la seconde $yy-lz$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $a^4+4a^3x+4aaxx-l^3z$, pour le côté duquel prenant $2ax$, on trouuera $z \backsim a^4+4a^3x$, & au lieu de la troisieme $zz-lx-la$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $a^8+8a^7x+16a^6xx-l^7x-l^7a$, pour le côté duquel prenant $4a^3x-abcd$, on trouuera $x \backsim \frac{aabbccdd+l^7a-a^8}{8a^4bcd+8a^7-l^7}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aabbccdd+8a^5bcd+7a^8}{8a^4bcd+8a^7-l^7}.$$

$$\frac{2a^3bbccdd+l^7aa+6a^9+8a^6bcd}{8a^4bcd+8a^7-l^7}.$$ Cinquieme Solution.

$$\frac{4a^5bbccdd+3l^7a^4+4a^{11}+8a^8bcd}{8a^4bcd+8a^7-l^7}.$$

Si l'on suppose

$$d \backsim 3.$$
$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 2.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{5440, 11524, 51248}{2559}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$

$b \sim 1.$

$c \sim 1.$

$d \sim 1.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{2052,\ 3604,\ 10416}{1151}.$$

Ou bien égalez la premiere Puissance $xx+2ax+aa-ly$ au quarré $xx-2ax+aa$, pour auoir $ly \sim 4ax$, & la troisieme $zz-lx-la$ au quarré $zz-2bz+bb$, pour auoir $z \sim \frac{bb+la+lx}{2b}$, & au lieu de la seconde $yy-lz$ vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $16aaxx-\frac{l^3bb-l^4a-l^4x}{2b}$, pour le côté duquel prenant $4ax-lc$, on trouuera $x \sim \frac{2bcc+lla+llb}{16abc-l^3}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

Sixieme Solution.

$$\frac{16aabc+2lbcc+l^3b}{16abc-l^3}.$$

$$\frac{8abcc+4llaa+4llab}{16abc-l^3}.$$

$$\frac{16abbcc-l^4b+16llac+2l^3cc+l^5}{32abc-2l^3}.$$

Si l'on suppose

$a \sim 1.$

$b \sim 1.$

$c \sim 1.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{19,\ 16,\ 17}{15}.$$

& si l'on suppose

$a \sim 2.$

$b \sim 1.$

$c \sim 1.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{67,\ 40,\ 49}{31}.$$

Ou bien encore égalez la premiere Puissance $xx+2ax+aa-ly$, au quarré $xx+2ax+aa-2bx-2ab+bb$, dont le côté est $x+a-b$, pour auoir $x \sim \frac{1}{2}b+\frac{ly}{2b}-a$, & la seconde $yy-zz$ au quarré $yy-2yz+zz$ pour auoir $z \sim 2y-l$, & au lieu de la troisieme $zz-lx-la$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $4yy-4ly+ll-\frac{1}{2}lb-\frac{ly}{2b}$, pour le côté duquel prenant $2y-c$, on trouuera $y \sim \frac{lbb+2bcc-2llb}{8bc-8lb-ll}$, & les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront de cette grandeur,

Settieme Solution

$$\frac{4bbc-4lbb+lcc-l^3,\ lbb+2bcc-2llb,\ 2lbb+4llb+4bcc-8lbc+l^3}{8bc-8lb-ll}.$$

Si l'on suppose

$b \sim 2.$

$b \sim 2.$

$c \sim 3.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{40, 36, 41}{31}.$

& si l'on suppose

$b \sim 1.$

$c \sim 3.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{16, 17, 19}{15}.$

Pour n'être pas obligé d'emprunter l'Unité, mettez

$\frac{x, y, z}{\omega}.$

pour les trois Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, Vous aurez en entiers, ces trois Puissances à égaler au quarré,

$xx - y\omega.$

$yy - z\omega.$

$zz - x\omega.$

Egalez la premiere $xx - y\omega$, au quarré $xx - 2xy + yy$, pour avoir $y \sim 2x - \omega$, & la troisieme $zz - x\omega$ au quarré $zz - 2z\omega + \omega\omega$, pour avoir $\omega \sim 2z - x$, & par consequent $y \sim 3x - 2z$; & au lieu de la seconde $yy - z\omega$, vous aurez celle-cy à égaler au quarré, $9xx - 11xz + 2zz$, pour le côté duquel prenant $3x - \frac{az}{b}$, on trouvera

$z \sim 6ab - 11bb.$

$x \sim aa - 2bb.$

$y \sim 3aa - 12ab + 16bb.$

$\omega \sim 12ab - aa - 20bb.$

& les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{aa - 2bb,\ 3aa - 12ab + 16bb,\ 6ab - 11bb}{12ab - aa - 20bb}.$ Huitieme Solution.

Si l'on suppose

$a \sim 4.$

$b \sim 1.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$\frac{14, 16, 13}{12}.$

& si l'on suppose

$a \sim 5.$

$b \sim 2.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$\frac{17, 19, 16}{15}.$

On peut donner aux trois Nombres qu'on cherche, la raison

de trois Nombres donnez, comme vous avez vû dans la Question precedente, sans qu'il soit besoin d'en parler davantage.

Nous ajouterons icy la Question suivante;

Trouver trois Nombres, dont chacun étant diminué du quarré de son precedent, il reste trois Nombres quarrez.

On propose de trouver trois nombres

$$\frac{x,\ y,\ z}{\omega}.$$

en sorte que si du premier $\frac{x}{\omega}$ on ôte le quarré $\frac{zz}{\omega\omega}$ du troisieme, du second $\frac{y}{\omega}$ le quarré $\frac{xx}{\omega\omega}$ du premier, & du troisieme $\frac{z}{\omega}$ le quarré $\frac{yy}{\omega\omega}$, du second, les trois restes,

$$\frac{x}{\omega}-\frac{zz}{\omega\omega}.$$

$$\frac{y}{\omega}-\frac{xx}{\omega\omega}.$$

$$\frac{z}{\omega}-\frac{yy}{\omega\omega}.$$

soient des nombres quarrez.

Canon. Si de deux nombres indeterminez on multiplie la sixieme Puissance du premier par la huitieme du second, la douzieme du premier par la deuxieme du second, & la dixieme du premier par la quatrieme du second, & que l'on divise chaque produit par la somme des quatorziemes Puissances de deux nombres indeterminez; on aura les trois Nombres qu'on cherche.

Selon les conditions de la Question, on aura en entiers, ces trois Puissances à égaler au quarré,

$$x\omega-zz.$$

$$y\omega-xx.$$

$$z\omega-yy.$$

Si on égale la premiere $x\omega-zz$ au quarré aa, la deuxieme $y\omega-xx$ au quarré bb, & la troisieme $z\omega-yy$ au quarré cc, on aura ces trois Equations,

$$x\omega-zz \sim aa.$$

$$y\omega-xx \sim bb.$$

$$z\omega-yy \sim cc.$$

Dans la premiere $x\omega-zz\sim aa$, on trouvera $\omega\sim\frac{aa+zz}{x}$, & dans la seconde $y\omega-xx\sim bb$, on trouvera le même $\omega\sim\frac{bb+xx}{y}$. C'est pourquoy on aura cette Equation, $\frac{aa+zz}{x}\sim\frac{bb+xx}{y}$, dans

laquelle on trouvera $y = \frac{bbx+x^3}{aa+zz}$, & par consequent $yy = \frac{b^4xx+2bbx^4+x^6}{a^4+2aazz+z^4}$: & parceque dans la troisieme Equation $zw-yy = cc$, on trouve le Même $yy = zw-bb$, ou $yy = \frac{aaz+z^3-ccx}{x}$, à cause de $w = \frac{aa+zz}{x}$, on aura cette Equation $\frac{aaz+z^3-ccx}{x} = \frac{b^4xx+2bbx^4+x^6}{a^4+2aazz+z^4}$.

Pour rendre cette Equation plus simple, il en faut destruire les deux termes aaz, ccx, qui sont de differente affection, savoir en les égalant ensemble, par cette Equation, $aaz = ccx$, dans laquelle on trouvera $z = \frac{ccx}{aa}$, & l'Equation precedente $\frac{aaz+z^3-ccx}{x} = \frac{b^4xx+2bbx^4+x^6}{a^4+2aazz+z^4}$, se changera en celle-cy, $\frac{c^6xx}{a^6} = \frac{b^4xx+2bbx^4+x^6}{a^4+2aazz+z^4}$, dont la Racine quarrée donne celle-cy, $\frac{c^3x}{a^3} = \frac{bbx+x^3}{aa+zz}$, dans laquelle on trouvera $zz = \frac{a^3bb+a^3xx-aac^3}{c^3}$, & à cause de $z = \frac{ccx}{aa}$, & par consequent de $zz = \frac{c^4xx}{a^4}$, on aura cette Equation, $\frac{c^4xx}{a^4} = \frac{a^3bb+a^3xx-aac^3}{c^3}$, dans laquelle on trouvera $xx = \frac{a^6c^3-a^7bb}{a^7-c^7}$.

Pour abaisser cette fraction, faisons que le Numerateur $a^6c^3-a^7bb$ se puisse diviser par le denominateur a^7-c^7. Pour cette fin, faisons cette Equation, $\frac{a^6c^3}{a^7} = \frac{a^7bb}{c^7}$, dans laquelle on trouvera $b = \frac{c^5}{a^4}$, & au lieu de $xx = \frac{a^6c^3-a^7bb}{a^7-c^7}$, on aura $xx = \frac{c^3}{a}$, & par consequent $a = \frac{c^3}{xx}$. c'est pourquoy on trouvera

$$b = \frac{x^8}{c^7}.$$

$$z = \frac{x^5}{c^4}.$$

$$w = \frac{c^{14}+x^{14}}{c^8x^5}.$$

$$y = \frac{x^{21}+c^{14}x^7}{c^{20}+c^6x^{14}}, \text{ ou}$$

$$y = \frac{x^7}{c^6}.$$

& les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^8x^6,\ ccx^{12},\ c^4x^{10}}{c^{14}+x^{14}}.$$

Si l'on suppose

$$c = 1.$$

$$x = 2.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{64,\ 4096,\ 1024}{16385}.$$

Ou bien dans la premiere Equation, $xw-zz = aa$, ayant trouvé $w = \frac{aa+zz}{x}$, & dans la seconde $yw-xx = bb$, ayant trouvé le même $w = \frac{bb+xx}{y}$, & enfin dans la troisieme $zw-yy = cc$, ayant trouvé encore le même $w = \frac{cc+yy}{z}$, ces trois valeurs donneront les deux Equations suivantes,

$$\frac{aa+zz}{x} \sim \frac{bb+xx}{y}.$$

$$\frac{aa+zz}{x} \sim \frac{cc+yy}{z}.$$

Dans la premiere $\frac{aa+zz}{x} \sim \frac{bb+xx}{y}$, on trouuera $y \sim \frac{bbx+x^3}{aa+zz}$, & si l'on suppose $\frac{bbx}{aa} \sim \frac{x^3}{zz}$, on trouuera $z \sim \frac{ax}{b}$, & par consequent $y \sim \frac{bbx}{aa}$, & $yy \sim \frac{b^4xx}{a^4}$: & parceque dans la seconde Equation $\frac{aa+zz}{x} \sim \frac{cc+yy}{z}$, ou $\frac{aabb+aaxx}{bbx} \sim \frac{bcc+byy}{ax}$, à cause de $z \sim \frac{ax}{b}$, on trouue le même $yy \sim \frac{a^3bb+a^3xx-b^3cc}{b^3}$, on aura cette Equation $\frac{a^3bb+a^3xx-b^3cc}{b^3} \sim \frac{b^4xx}{a^4}$, dans laquelle on trouuera $xx \sim \frac{a^4b^3cc-a^7bb}{a^7-b^7}$, & l'on aura cette Puissance à égaler au quarré, $\frac{a^4b^3cc-a^7bb}{a^7-b^7}$, ou $\frac{bcc-a^3}{a^7-b^7}$. Abaissons cette fraction, par par cette Equation $\frac{bcc}{a^7} \sim \frac{a^3}{b^7}$, dans laquelle on trouuera $c \sim \frac{a^5}{b^4}$; & au lieu de la Puissance precedente $\frac{bcc-a^3}{a^7-b^7}$, on aura celle-cy à égaler au quarré, $\frac{a^3}{b^7}$, ou $\frac{a}{b}$: ce qui se fera, si a & b, sont des Nombres plans semblables. Si donc à la place de a, on met son quarré aa, & à la place de b, son quarré bb, on trouuera

$$c \sim \frac{a^{10}}{b^8}.$$

$$x \sim \frac{a^7}{b^5}.$$

$$y \sim \frac{a^3}{b}.$$

$$z \sim \frac{a^9}{b^7}.$$

$$\omega \sim \frac{a^{14}+b^{14}}{a^3b^9}.$$

& l'on aura vne solution semblable à la precédente.

Si vous voulez vne autre solution, égalez la premiere Puissance $x\omega-zz$ au quarré aa, pour auoir $\omega \sim \frac{aa+zz}{x}$, & les deux dernieres Puissances se changeront en ces deux autres,

$$aaxy+zzxy-x^4.$$

$$aaxz+xz^3-xxyy.$$

Égalez la premiere $aaxy+zzxy-x^4$ au quarré b^4, pour auoir $y \sim \frac{b^4+x^4}{aax+zzx}$. Diminuons le Nombre des termes de cette fraction, par cette Equation $\frac{b^4}{aax} \sim \frac{x^4}{zzx}$ dans laquelle on trouuera $a \sim \frac{bbz}{xx}$, & au lieu de $y \sim \frac{b^4+x^4}{aax+zzx}$, on aura $y \sim \frac{x^3}{zz}$.

Égalez la seconde $aaxz+xz^3-xxyy$ au quarré c^4, pour auoir $yy \sim \frac{aaxz+xz^3-c^4}{xx}$, & à cause de $a \sim \frac{bbz}{xx}$, vous aurez $yy \sim \frac{b^4z^3+x^4z^3-c^4x^3}{x^5}$. Diminuons pareillement le Nombre des termes de cette fraction par cette Equation, $x^4z^3 \sim c^4x^3$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{c^4}{z^3}$, & au lieu de $yy \sim \frac{b^4z^3+x^4z^3-c^4x^3}{x^5}$, on aura

$yy \sim \frac{b^4z^{18}}{c^{20}}$, & par consequent $y \sim \frac{bbz^9}{c^{10}}$: & parceque l'on a deja trouvé $y \sim \frac{x^3}{zz}$, on aura cette Equation $\frac{bbz^9}{c^{10}} \sim \frac{x^3}{zz}$, & l'on trouvera

$$b \sim \frac{c^{11}}{z^{10}}.$$

$$a \sim \frac{c^4}{z^3}.$$

$$y \sim \frac{c^{12}}{z^{11}}.$$

$$\omega \sim \frac{c^{28}+z^{28}}{c^4z^{23}}.$$

& les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{c^8z^{20},\ c^{16}z^{12},\ c^4z^{24}}{c^{28}+z^{28}}.$$

Seconde Solution.

Si l'on suppose

$$c \sim 1.$$

$$z \sim 2.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{1024,\ 4096,\ 16777216}{268435457}.$$

Ou bien égalez la premiere Puissance $x\omega - zz$ au quarré aa, pour avoir $x \sim \frac{aa+zz}{\omega}$, & la troisieme $z\omega - yy$ au quarré bb, pour avoir $\omega \sim \frac{bb+yy}{z}$, & par consequent $x \sim \frac{aaz+z^3}{bb+yy}$. Abaissons cette fraction par cette Equation, $\frac{aaz}{bb} \sim \frac{z^3}{yy}$, dans laquelle on trouvera $y \sim \frac{bz}{a}$, & par consequent $x \sim \frac{aaz}{bb}$, & $\omega \sim \frac{aabb+bbzz}{aaz}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{4b^{20}c^8,\ 4b^{26}cc,\ 4b^{24}c^4}{4b^{28}+c^{28}}.$$

Troisieme Solution.

Si l'on suppose

$$b \sim 2.$$

$$c \sim 1.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{4194304,\ 268435456,\ 67108864}{1073741825}.$$

La deuxieme Puissance $y\omega - xx$, que Nous avons omise, se changera en celle-cy, $\frac{b^3}{a} + \frac{b^3zz}{a^3} - \frac{a^4zz}{b^4}$, qu'il faudra Multiplier par le Nombre quarré a^4, pour avoir cette autre Puissance à égaler au quarré, $a^3b^3 + ab^3zz - \frac{a^8zz}{bb}$. Egalez auparavant le premier terme a^3b^3 au quarré $aabbcc$, pour avoir $a \sim \frac{cc}{b}$, & Vous aurez cette autre & derniere Puissance à égaler au quarré, $c^6 + bbcczz - \frac{c^{16}zz}{b^{12}}$, pour le côté duquel prenant $c^3 \ldots bcz$, on trouvera

$$z \sim \frac{2b^{13}}{c^{12}}.$$

$$y \sim \frac{2b^{15}}{c^{14}}.$$

$$x \sim \frac{2b^9}{c^8}$$

$$\omega \sim \frac{4b^{28}+c^{28}}{2b^{11}c^{16}}.$$

Comme les Numerateurs des trois Nombres trouuez, se trouuent dans toutes ces Solutions des Nombres quarrez, cela fait connoitre que pour resoudre facilement cette Question, on peut mettre

$$\frac{aa,\ bb,\ cc}{xy}.$$

pour les trois Nombres qu'on cherche, & alors on aura en entiers, ces trois Puissances à égaler au quarré,

$$bbxy - a^4.$$
$$ccxy - b^4.$$
$$aaxy - c^4.$$

Pour rendre quarrées les deux premieres

$$bbxy - a^4.$$
$$ccxy - b^4.$$

multipliez la premiere $bbxy - a^4$ par le quarré cc, & la deuxieme $ccxy - b^4$ par le quarré   pour auoir en leur place ces deux autres Puissances à égaler au quarré,

$$bbccxy - a^4cc.$$
$$bbccxy - b^6cc.$$

Leur difference est $b^6 - a^4cc$, dont les deux nombres produisans sont tels,

$$b^3 + aac.$$
$$b^3 - aac.$$

La Moitié de leur somme est b^3, dont le quarré étant égalé à la plus grande Puissance $bbccxy - a^4cc$, on trouuera $xy \propto \frac{b^6 + a^4cc}{bbcc}$, & au lieu de la troisieme Puissance $aaxy - c^4$, on aura en entiers celle-cy à égaler au quarré, $aab^6 + a^6cc - bbc^6$, pour le côté duquel prenant a^3c, on trouuera $a \propto \frac{c^3}{bb}$, & les trois nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{b^6c^8,\ b^{12}cc,\ b^{10}c^4}{b^{14} + c^{14}}.$$

Si l'on suppose

$$b \propto 1.$$
$$c \propto 2.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{256,\ 4,\ 16}{16385}.$$

Il est euident que cette derniere Solution indefinie est semblable à la premiere.

Question XXXV.

Trouuer trois Nombres, dont la somme étant ajoutée au quarré de chacun, il vienne trois Nombres quarrez. Voyez la Quest. XXIII.

On propose de trouuer trois Nombres

$$x.$$
$$y.$$
$$z.$$

dont la somme $x+y+z$ étant ajoutée au quarré de chacun, les trois sommes

$$xx+1x+1y+1z.$$
$$yy+1x+1y+1z.$$
$$zz+1x+1y+1z.$$

soient des Nombres quarrez.

Si on Multiplie separément les differences des deux côtez d'autant de triangles rectangles égaux qu'on demandera de Nombres, par la somme de toutes ces differences, & qu'on diuise chaque produit par le quadruple de l'aire commune à tous ces triangles rectangles, on aura les Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Puissances à égaler au quarré,

$$xx+1x+1y+1z.$$
$$yy+1x+1y+1z.$$
$$zz+1x+1y+1z.$$

Pour auoir un calcul plus aisé, supposez

$$x+y+z \sim \omega.$$

& alors vous aurez ces trois autres Puissances à égaler au quarré,

$$xx+1\omega.$$
$$yy+1\omega.$$
$$zz+1\omega.$$

Egalez la premiere $xx+1\omega$ au quarré $xx-2x\omega+\omega\omega$, la deuxieme $yy+1\omega$ au quarré $yy-2ay+aa$, & la troisieme $zz+1\omega$ au quarré $zz-2bz+bb$, pour auoir

$$x \sim \tfrac{1}{2}\omega-\tfrac{1}{2}1.$$
$$y \sim \frac{aa-1\omega}{2a}.$$
$$z \sim \frac{bb-1\omega}{2b}.$$

& au lieu de l'Equation supposée $x+y+z \sim \omega$, on aura

celle-cy, $\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}a - \frac{l\omega}{2a} + \frac{1}{2}b - \frac{l\omega}{2b} \backsim \omega$, dans laquelle on trouuera $\omega \backsim \frac{aab+abb-lab}{ab+la+lb}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aab+abb-2lab-lla-llb,\ a^3b+la^3+llab-labb,\ ab^3+lb^3+llab-laab}{2abb+2lab+2lbb}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 3.$$
$$b \backsim 4.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{53,\ 99,\ 232}{152}.$$

& si l'on suppose

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 4.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{13,\ 4,\ 23}{14}.$$

Pour auoir vne solution plus generale, égalez la premiere Puissance $xx+l\omega$ au quarré $xx-2ax+aa$, la deuxieme $yy+l\omega$ au quarré $yy-2by+bb$, & la troisieme $zz+l\omega$ au quarré $zz-2cz+cc$, pour auoir

$$x \backsim \frac{1}{2}a - \frac{l\omega}{2a}.$$
$$y \backsim \frac{1}{2}b - \frac{l\omega}{2b}.$$
$$z \backsim \frac{1}{2}c - \frac{l\omega}{2c}.$$

& au lieu de l'Equation supposée $x+y+z \backsim \omega$, on aura celle-cy, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - \frac{l\omega}{2a} - \frac{l\omega}{2b} - \frac{l\omega}{2c} \backsim \omega$, dans laquelle on trouuera $\omega \backsim \frac{aabc+abbc+abcc}{2abc+lab+lac+lbc}$, & les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront exprimez par trois fractions, dont le denominateur commun sera le double du precedent, sauoir

$$4abc+2lab+2lac+2lbc.$$

Seconde Solution. & les trois Numerateurs seront tels,

$$2aabc+laab+laac-lbbc-lbcc.$$
$$2abbc+labb+lbbc-laac-lacc.$$
$$2abcc+lacc+lbcc-laab-labb.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim \frac{19}{20}.$$
$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 2.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$$\frac{2413,\ 8702,\ 102961}{131480}.$$

Ou bien égalez la premiere Puissance $xx+l\omega$ au quarré $xx - \frac{2ax\omega}{b} + \frac{aa\omega\omega}{bb}$, la deuxieme $yy+l\omega$ au quarré $yy - \frac{2ay\omega}{c} + \frac{aa\omega\omega}{cc}$, & la troisieme $zz+l\omega$ au quarré $zz - \frac{2az\omega}{d} + \frac{aa\omega\omega}{dd}$, pour auoir

$x \backsim$

$$x \sim \frac{aa\omega - lbb}{2ab}.$$

$$y \sim \frac{aa\omega - lcc}{2ac}.$$

$$z \sim \frac{aa\omega - ldd}{2ad}.$$

& au lieu de l'Equation supposée $x+y+z \sim \omega$, on aura celle-cy, $\frac{aa\omega - lbb}{2ab} + \frac{aa\omega - lcc}{2ac} + \frac{aa\omega - ldd}{2ad} \sim \omega$, dans laquelle on trouuera $\omega \sim \frac{bbcd + bccd + bcdd}{aabc + aabd + aacd - 2abcd}$, & les trois Nombres qu'on cherche, se trouueront exprimez par trois fractions, dont le denominateur commun sera le double du precedent, sauoir

$$2aabc + 2aabd + 2aacd - 4abcd.$$

& les trois Numerateurs seront tels, — Troisieme Solution.

$$aacd + 2bbcd + acdd - abbc - abbd.$$

$$abdd + 2bccd + abbd - abcc - accd.$$

$$abbc + 2bcdd + abcc - abdd - acdd.$$

Si l'on suppose

$$a \sim \frac{13}{11}.$$

$$b \sim 1.$$

$$c \sim 2.$$

$$d \sim 3.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{457,\ 212,\ 123}{26}.$$

Cette Question se peut resoudre tres facilement, si l'on met — Metode de Diophante.

$$x\omega.$$

$$y\omega.$$

$$z\omega.$$

pour les trois Nombres qu'on cherche, comme Diophante, &

$$\frac{a\omega\omega}{b}.$$

pour leur somme $x\omega + y\omega + z\omega$, & alors on aura selon les conditions de la Question, en moindres termes, ces trois Puissances à égaler au quarré,

$$xx + \frac{lla}{b}.$$

$$yy + \frac{lla}{b}.$$

$$zz + \frac{lla}{b}.$$

Egalez la premiere $xx + \frac{lla}{b}$ au quarré $xx - 2cx + cc$, la seconde $yy + \frac{lla}{b}$ au quarré $yy - 2dy + dd$, & la troisieme $zz + \frac{lla}{b}$ au quarré $zz - 2mz + mm$, pour auoir

$$x \sim \frac{bcc - lla}{2bc}.$$

$$y \sim \frac{bdd - lla}{2bd}.$$

$$z \sim \frac{bmm - lla}{2bm}.$$

& au lieu de l'Equation supposée $x\omega + y\omega + z\omega \backsim \frac{a\omega\omega}{b}$, ou $x + y + z \backsim \frac{a\omega}{b}$, on aura celle-cy, $\frac{bcc - lla}{2bc} + \frac{bdd - lla}{2bd} + \frac{bmm - lla}{2bm} \backsim \frac{a\omega}{b}$, dans laquelle on trouvera $\omega \backsim \frac{bccdm - lladm + bcddm - llacm + bcdmm - llacd}{2acdm}$,

& les trois Nombres qu'on cherche, se trouveront exprimez par trois fractions, dont le denominateur commun sera tel,

$$4abccddmm.$$

& les trois Numerateurs seront tels,

Quatrième Solution.

$bbc^4ddmm - 2llabccddmm + l^4aaddmm + bbc^3d^3mm - llabc^3dmm - llabcd^3mm + l^4aacdmm + bbc^3ddm^3 - llabc^3ddm - llabcddm^3 + l^4aacddm.$

$bbccd^4mm - 2llabccddmm + l^4aaccmm + bbc^3d^3mm - llabc^3dmm - llabcd^3mm + l^4aacdmm + bbccd^3m^3 - llabccd^3m - llabccdm^3 + l^4aaccdm.$

$bbccddm^4 - 2llabccddmm + l^4aaccdd + bbc^3ddm^3 - llabcddm^3 - llabc^3ddm + l^4aacddm + bbccd^3m^3 - llabccdm^3 - llabccd^3m + l^4aaccdm.$

Si l'on suppose

$$a \backsim 12.$$
$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 2.$$
$$m \backsim 3.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{11,\ 4,\ 1}{3}.$$

On peut faire par cette Metode, que la somme des trois Nombres qu'on cherche, soit un Nombre quarré, savoir en mettant seulement pour les deux lettres indeterminées a, b, deux Nombres plans semblables. Comme si l'on suppose

$$a \backsim 16.$$
$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim 1.$$
$$d \backsim 2.$$
$$m \backsim 3.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{1575,\ 630,\ 245}{288}.$$

dont la somme $\frac{1225}{144}$ a sa Racine quarrée $\frac{35}{12}$.

On void aisément que cette Metode est toutafait la même que celle de Diophante, & qu'elle decouvre cette proprieté de Nombres, par laquelle il fait les trois positions des trois Nombres qu'on cherche, pour rendre quarrées les trois Puissances precedentes. Car on void bien que le premier x, ou $\frac{bcc - lla}{2bc}$,

est la Moitié de la difference des deux parties aliquotes c, $\frac{lla}{bc}$, du Nombre $\frac{lla}{b}$: & que pareillement le second Nombre y, ou $\frac{bdd-lla}{2bd}$, est la Moitié de la difference des deux parties aliquotes d, $\frac{lla}{bd}$, du même nombre $\frac{lla}{b}$: & qu'enfin le troisieme Nombre z, ou $\frac{bmm-lla}{2bm}$, est la moitié de la difference des deux parties aliquotes m, $\frac{lla}{bm}$, du même Nombre $\frac{lla}{b}$, que Diophante fait valoir 12, la lettre ω, representant icy 1N.

On void aussy que par cette Metode & par les precedentes, on peut trouuer autant de Nombres que l'on voudra : mais on en peut trouuer aussy une infinité par la metode suiuante, qui suppose qu'on sache trouuer en Nombres autant de triangles rectangles égaux que l'on voudra, comme il sera enseigné dans la Quest. 8. 5.

Pour donc trouuer trois Nombres par exemple, seruez-vous de trois triangles rectangles égaux, tels que sont les trois suiuans,

40, 42, 58.

24, 70, 74.

15, 112, 113.

où l'aire commune est telle,

$840 \propto d$.

& où les differences des deux côtez sont telles,

$2 \propto a$.

$46 \propto b$.

$97 \propto c$.

Aprez cela Mettez

ax.

bx.

cx.

pour les trois Nombres qu'on cherche, &

$4dxx$.

pour leur somme $ax+bx+cx$: car ainsy le quarré de chacun étant ajouté à cette somme supposée $4dxx$, fera un Nombre quarré, par la Nature du triangle rectangle : & il n'y aura plus qu'à égaler cette somme supposée $4dxx$ à la somme des trois Nombres $ax+bx+cx$, par cette Equation, $4dxx \propto ax+bx+cx$, dans laquelle on trouuera $x \propto \frac{a+b+c}{4d}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+ab+ac,\ bb+ab+bc,\ cc+ac+bc}{4d}.$$ Cinquieme Solution.

Parceque nous auons supposé

$a \sim 2.$

$b \sim 46.$

$c \sim 97.$

$d \sim 840.$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{58,\ 1334,\ 2813}{96}.$$

Au lieu de prendre les differences des côtez, on peut prendre les hypotenuses, sauoir en supposant

$a \sim 58.$

$b \sim 74.$

$c \sim 113.$

& toujours

$d \sim 840.$

& alors les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{406,\ 518,\ 791}{96},$$

qui satisfont encore à la Question suiuante, & aussy à 9. 5.

Si on prend les differences des côtez, & encore les hypotenuses, on trouuera deux fois autant de Nombres qu'on en demande, comme icy six, sauoir

$$\frac{26,\ 598,\ 1261,\ 754,\ 962,\ 1469}{112}.$$

Lorsqu'on ne voudra que trois Nombres, on leur peut donner telle raison que l'on voudra: comme si on leur veut donner la raison des trois Nombres donnez

1.

2.

4.

on trouuera premierement trois Nombres en cette raison, tels que sont les trois suiuans,

$4 \sim a.$

$8 \sim b.$

$16 \sim c.$

qui sont tels, que le quarré de chacun étant ajouté au même Nombre

$105 \sim d.$

qu'il faudra aussy trouuer, fasse vn Nombre quarré.

Ces quatre Nombres étant trouuez, comme nous enseignerons dans le Lemme suiuant; mettez

$ax.$

$bx.$

$cx.$

pour les trois Nombres qu'on cherche, &

dxx.

pour leur somme $ax+bx+cx$, car ainsy le quarré de châcun étant ajouté à cette somme supposée dxx, fera Un Nombre quarré, & il n'y aura plus qu'à resoudre cette Equation, $ax+bx+cx \sim dxx$, dans laquelle on trouuera $x \sim \frac{a+b+c}{d}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

$$\frac{aa+ab+ac,\ bb+ab+bc,\ cc+ac+bc}{d}.$$ Sixieme Solution.

Parceque Nous auons supposé

$a \sim 4$.

$b \sim 8$.

$c \sim 16$.

$d \sim 105$.

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{112,\ 224,\ 448}{105}.$$

Cette Question se peut encore resoudre par le Moyen du triangle rectangle, autrement qu'auparauant, comme Nous dirons dans la Question suiuante.

Lemme.

Trouuer quatre Nombres, en sorte que les trois premiers soient en raison donnée, & que le quatrieme étant ajouté au quarré de chacun des trois mêmes Nombres, il vienne trois Nombres quarrez.

Si la raison des trois premiers des quatre nombres qu'on cherche, est égale à celle des trois Nombres donnez

$1 \sim a$.

$2 \sim b$.

$4 \sim c$.

mettez

ay.

by.

cy.

x.

pour les quatre Nombres qu'on cherche, & selon les conditions de la Question, Vous aurez ces trois Puissances à égaler au quarré,

$aayy + 13x$.

$bbyy + 13x$.

$ccyy + 13x$.

leur produit Solide est $aabbccy^6 + l^3bbccxy^4 + l^3aaccy^4x + l^3aabby^4x + l^6aayyxx + l^6bbxxyy + l^6ccxxyy + l^9x^3$, qu'il faut égaler au quarré, pour le côté duquel prenant $abcy^3 + \frac{l^3bbccxy + l^3aaccxy + l^3aabbxy}{2abc}$, on trouuera en entiers,

$$x \sim a^4b^4 - 2a^4bbcc - 2aab^4cc + a^4c^4 - 2aabbc^4 + b^4c^4.$$

$$y \sim 2abc.$$

& les quatre Nombres qu'on cherche, seront tels,

$2aabc.$

$2abbc.$

$2abcc.$

$a^4b^4 - 2a^4bbcc + a^4c^4 - 2aab^4cc - 2aabbc^4 + b^4c^4.$

Parceque Nous auons supposé

$a \sim 1.$

$b \sim 2.$

$c \sim 4.$

les quatre Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

16.

32.

64.

1680.

Si Vous les Voulez en Moindres termes, diuisez icy le quatrieme Nombre 1680 par le Nombre quarré 16, & par son côté 4, les trois autres, & alors les quatre Nombres qu'on cherche, seront en Moindres termes de cette grandeur,

4.

8.

16.

105.

Question XXXVI.

Trouuer trois Nombres, dont la somme étant ôtée du quarré de chacun, il reste trois Nombres quarrez.

On propose de trouuer trois Nombres

$x.$

$y.$

$z.$

dont la somme étant ôtée du quarré de chacun, les trois restes

$xx - lx - ly - lz.$

$yy - lx - ly - lz.$

$zz - lx - ly - lz.$

Soient des Nombres quarrez.

Si on multiplie separément les hypotenuses d'autant de triangles rectangles égaux qu'on demandera de Nombres, par la somme de toutes ces hypotenuses, & qu'on diuise chaque produit par le quadruple de l'aire commune à ces triangles rectangles, on aura les Nombres qu'on cherche. Canon.

Selon les conditions de la Question, on aura ces trois Puissances à égaler au quarré,

$$xx - lx - ly - lz.$$
$$yy - lx - ly - lz.$$
$$zz - lx - ly - lz.$$

Pour auoir vn calcul plus aisé, supposez

$$x + y + z \propto w.$$

& alors vous aurez ces trois autres Puissances à égaler au quarré,

$$xx - lw.$$
$$yy - lw.$$
$$zz - lw.$$

Egalez la premiere $xx - lw$ au quarré $xx - 2ax + aa$, la deuxieme $yy - lw$ au quarré $yy - 2by + bb$, & la troisieme $zz - lw$, au quarré $zz - 2cz + cc$, pour auoir

$$x \propto \frac{aa + lw}{2a}.$$
$$y \propto \frac{bb + lw}{2b}.$$
$$z \propto \frac{cc + lw}{2c}.$$

& l'Equation supposée $x + y + z \propto w$, se changera en celle-cy, $\frac{aa+lw}{2a} + \frac{bb+lw}{2b} + \frac{cc+lw}{2c} \propto w$, dans laquelle on trouuera $w \propto \frac{aabc + abbc + abcc}{2abc - lab - lac - lbc}$, & les trois Nombres qu'on cherche seront tels,

$$\frac{2abc + lbcc + lbbc - laab - laac}{4abc - 2lab - 2lac - 2lbc}.$$

$$\frac{2abbc + laac + lacc - labb - lbbc}{4abc - 2lab - 2lac - 2lbc}.$$

$$\frac{2abcc + laab + labb - lacc - lbcc}{4abc - 2lab - 2lac - 2lbc}.$$

Si l'on suppose

$$a \propto 1.$$
$$b \propto 2.$$
$$c \propto 3.$$

les trois nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{37,\ 20,\ 15}{2}.$$

Si vous voulez que la somme des trois Nombres qu'on cherche, soit vn nombre quarré, supposez

$$lx + ly + lz \backsim \omega\omega.$$

& alors vous aurez ces trois autres Puissances à égaler au quarré,

$$xx - \omega\omega.$$
$$yy - \omega\omega.$$
$$zz - \omega\omega.$$

Egalez la premiere $xx - \omega\omega$ au quarré $xx - \frac{2ax\omega}{bb} + \frac{aa\omega\omega}{bb}$, la deuxieme $yy - \omega\omega$ au quarré $yy - \frac{2ay\omega}{c} + \frac{aayy}{cc}$, & la troisieme $zz - \omega\omega$ au quarré $zz - \frac{2az\omega}{d} + \frac{aa\omega\omega}{dd}$, pour avoir

$$x \backsim \frac{aa\omega + bb\omega}{2ab}.$$
$$y \backsim \frac{aa\omega + cc\omega}{2ac}.$$
$$z \backsim \frac{aa\omega + dd\omega}{2ad}.$$

& l'Equation supposée $lx + ly + lz \backsim \omega\omega$, se changera en celle-cy, $\frac{aa\omega + bb\omega}{2ab} + \frac{aa\omega + cc\omega}{2ac} + \frac{aa\omega + dd\omega}{2ad} \backsim \omega\omega$, dans laquelle on trouvera $\omega \backsim \frac{aacd + bbcd + aabd + bccd + aabc + bcdd}{2abcd}$, & les trois Nombres qu'on cherche, seront tels,

Seconde Solution.

$$\frac{aa}{4bb} + \frac{1}{2} + \frac{aa}{4bc} + \frac{c}{4b} + \frac{aa}{4bd} + \frac{d}{4b} + \frac{bb}{4aa} + \frac{bc}{4aa} + \frac{b}{4d} + \frac{bd}{4aa}.$$
$$\frac{aa}{4bc} + \frac{b}{4c} + \frac{aa}{4cc} + \frac{1}{2} + \frac{aa}{4cd} + \frac{d}{4c} + \frac{cc}{4aa} + \frac{c}{4b} + \frac{c}{4d} + \frac{cd}{4aa}.$$
$$\frac{aa}{4bd} + \frac{b}{4d} + \frac{aa}{4cd} + \frac{c}{4d} + \frac{aa}{4dd} + \frac{1}{2} + \frac{dd}{4aa} + \frac{d}{4b} + \frac{bd}{4aa} + \frac{d}{4c} + \frac{cd}{4aa}.$$

Si l'on suppose

$$a \backsim 1.$$
$$b \backsim 2.$$
$$c \backsim 3.$$
$$d \backsim 4.$$

ou

$$a \backsim 2.$$
$$b \backsim 1.$$
$$c \backsim \frac{2}{3}.$$
$$d \backsim \frac{1}{2}.$$

les trois Nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur,

$$\frac{3630,\ 4840,\ 6171}{576}.$$

dont la Somme $\frac{14641}{576}$ a sa Racine quarrée $\frac{121}{24}$.

Cette Question se peut resoudre en autant de Manieres differentes que la precedente, & encore par le moyen d'autant de triangles rectangles de même hauteur qu'on demandera de Nombres: comme si l'on demande trois Nombres, en se servant de ces trois triangles rectangles,

12, 9, 15.
12, 5, 13.
12, 16, 20.

Soit.

où la hauteur commune est 12, & en mettant

15x.

13x.

20x.

pour les trois nombres qu'on cherche, &

144xx.

pour leur somme 48x, on trouuera $x \sim \frac{1}{3}$, & les trois nombres qu'on cherche, seront de cette grandeur;

$\frac{15, 13, 20}{3}$.

Au lieu de prendre les hypotenuses, on prendra la base de chaque triangle pour les trois nombres qu'on cherche, & le quarré de la hauteur commune pour leur somme, lors que l'on voudra resoudre par cette metode la Question precedente.

La Question qui manque icy, se trouuera dans le Liure suiuant.





